Auswertung von Messungen Teil III

1. Nichtlineare Regression
   1.1 Mehrfach-lineare Regression
   1.2 Allgemeines Vorgehen bei nichtlinearen Funktionen
2. Entscheidungstheorie
   2.1 Signifikanzzahl – Signifikanzniveau
   2.2 Vorgehen beim statistischen Test
   2.3 Einseitige und zweiseitige Tests
3. Signifikanztests
   3.1 Test für Mittelwert – z-Test
   3.2 Test für Mittelwert – t-Test
4. Anpassungstest
   4.1 Chi-Quadrat Test
   4.2 Freiheitsgrade
   4.3 Beispiele

1. Nichtlineare Regression

1.1 Mehrfach-lineare Regression

Gesucht: $y = m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \ldots + m_k \cdot x_k + b$

Es liegen j = 1 ... **n** Messwerte vor.

Lösung mit Excelfunktion RGP (y_1: y_n ; x_{11}: x_{kn} ; WAHR ; WAHR)

Ergebnisangabe:

m_k	m_{k-1}	…	m_1	b
se_k	se_{k-1}	…	se_1	se_b
r^2	se_Y			
F	d_f			
ss_{reg}	ss_{resid}			

mit: se_k – Standardabweichung
r^2 - Bestimmtheitsmaß

1.2 Allgemeines Vorgehen bei nichtlinearen Funktionen

Beispiel: $Y = a \cdot e^{b \cdot X} \cdot X^{c}$

$\ln Y = c \cdot \ln X + b \cdot X + \ln a$

Überführen in die lineare Darstellung:

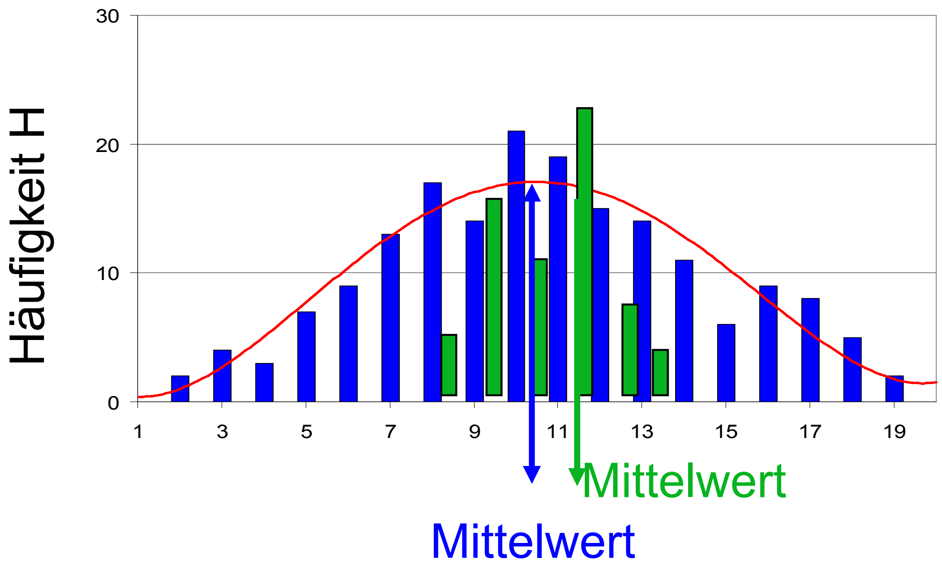
$$Y = a_2 \cdot X_2 + a_1 \cdot X_1 + a_0$$

mit $Y = \ln y$, $X_2 = \ln x$, $X_1 = x$,
$a_2` = c$, $a_1 = b$, $a_0 = \ln a$

für $Y(X_1, X_2)$ dann die mehrfach-lineare Regression durchführen.

2. Entscheidungstheorie

Aufgabe: Aus Stichproben sind Entscheidungen über Grundgesamtheiten zu treffen (Mittelwerte, Varianz, Verteilungstyp)



z.B. Frage:

Genügen die „grünen" Ergebnisse auch der „blauen" Statistik, d.h. der „roten" Verteilungskurve?

2. Entscheidungstheorie

Aufgabe: Aus Stichproben sind Entscheidungen über Grundgesamtheiten zu treffen (Mittelwerte, Varianz, Verteilungstyp)

Nullhypothese H_0 und **Alternativhypothese** H_1 aufstellen.
Haltbarkeit der Hypothese an Hand von Stichprobenwerten prüfen. Bei Versagen von H_0 die Alternativhypothese annehmen.

Signifikanzzahl α = Irrtumswahrscheinlichkeit
Signifikanztest – Entscheidungsregeln, ob signifikante oder bloß zufällige Abweichungen vom erwarteten Ergebnis vorliegen.

(Beispiel: 20 x Münzwurf, es fällt 16x Kopf! Ist die Münze präpariert ?)

