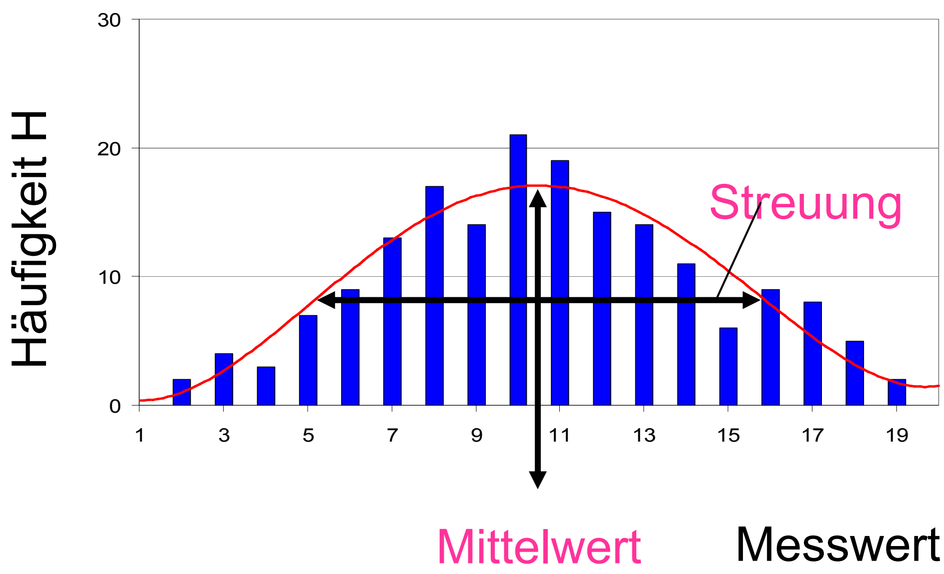
Auswertung von Messungen Teil II

1. Grundgesamtheit und Stichprobe



2 Aspekte:
Mit Grundgesamtheiten kann man gut rechnen.
Aber: In Wirklichkeit hat man aber nur wenige Messwerte = **Stichprobe**

Experiment	Theorie
$\overline{x}$	μ
$s = \sqrt{\dfrac{\sum (x - \overline{x})^2}{\boxed{n-1}}}$	$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (x - \mu)^2}{\boxed{n}}}$
$s^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$	$\sigma^2 = \overline{x^2} - \mu^2$

2. Grundgesamtheit - Modellverteilung
2.1 Normalverteilung

$$G(x, \sigma, \mu) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right)}$$

- Verteilung ist symmetrisch (zu x-μ)
- Parameter sind Mittelwert μ und Varianz σ
- einfache mathematische Behandlung ist möglich

2.1 Normalverteilung

Standardnormalverteilung

Normierung der Normalverteilung:

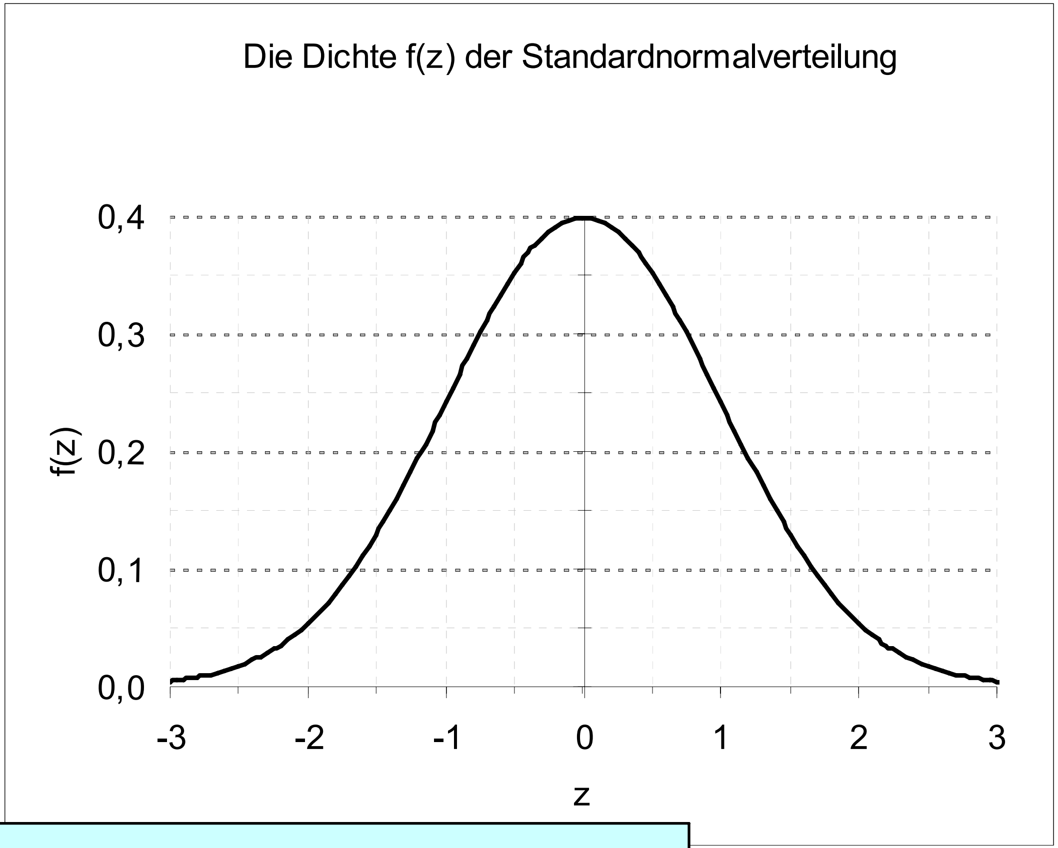
$$\boxed{z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Berechnung des Mittelwerts:

$$\boxed{\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\cdot dx}$$

2.1 Normalverteilung

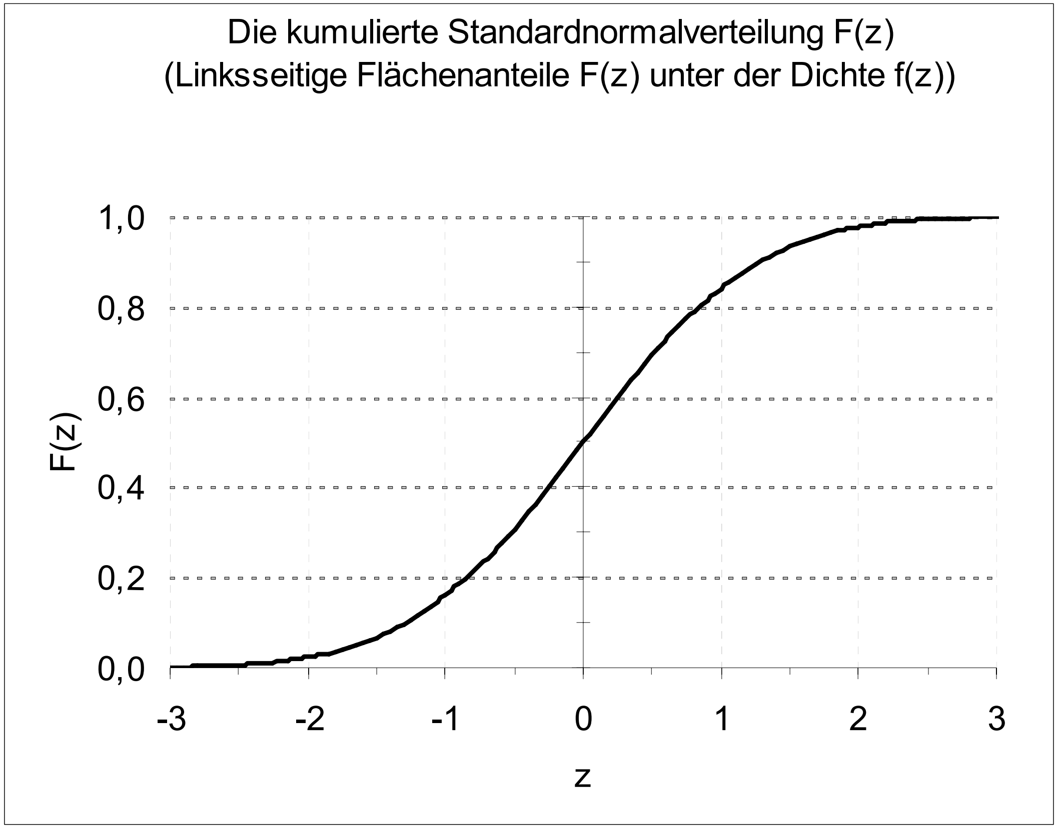


Einige typische Werte f(z) der Standardnormalverteilung						
-3	-2	-1	0	1	2	3
0,0044	0,0540	0,2420	0,3989	0,2420	0,0540	0,0044