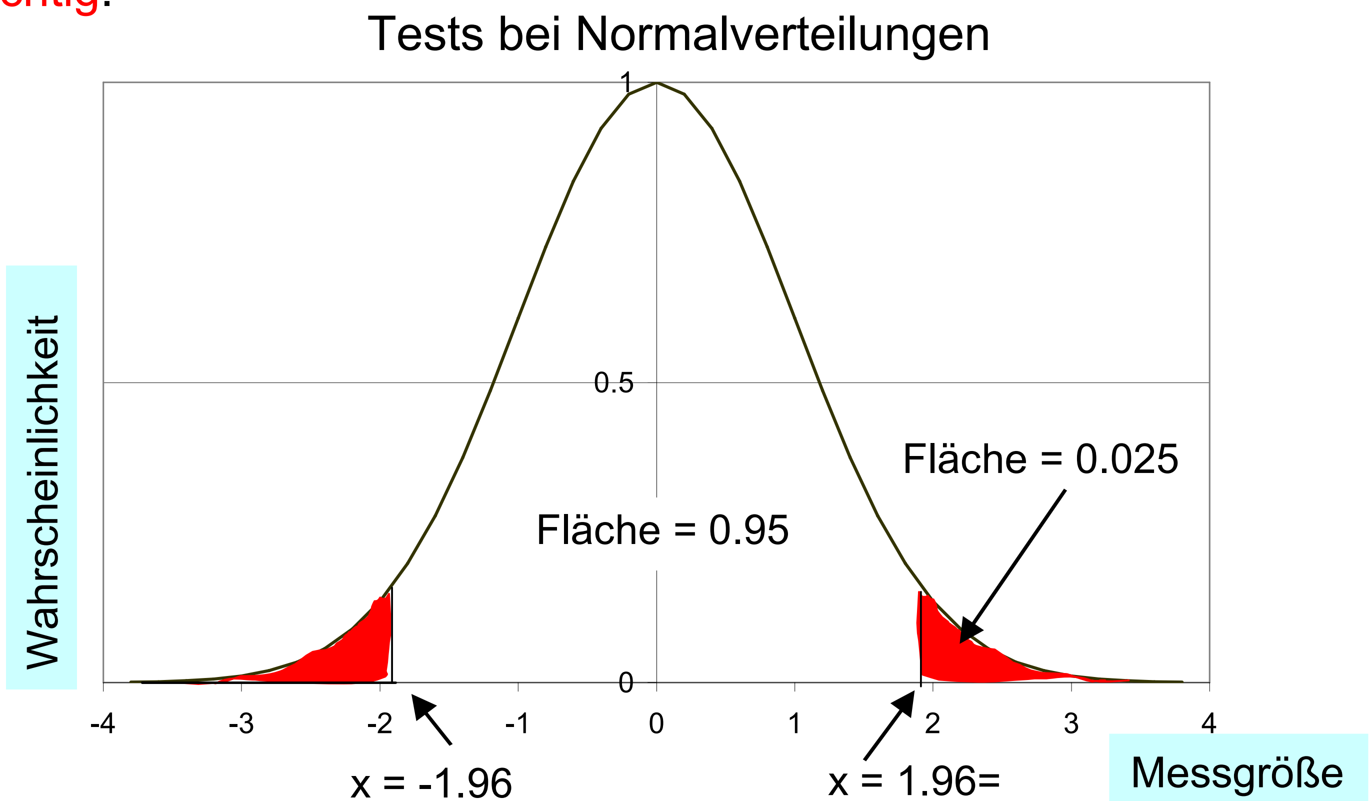
Eine Nullhypothese kann angenommen oder verworfen werden. Dabei kann man 2 Fehler machen:

- Fehler 1. Art - Richtige Hypothese wird abgelehnt - **Lieferantenrisiko**
- Fehler 2. Art - Falsche Hypothese wird akzeptiert - **Kundenrisiko**

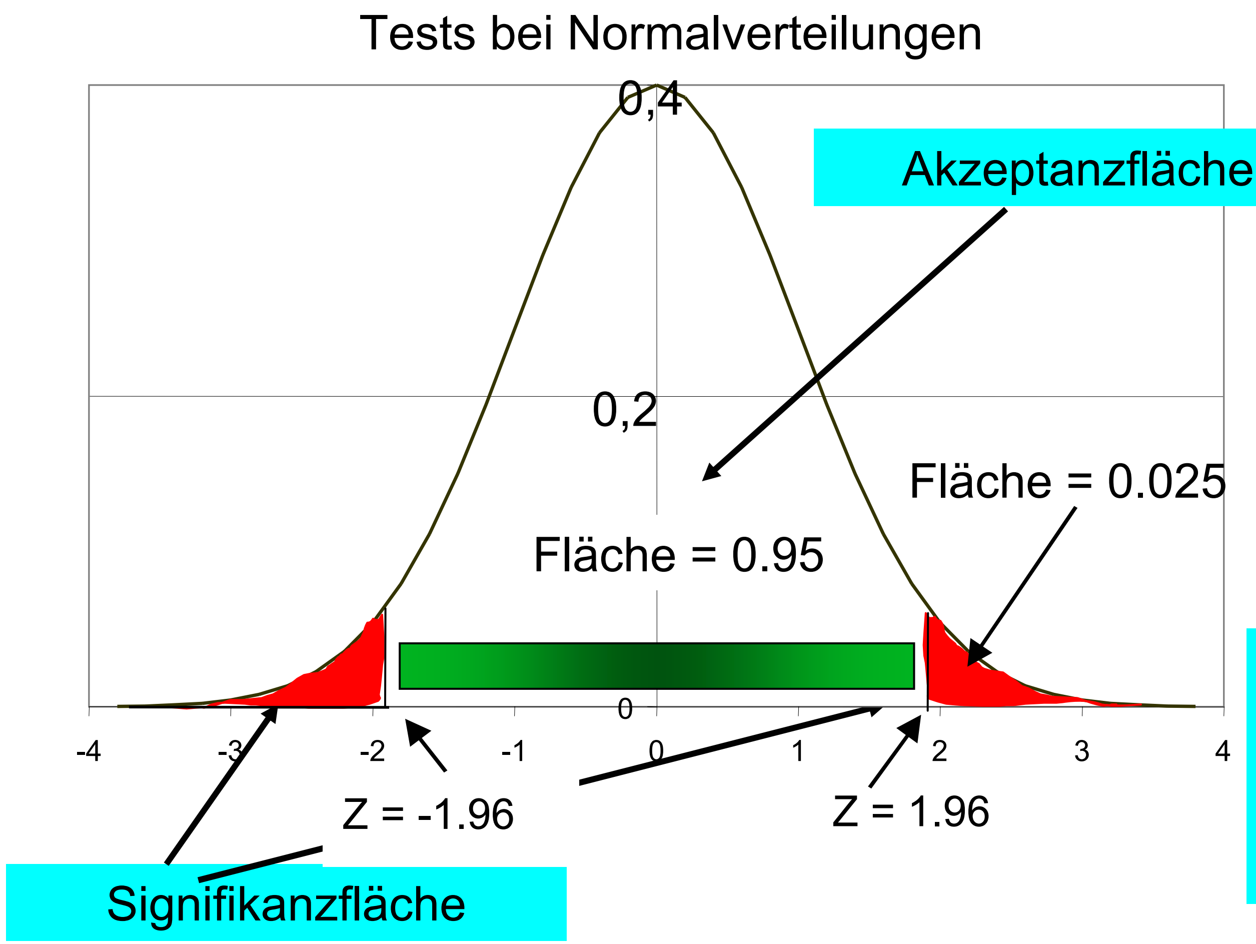
2.1 Signifikanzzahl - Signifikanzniveau

Die Signifikanzzahl ist die maximale Wahrscheinlichkeit, mit der man willentlich einen Fehler 1. Art riskiert.

z.B. bei α=0,05 (5% Niveau) wird zu 5% falsch geurteilt, d.h. wir entscheiden zu 95% richtig.



2.1 Signifikanzzahl - Signifikanzniveau



Zu 95% kann man sicher sein, dass z im Intervall (-1.96, 1.96) liegt

2.2 Vorgehen beim statistischen Test – 5-Schritte-Prozedur

1. Definition von Nullhypothese und Alternativhypothese

2. Signifikanzzahl wählen

3. Kritischen Wert aus Tabellen auswählen (ist ein normierter Wert)

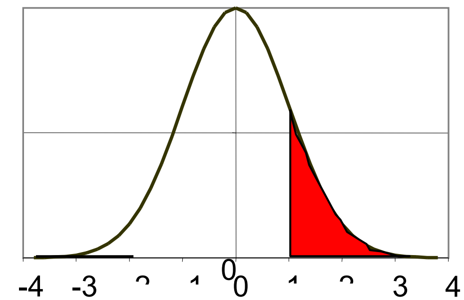
4. Aus der Stichprobe die (normierte) Prüfgröße berechnen

5. Prüfen, ob die Prüfgröße den kritischen Wert verletzt.
(**Was „verletzt“ bedeutet, hängt von der Testproblematik ab**)

2.3 Einseitige und zweiseitige Tests

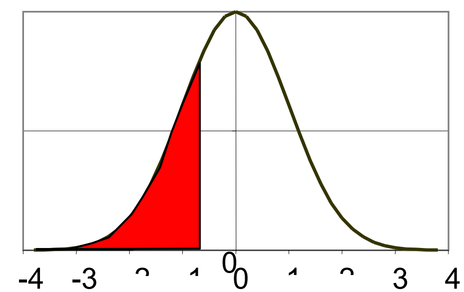
Einseitiger Test – Risiko: Höchstwertüberschreitung

Z < L



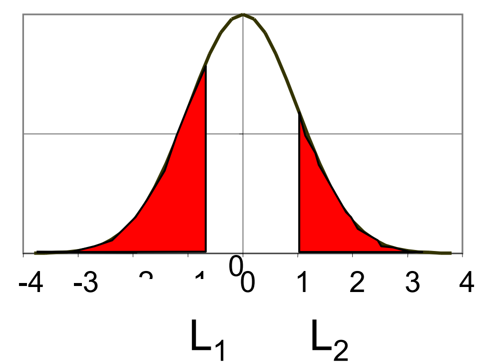
Einseitiger Test – Risiko: Mindestwertunterschreitung

Z > L



Zweiseitiger Test – Risiko: außerhalb der Toleranzen

L1< Z < L2



3. Signifikanztests

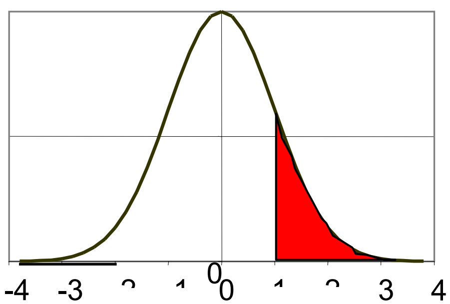
3.1 Test für den Mittelwert μ bei bekannter Varianz σ (z-Test)

Stichprobe vom Umfang n, Mittelwert $\overline{x}$ Irrtumswahrscheinlichkeit α,

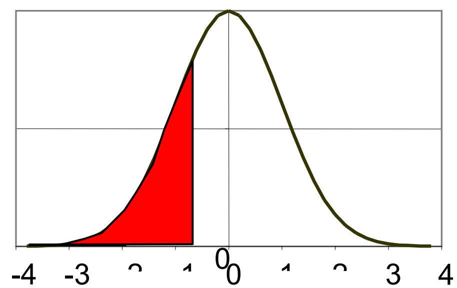
Hypothese H_0 soll gelten: $\mu = \mu_0$.

Stichprobenwert: $$z_{st} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

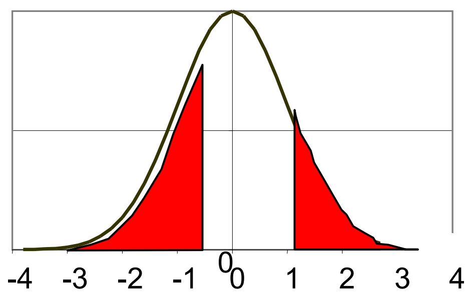
Grenzwert $z_{1-\alpha}$ aus **F(z)** bestimmen !



$\mu > \mu_0$



$\mu < \mu_0$



$\mu \neq \mu_0$

3. Signifikanztests

3.1 Test für den Mittelwert μ bei bekannter Varianz σ (z-Test)

Stichprobe vom Umfang n, Mittelwert $\bar{x}$, Irrtumswahrscheinlichkeit α,

Hypothese H_0 soll gelten: $\mu = \mu_0$.

Stichprobenwert: $$z_{st} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$ wird berechnet aus Messdaten!

Grenzwert $z_{1-\alpha}$ aus F(z) bestimmen !

Bei Alternativhypothese:	$\mu > \mu_0$	H_o annehmen für:	$z_{st} \leq z_{1-\alpha}$
	$\mu < \mu_0$		$z_{st} \geq z_{1-\alpha}$
	$\mu \neq \mu_0$		$z_{\alpha/2} \leq z_{st} \leq z_{1-\alpha/2}$

3.2 Test für den Mittelwert bei unbekannter Varianz σ (s bekannt) (t-Test)

Dieser Fall liegt gewöhnlich bei Messaufgaben vor!