2.1 Normalverteilung

Kumulierte Standardnormalverteilung F(z):
(**Gaußsches Fehlerintegral**)

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \cdot d\zeta$$



F(0) = ½

F(-z) = 1 - F(z)

F(z) - F(-z) = 1-2·F(-z)

F(z) ist tabelliert

Aber beachte!
error function erf(z)

$$erf(z) = \int_{0}^{z} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\zeta^2} \cdot d\zeta$$

2.1 Normalverteilung

Frage nach dem Anteil A einer Messgröße:

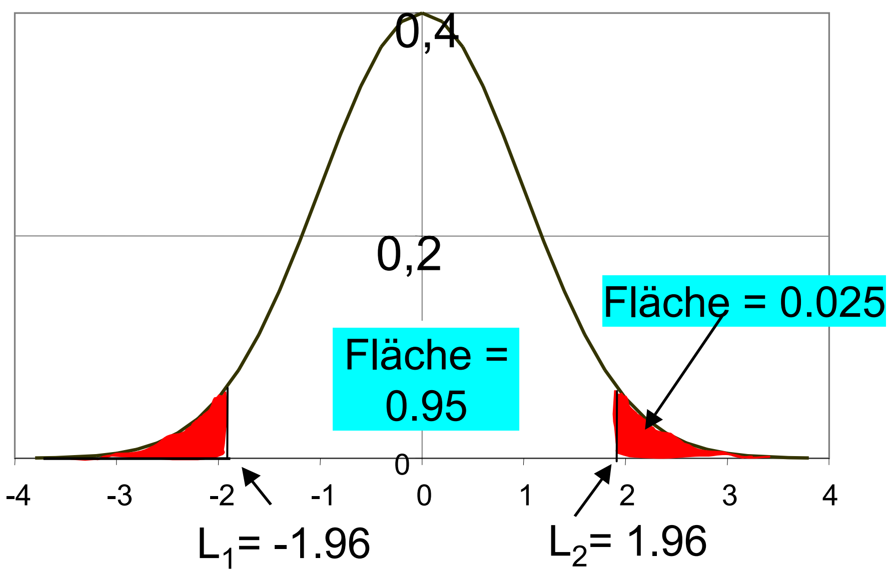
$z < L$	$A = F(L)$
$z > L$	$A = 1 - F(L)$
$L_1 < z < L_2$	$A = F(L_2) - F(L_1)$

zum Beispiel:

A soll 95% betragen!