Es liegt eine Stichprobe vom Umfang n vor. Mittelwert $\overline{x}$ und Standardabweichung s der **Stichprobe** werden daraus berechnet. Die Prüfgröße ist hier:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{\overline{x} - \mu}{s} \cdot \sqrt{n}$$

t genügt der **STUDENT-Verteilung**. Diese ist tabelliert und hängt vom Parameter *Freiheitsgrad (n-1)* ab. Auch die Grenzwerte der kumulativen (d.h. integrierten) STUDENT-Verteilung sind tabelliert:

3.2 Test für den Mittelwert bei unbekannter Varianz σ (s bekannt) (Grenzwerte der STUDENT-Verteilung)

Freiheits-grade f	Flächen F(t)					
	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	318,29
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	22,33
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	10,21
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	5,89
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85	3,55
100	1,29	1,66	1,98	2,36	2,63	3,17
200	1,29	1,65	1,97	2,35	2,60	3,13
10000	1,28	1,65	1,96	2,33	2,58	3,09

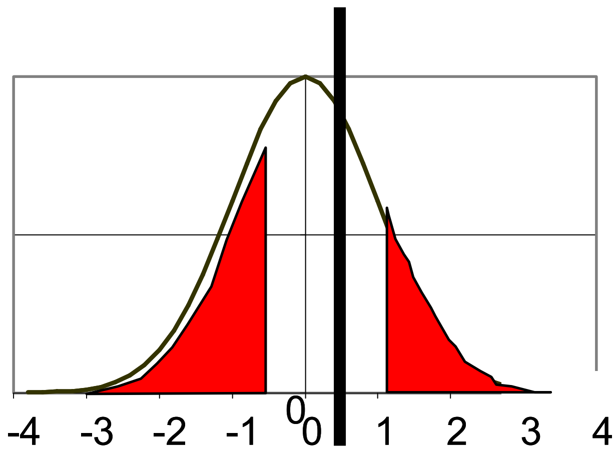
$1-\alpha/2$

Sicherheits-wahrscheinlichkeit

3.2 Test für den Mittelwert bei unbekannter Varianz σ (s bekannt)
Beispiel: Zweiseitiger Test

In der Eingangskontrolle einer Maschinenbaufirma werden die Innendurchmesser von Kugellagern vermessen. Im Rahmen einer Stichprobenerhebung wurden 30 Lager einer Lieferung vermessen. Als Mittelwert ergab sich der Innendurchmesser **30,03 mm**; die Standardabweichung wurde zu **0,09 mm** gemessen.

Zu testen ist, ob mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% behauptet werden kann, dass der Sollwert 30,00 mm eingehalten wird?



$\mu\ ?\ \mu_0$

Bei Alternativhypothese $\mu \neq \mu_0$:

H_o annehmen für $t_{\alpha/2} \leq t_{st} \leq t_{1-\alpha/2}$

3.2 Test für den Mittelwert bei unbekannter Varianz σ (s bekannt)
Beispiel: Zweiseitiger Test

In der Eingangskontrolle einer Maschinenbaufirma werden die Innendurchmesser von Kugellagern vermessen. Im Rahmen einer Stichprobenerhebung wurden 30 Lager einer Lieferung vermessen. Als Mittelwert ergab sich der Innendurchmesser **30,03 mm**; die Standardabweichung wurde zu **0,09 mm** gemessen.

Zu testen ist, ob mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% behauptet werden kann, dass der Sollwert 30,00 mm eingehalten wird?

Stichprobe:

$$\bar{x} = 30{,}03\,mm \qquad n = 30$$
$$s = 0{,}1\,mm \qquad t_{st} = ?$$

$$t_{St} = \frac{(\bar{x} - \mu) \cdot \sqrt{n}}{s} = \frac{(30{,}03 - 30)\,mm}{0{,}09\,mm} \cdot \sqrt{30} = 1{,}826$$

Testparameter:

$$\mu_0 = 30{,}0\,mm \qquad \alpha = 0{,}05$$
$$f = n - 1 = 29 \qquad t_{krit} = ?$$

Tabelle

3.2 Test für den Mittelwert bei unbekannter Varianz σ (s bekannt) (Grenzwerte der STUDENT-Verteilung)

Freiheitsgrade f	Flächen F(t)					
	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	318,29
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	22,33
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	10,21
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	5,89
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73
20	1,33	1,72	**2,09**	2,53	2,85	3,55
100	1,29	1,66	**1,98**	2,36	2,63	3,17
200	1,29	1,65	1,97	2,35	2,60	3,13
10000	1,28	1,65	1,96	2,33	2,58	3,09

$1-\alpha/2$

Sicherheits-wahrscheinlichkeit

$t_{krit} = 2,045$

3.2 Test für den Mittelwert bei unbekannter Varianz σ (s bekannt)
Beispiel: Zweiseitiger Test

In der Eingangskontrolle einer Maschinenbaufirma werden die Innendurchmesser von Kugellagern vermessen. Im Rahmen einer Stichprobenerhebung wurden 30 Lager einer Lieferung vermessen. Als Mittelwert ergab sich der Innendurchmesser **30,03 mm**; die Standardabweichung wurde zu **0,09 mm** gemessen.

Zu testen ist, ob mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% behauptet werden kann, dass der Sollwert 30,00 mm eingehalten wird?

Stichprobe:

$$\bar{x} = 30,03\,mm \quad n = 30$$
$$s = 0,1\,mm \quad t_{st} = 1,826$$

Testparameter:

$$\mu_0 = 30,0\,mm \quad \alpha = 0,05$$
$$f = n - 1 = 29 \quad t_{krit} = \pm 2,045$$

Der Vergleich des Stichprobenwertes t_{St} mit dem Grenzwert t_{krit} liefert das Testergebnis:
Da t_{st} =1,826 im Intervall **zwischen dem** unteren (-2,045) und dem oberen (2,045) kritischen Wert aus der t-Tabelle liegt, wird die **Nullhypothese angenommen**.

Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% kann behauptet werden, dass der Mittelwert 30 mm für den Innendurchmesser eingehalten wird.