$L_1 = -1{,}96$

$L_2 = 1{,}96$

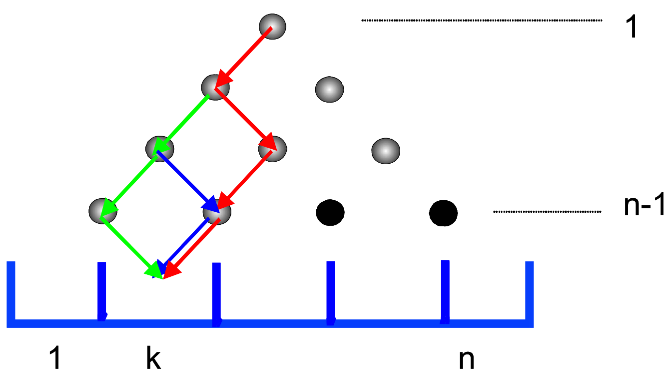


2.2 Binomialverteilung

Galton-Brett

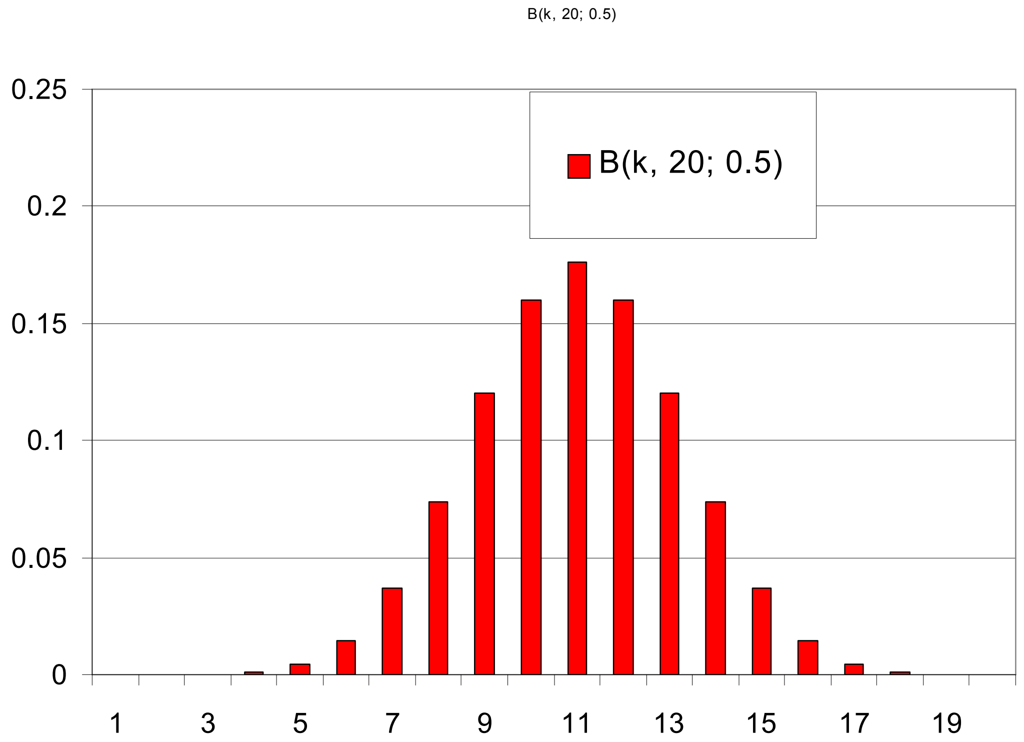
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit B dafür, eine Kugel im Kasten k zu finden, wenn es bei insgesamt n -1 Nagelreihen n Kästen gibt.

Die Wahrscheinlichkeit für Fall nach links soll p sein.



$$B(k,n;p)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

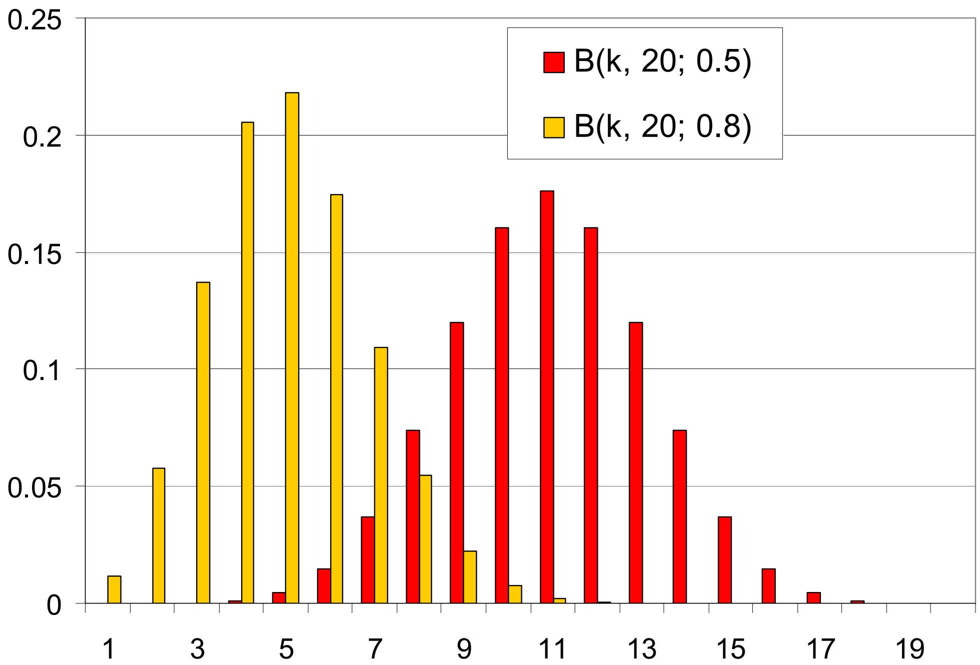
2.2 Binomialverteilung



Mittelwert: $\bar{k} = p \cdot n$

Varianz: $\sigma^2 = p \cdot (1 - p) \cdot n$

2.2 Binomialverteilung



Mittelwert: $\bar{k} = p \cdot n$

Varianz: $\sigma^2 = p \cdot (1 - p) \cdot n$

2.2 Binomialverteilung

Beispiel: Wurf mit einer fairen Münze

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit W für „2 x Kopf bei 6 Würfen“!