3.3 Test für den Vergleich zweier Mittelwerte (t-Test)

Frage: Stammen 2 Stichprobenmittelwerte $\overline{x_1}$ und $\overline{x_2}$ aus der gleichen Grundgesamtheit oder nicht? ($n_1 = n_2$).

Prüfgröße ist $t_{prüf} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \cdot \sqrt{n}$ **Nullhypothese** H_0: $\mu_1 = \mu_2$

Freiheitsgrade: f = 2(n-1)

3.3 Test für den Vergleich zweier Mittelwerte (t-Test)
Beispiel für zweiseitigen Test

Hierzu ein Beispiel:

Zur Überprüfung der Reproduzierbarkeit einer bei Abkühlversuchen benutzten Messmethode wurden zwei Versuchsreihen V1 und V2 angestellt. Die Temperaturmittelwerte unterscheiden sich.

Ist der Unterschied der Mittelwerte dieser gemessenen Temperaturen signifikant ?
(→ Zweiseitiger Test mit Irrtumswahrscheinlichkeit 5 %).

	Temperaturen beim Abkühlversuch [°C]				
V1	106,9	106,3	107,0	106,0	104,9
V2	106,5	106,7	106,8	106,1	105,6

Stichprobe: n=5

$$\overline{x_1} = 106,22 \qquad s_1 = 0,847$$

$$\overline{x_2} = 106,34 \qquad s_1 = 0,493$$

$$t_{st} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \cdot \sqrt{2(n-1)} = -0,274$$

Testparameter: f=8

$$\alpha = 0,05$$

$$t_{krit} = \pm 2,306$$

3.3 Test für den Vergleich zweier Mittelwerte (t-Test)
Beispiel für zweiseitigen Test

Stichprobe:

$$t_{st} = -0,274$$

Testparameter:

$$t_{krit} = \pm 2,306$$

	Einseitiger Test	Einseitiger Test	Zweiseitiger Test
Nullhypothese H_0	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 = \mu_2$
Alternativhypothese H_1	$\mu_1 > \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	μ_1 # μ_2
t_{krit} unten		-1,860	-2,306
t_{krit} oben	1,860		2,306
Test-Ergebnis	**H_0 annehmen**	**H_0 annehmen**	**H_0 annehmen**

Da die Prüfgröße (t-Wert der Stichprobe) **zwischen den kritischen Werten** der t -Verteilung liegt, wird die Nullhypothese angenommen. **Der beobachtete Unterschied der Mittelwerte der beiden Stichproben ist mit 95%iger Sicherheit nicht signifikant.**

3.4 Ein weiteres Beispiel für den t-Test

Frage: **Es wird eine Entscheidungsregel gesucht, ob die Münze fair ist.**

64 Münzwürfe sind möglich, das Signifikanzniveau soll 5% sein.

Dazu betrachten wir wieder die tabellierten Grenzwerte der STUDENT-Verteilung:

Freiheits-grade f	Flächen F(t)					
	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	318,29
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	22,33
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	10,21
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	5,89
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73
20	1,33	1,72	**2,09**	2,53	2,85	3,55
100	1,29	1,66	**1,98**	2,36	2,63	3,17
200	1,29	1,65	1,97	2,35	2,60	3,13
10000	1,28	1,65	1,96	2,33	2,58	3,09

$\mu = 64 \cdot \frac{1}{2} = 32, \quad \sigma = 4, \quad$ **t =?**

Wenn die Kopfzahl zwischen $32 \pm t \cdot \sigma = 32 \pm 2 \cdot 4 = (24 .. 40)$ liegt, ist mit 95% Sicherheit die Münze fair.

3.4 Ein weiteres Beispiel für den t-Test

Frage: Es wird eine Entscheidungsregel gesucht, ob die Münze fair ist.

64 Münzwürfe sind möglich, das Signifikanzniveau soll **5%** sein.

Zahl der Meßwerte	t für statistische Sicherheit von 68%	95%	99%
5	1.15	2.8	4.6
20	1.03	2.1	2.8
100	1.0	1.98	2.4

$1-\alpha$ **(!)**

$\mu = 64 \cdot \frac{1}{2} = 32$, $\sigma = 4$, $t \approx 2$

Wenn die Kopfzahl zwischen **32 ± t·σ = 32 ± 2·4 = (24 .. 40)** liegt, so ist mit 95% Sicherheit die Münze fair.

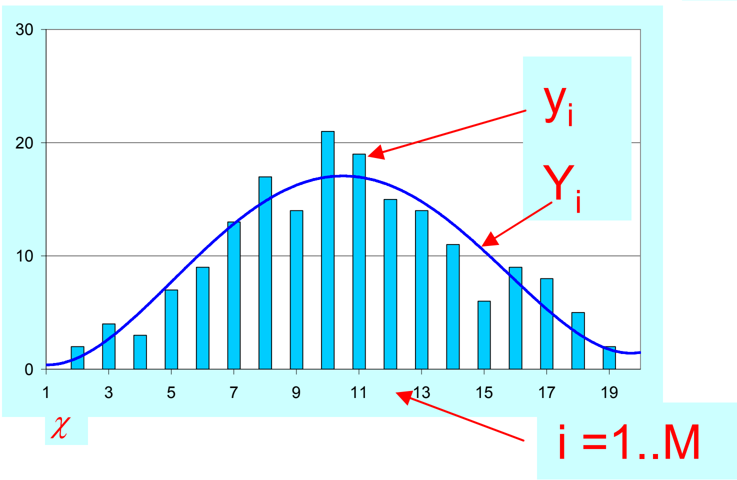
4. Anpassungstest

Problem: **Gehören die Meßwerte einer Messreihe zu einer bestimmten Verteilungsfunktion**?