Mit k = 2, n = 6, p = ½ wird W = $B(k,n;p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$$W = B(2;6;0.5) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{15}{64}$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit W für „mindestens 4 x Kopf bei 6 Würfen“

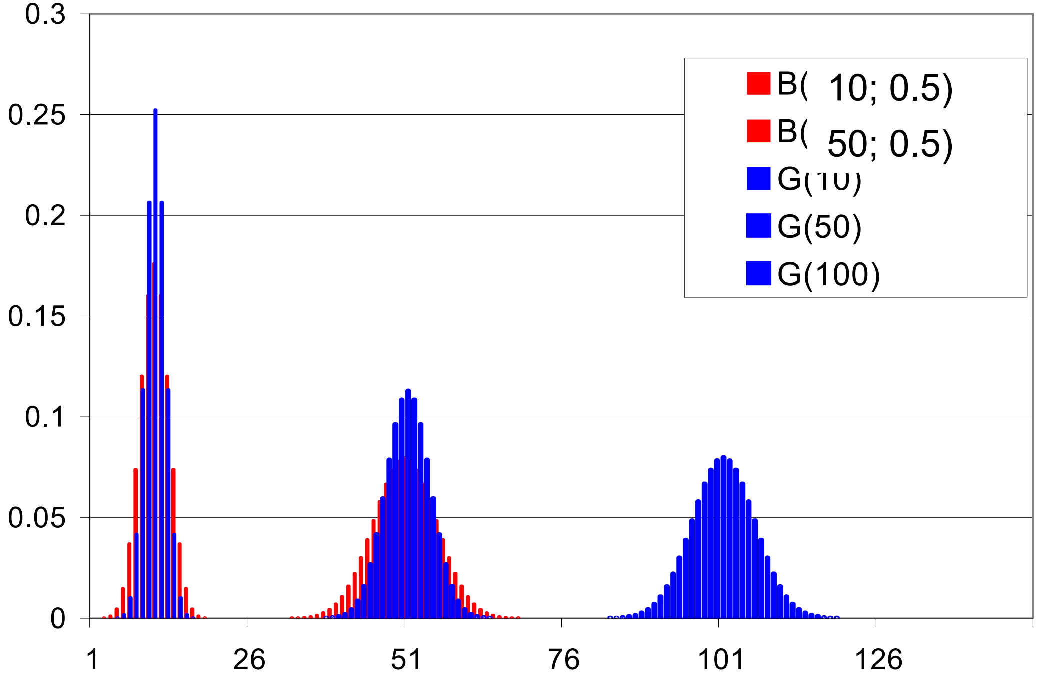
Mit k > 3, n = 6, p = ½ wird W:

$$W = \sum_{k=4}^{6} B(k;6;0.5) = \sum_{k=4}^{6} \binom{6}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{11}{32}$$

2.2 Binomialverteilung

Die Normalverteilung entsteht aus der Binomialverteilung, wenn **n sehr groß** wird.

$$G(k,\sigma,\mu) = \lim_{n \to \infty} B(k,n,p)$$



2.3 Poissonverteilung

Grenzfall der Binominalverteilung für den Fall von „selten auftretenden Ereignissen“, z.B.

- Telefonanrufe pro Zeit,
- Ausschussteile bei einer Großserie,
- radioaktiver Zerfall,
- Thermoemission von Elektronen