Antwort: **Chi-Quadrat-Test** durchführen

- Messwerte y werden in M Gruppen zusammengefaßt.
- Messwerte: $\mathbf{y_i}$ — erwartete bzw. berechnete Werte: $\mathbf{Y_i}$
- Definition der **Merit-Funktion**

$$\chi^2 = \sum_1^M \left(\frac{\text{beobachteter Wert} - \text{erwarteter Wert}}{\text{Standardabweichung}} \right)^2$$



Die Standardabweichung innerhalb einer Gruppe kann als Ergebnis einer Zählstatistik (**Poissonverteilung**!) angenommen werden.

d.h. Varianz = $(\text{Standardabweichung})^2$
= erwarteter Wert Y_i

4. Anpassungstest

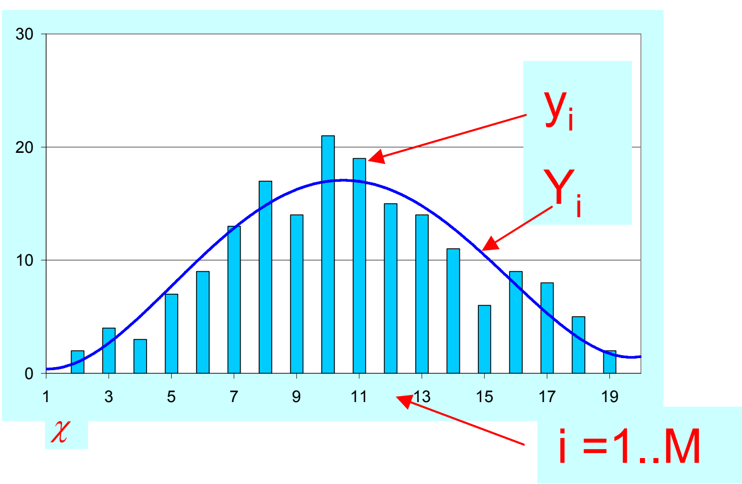
Problem: **Gehören die Meßwerte einer Messreihe zu einer bestimmten Verteilungsfunktion?**

Antwort: **Chi-Quadrat-Test**

- Messwerte y werden in M Gruppen zusammengefaßt.
- Messwerte: $\mathbf{y_i}$ — erwartete bzw. berechnete Werte: $\mathbf{Y_i}$

- Definition der Merit-Funktion

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{M} \frac{(y_i - Y_i)^2}{Y_i}$$



χ^2 ist ein Maß dafür, wie gut die „unsicheren“ Messwerte der angenommenen Verteilungsfunktion entsprechen.

Je größer χ^2, desto unwahrscheinlicher ist es, dass die Messwerte der Verteilungsfunktion entsprechen.

4.1 Chi-Quadrat-Verteilung

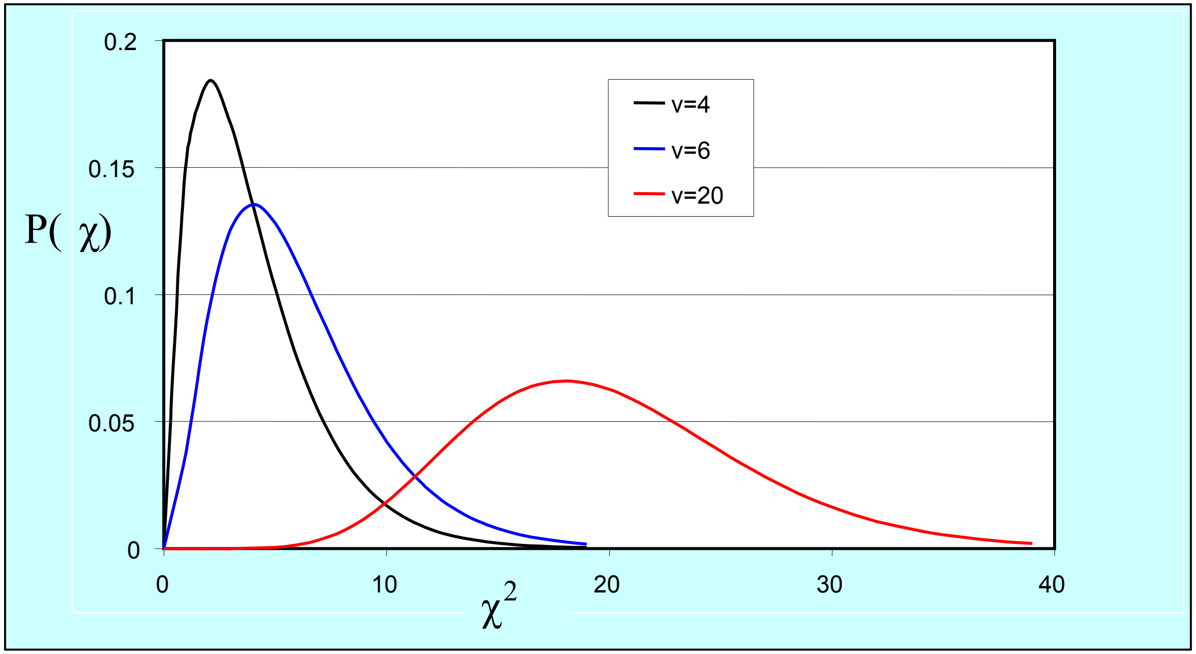
1) Messwerte sind in M Klassen sortiert: **M> 6**, **mehr als 5 Messwerte pro Klasse!**

2) Aus Stichprobe sind **K Parameter** zu berechnen

3) Zahl der **Freiheitsgrade** ν : $\boldsymbol{\nu}$ **= M – K – 1**

4) Die Verteilungsfunktion für χ^2 ist:

$$P(\chi^2, \nu) = \frac{\chi^{\nu-2}}{2^{\nu/2}} \cdot \frac{e^{-\chi^2/2}}{\Gamma(\nu/2)}$$



Fazit: Kleine und große χ^2 sind unwahrscheinlich, wenn die Verteilungsfunktion stimmen soll!

4.1 Chi-Quadrat-Verteilung

Prüfgröße: $$\chi^2_{St} = \sum_{i=1}^{M} \frac{\left(y_i - Y_i\right)^2}{Y_i}$$

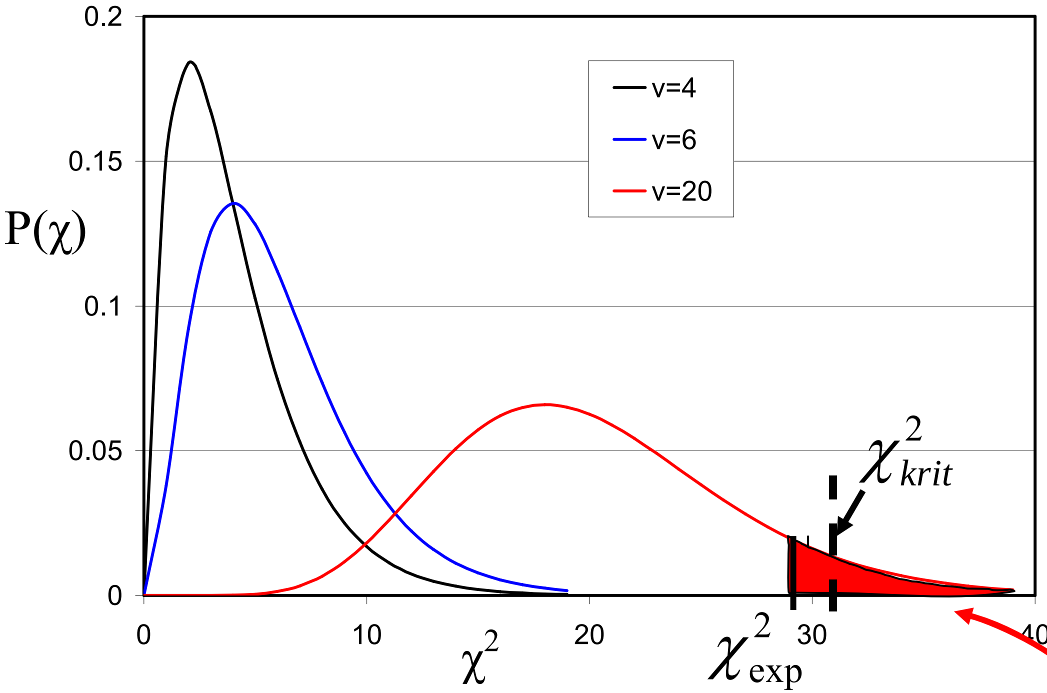
Die Prüfgröße χ^2 ist bei ausreichend vielen y_i annähernd $\chi 2$ – verteilt mit M-K-1 Freiheitsgraden.
Wenn die Nullhypothese wahr ist, sollte der Unterschied zwischen der beobachteten und der theoretisch erwarteten Häufigkeit klein sein. Dazu wird eine kritische Prüfgröße χ^2_{krit} bestimmt. **Bei einem Signifikanzniveau α wird H_o angenommen, wenn**

$$\chi^2_{St} \leq \chi^2_{krit}\left(1-\alpha, M-K-1\right)$$

Man sagt: χ^2_{krit} ist das (1-α)-Quantil der χ^2-Verteilung mit M-K-1 Freiheitsgraden.

Es existieren Tabellen für die χ^2_{krit} -Schwellenwerte in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade v und vom gewünschten Signifikanzniveau α.

Wie funktioniert der Chi-Quadrat-Test?



$$W = \int_{\chi^2_{exp}}^{\infty} P(\chi^2) \cdot d\chi^2$$

Zufallswerte genügen der angenommenen Verteilungs-funktion, wenn

$$\chi_{exp}^{2} \leq \chi_{krit}^{2}$$

Es ist tabelliert:

$$\chi^2_{krit}\left(1-a,\nu\right)$$

Das Integral W(χ_{exp}^2) sollte größer als 5% sein!

4.2 Freiheitsgrade – ein Beispiel

v = Anzahl der beobachteten Daten – Anzahl der aus den Daten berechneten Parameter
d.h. Anzahl der Freiheitsgrade = Anzahl der Klassen – Anzahl der Zwangsbedingungen -1

Beispiel: 100 γ-Messungen mit Zählrohr. Frage: **liegt hier Poisson-Verteilung vor ?**

Zählwert	Häufigkeit	Klassennummer	Beobachtung	Erwartung
0	7			
1	17			
2	29			
3	20			
4	16			
5	8			
6	1			
7	2			
≥8	0			
Summe	100			

4.2 Freiheitsgrade – ein Beispiel

Achtung: Mindestsen 6 Klassen, Zusammenfassung aller Zählwerte mit kleiner Häufigkeit in einer einzigen Klasse.

Zählwert	Häufigkeit	Klassennummer	Beobachtung	Erwartung
0	7	1	7	
1	17	2	17	
2	29	3	29	
3	20	4	20	
4	16	5	16	
5	**8**	**6**	**11**	
6	**1**			
7	**2**			
≥8	**0**			
Summe	100			

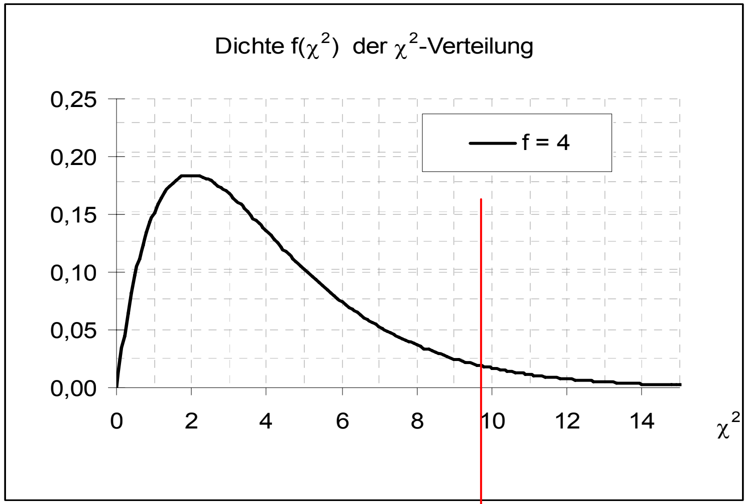
4.2 Freiheitsgrade – ein Beispiel

Zur **Berechnung der erwarteten Werte** nach der Poisson-Verteilung brauchen wir dem Mittelwert : **m = 2,59**