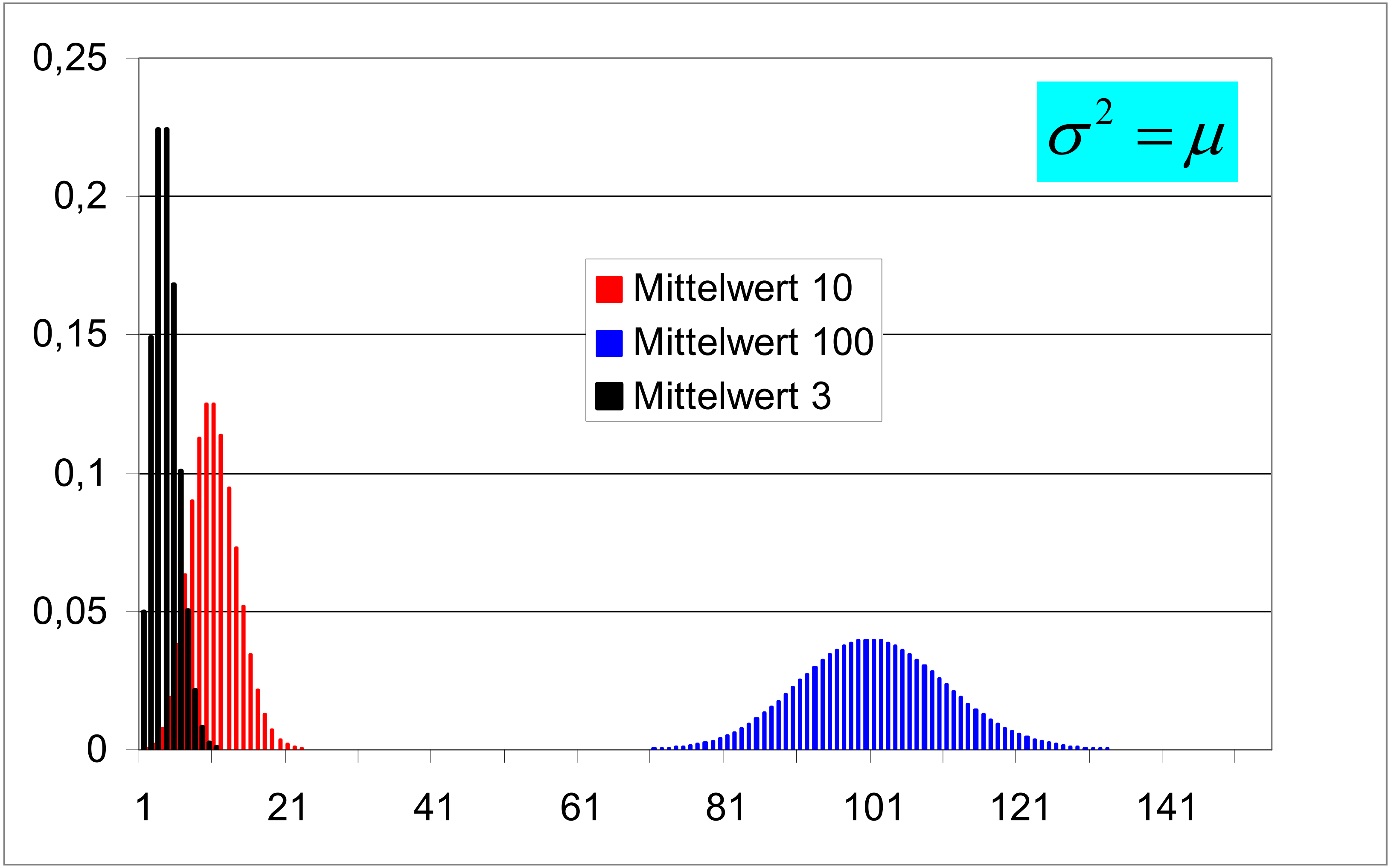
„selten“ heißt hier: n > 50 und n·p < 5

$$\mu = n \cdot p$$

$$P(k;\mu) = \lim_{\substack{p \to 0 \\ n \cdot p \to \mu}} B(k,n;p) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$$

$$\sigma^2 = \mu$$

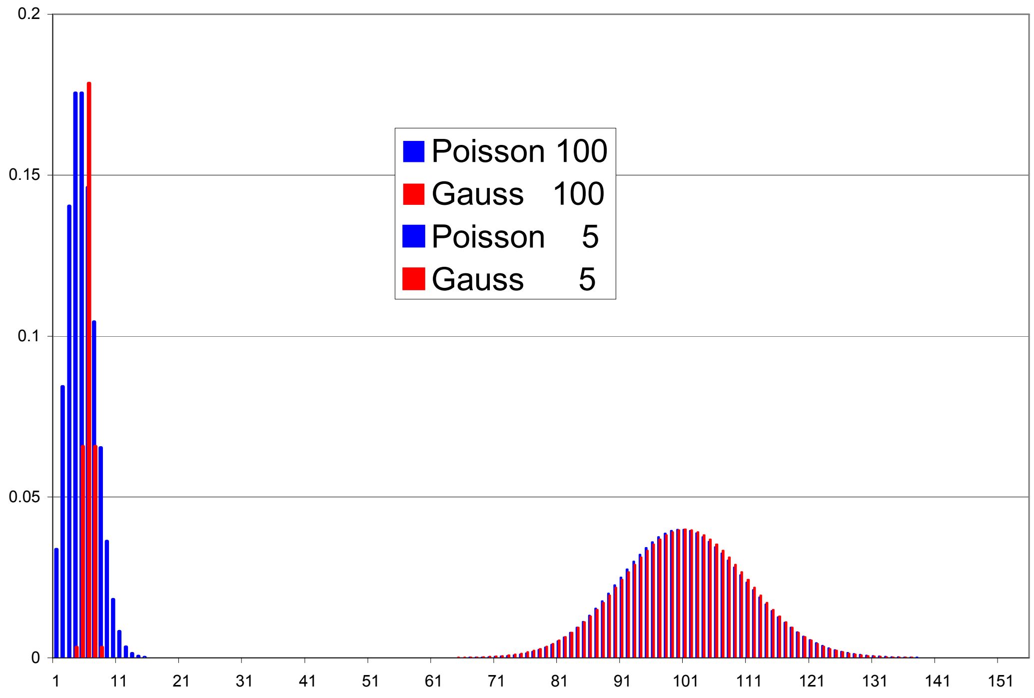
2.3 Poissonverteilung



2.3 Poissonverteilung

Die Normalverteilung entsteht aus der Poissonverteilung, wenn der **Mittelwert μ sehr groß** wird.

$$G(k,\sigma,\mu) = \lim_{\mu \to \infty} P(k,\mu)$$



2.4 Näherung von Binomial- und Poissonverteilung durch die Normalverteilung

$$G(x,\sigma,\mu) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right)}$$

Die 2 Parameter μ und σ der Normalverteilung ermöglichen es, dass unterschiedliche Modellverteilungen näherungsweise durch die Normalverteilung beschrieben werden können.

Binomialverteilung: $\sigma^2 = (1\text{-}p)\cdot\mu$

Poissonverteilung: $\sigma^2 = \mu$

3. Zentraler Grenzwertsatz

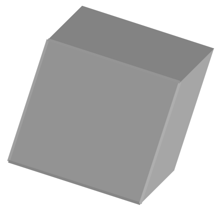
Fragestellung:

Wie sieht die Verteilung einer Größe aus, auf die verschiedene unabhängige Einflussgrößen einwirken, deren einzelne Verteilungsfunktion nicht bekannt ist?

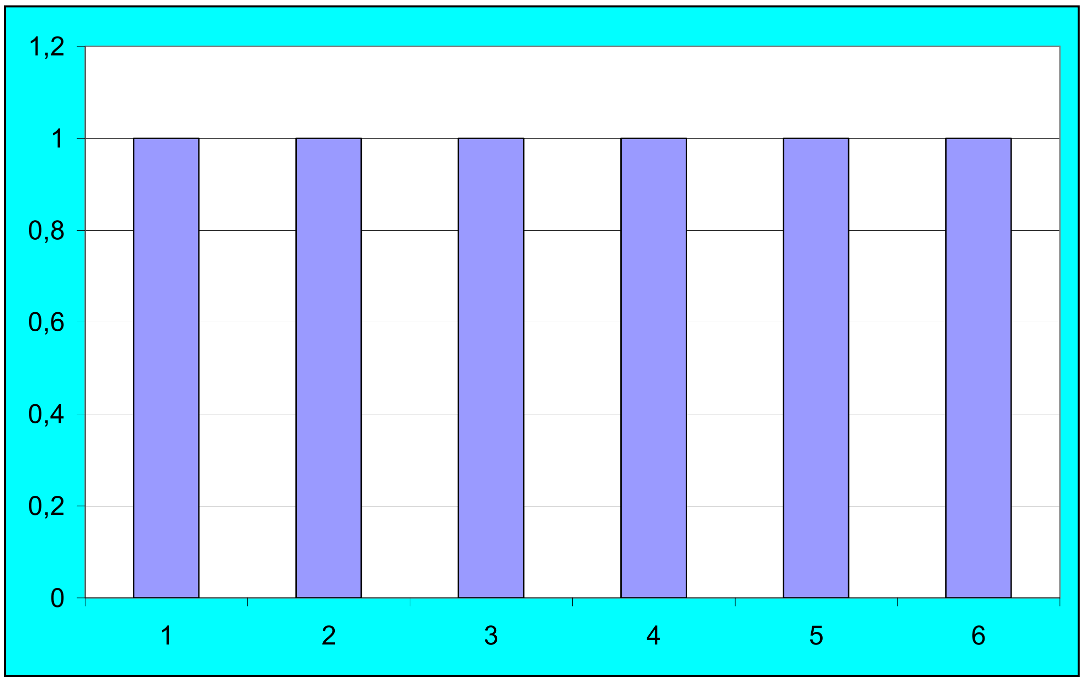
Als Beispiel betrachten wir die Verteilung der Augenzahlsumme beim Würfeln mit mehreren Würfeln