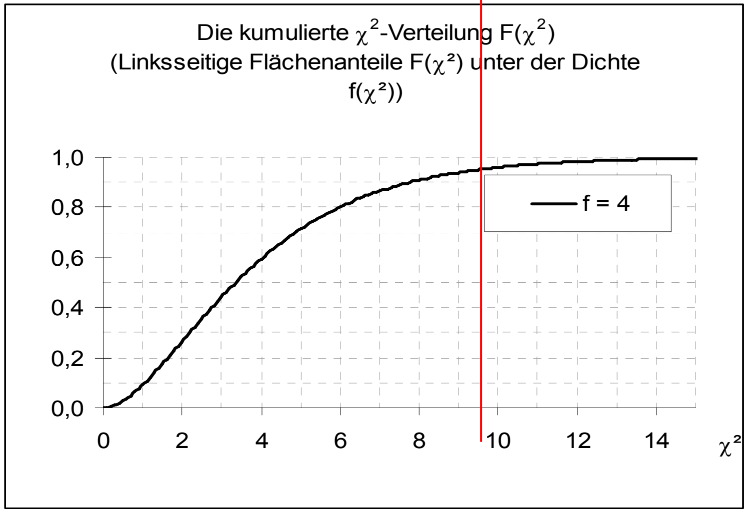
Wegen Poisson-Verteilung ist die Standardabweichung $s = \sqrt{m} = 1,61$

Zählwert	Häufigkeit	Klassennummer	Beobachtung	**Erwartung**
0	7	1	7	**7,5**
1	17	2	17	**19,4**
2	29	3	29	**25,2**
3	20	4	20	**21,7**
4	16	5	16	**14,1**
5	8	6	11	**12,1**
6	1			
7	2			
≥8	0			
Summe	100			

Dichte f(χ^2) der χ^2 Verteilung



Kumulierte χ^2 Verteilung = F(χ^2)



4.2 Freiheitsgrade – ein Beispiel

6 Klassen

2 Zwangsbedingungen: - Summe der Klassenhäufigkeiten (hier 100)

- Mittelwert der Poisson-Verteilung

Freiheitsgrade: ν = **6 - 2 = 4**

$$\chi_{\exp}^{2} = 1{,}4 \longrightarrow \boxed{\chi_{krit}^{2} = 9{,}5 \quad \geq \chi_{\exp}^{2}}$$

Damit ist Hypothese der Poisson-Verteilung gerechfertigt

4.3 Beispiel: Lottozahlen

Sind die gezogenen LOTTO-Zahlen gleichverteilt?

Zur Prüfung wurden die Zahlen aus 1 997 Ziehungen ausgewertet

1…7	247	250	252	236	249	250	234
8…14	227	255	237	236	243	190	238
15…21	238	234	255	247	260	238	272
22…28	255	233	228	249	258	247	217
29…35	231	237	255	284	252	225	242
36…42	252	246	266	248	246	247	254
43…49	244	228	233	254	230	257	275

Nullhypothese: Gleichverteilung mit $H_i = 244.53$

Prüfgröße: $\chi^2_{exp} = 46.77$ **Testgröße (95%, v=48) gesucht !**

Bestimmung der Testgröße aus der F(χ^2) -Tabelle

v	$F(x^2)$						
	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	Wahrscheinlichkeit
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83	
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82	
3	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27	
4	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47	
5	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51	
12	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91	
13	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53	
14	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12	
15	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70	
16	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25	
17	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79	
18	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31	
19	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82	
20	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	45,31	
30	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70	
40	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77	73,40	
50	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49	86,66	
60	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95	99,61	
70	85,53	90,53	95,02	100,43	104,21	112,32	
80	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32	124,84	
90	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30	137,21	
100	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17	149,45	

$$\chi^2\left(v = 48, P = 95\%\right) = 65$$

4.3 Beispiel: Lottozahlen

Sind die gezogenen LOTTO-Zahlen gleichverteilt?

Zur Prüfung wurden die Zahlen aus 1 997 Ziehungen ausgewertet

1…7	247	250	252	236	249	250	234
8…14	227	255	237	236	243	190	238
15…21	238	234	255	247	260	238	272
22…28	255	233	228	249	258	247	217
29…35	231	237	255	284	252	225	242
36…42	252	246	266	248	246	247	254
43…49	244	228	233	254	230	257	275

Nullhypothese: Gleichverteilung mit $H_i = 244.53$

Prüfgröße: $\chi^2_{st} = 46.77$ Testgröße (95%, v=48) $\chi^2_{0.95} = 65{,}0$

Wegen $\chi^2_{exp} \leq \chi^2_{0.95}$ **kann die Nullhypothese angenommen werden.**

4.3 Beispiel: Fahrspuren

Auf einer 4-spurigen Autobahn werden die Fahrzeuge pro Spur gezählt (n=1000).

Frage: Bevorzugen die Fahrer eine Fahrbahn?

Spur	1	2	3	4
Fahrzeuge	294	276	238	192

Nullhypothese : Die 1000 Fahrer bevorzugen **keine** Spur , d.h. P_i = ¼, H_i = 250

Prüfgröße:

$$\chi_{st}^2 = \frac{(294-250)^2}{250} + \frac{(276-250)^2}{250} + \frac{(238-250)^2}{250} + \frac{(192-250)^2}{250} = 24{,}48$$

Testgröße für: ν =3, P =! 95%

$$\chi_{Test}^{2}(3;95\%) = 7{,}8$$

Wegen $\chi_{Test}^2 \succ \chi_{0,95}^2$ wird die Nullhypothese mit 95% Sicherheit **abgelehnt .**

Literatur

- H.Gränicher, „Messung beendet – was nun?“, Teubner 1994
- .R.Spiegel, L.J.Stephens, Statistik, McCraw_Hill 1999
- T.Elser, Statistik für die Praxis, Wiley 2004
- L.Squires, Messergebnisse und ihre Auswertung, 1971
- J.Mandel, The statistical analysis of experimental data, 1984
- M.Drosg, Umgang mit Unsicherheiten, facultas 2006
- L.Kirkup, B.Frenkel, Uncertainty in Measurements, Cambridge 2006
- J.R.Taylor, Fehleranalyse VCH 1988

- DIN 1319, Teil 3 und 4 Messunsicherheiten
- DIN 55350, Teil 13 Messunsicherheiten