3. Zentraler Grenzwertsatz

1 Würfel:

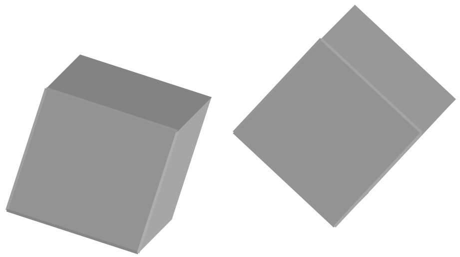


Kopfzahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	1	1	1	1	1	1

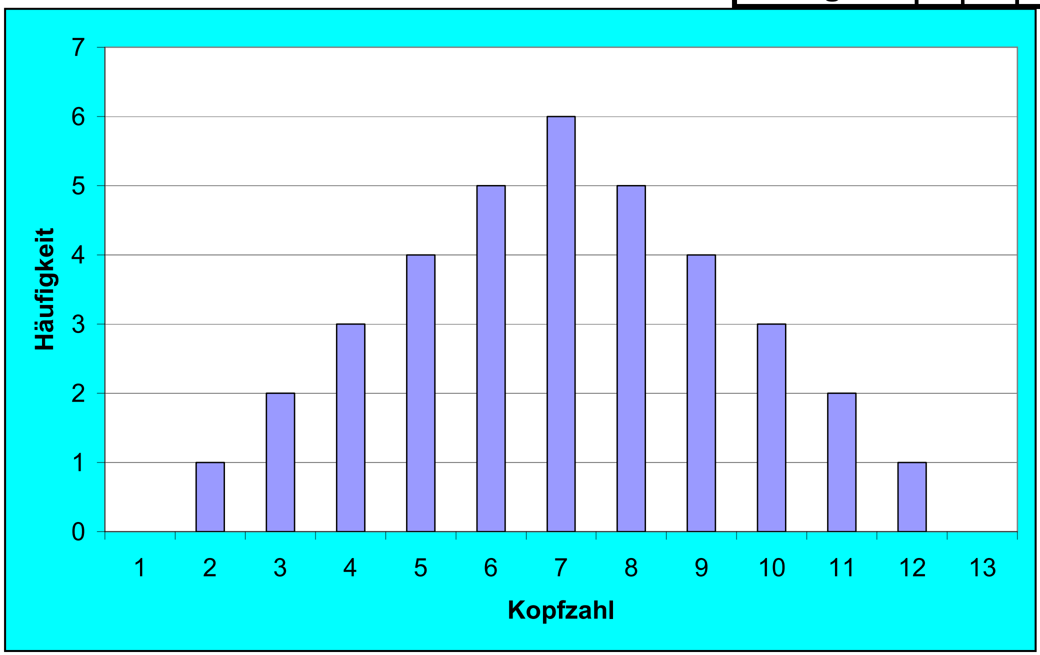


3. Zentraler Grenzwertsatz

2 Würfel:

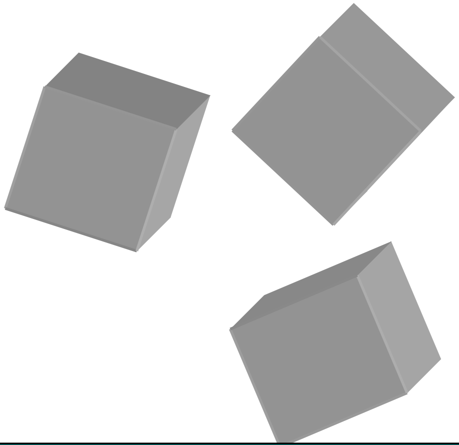


Kopfzahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	1	1	1	1	1	1						
		1	1	1	1	1	1					
			1	1	1	1	1	1				
				1	1	1	1	1	1			
					1	1	1	1	1	1		
						1	1	1	1	1	1	
Häufigkeit	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	

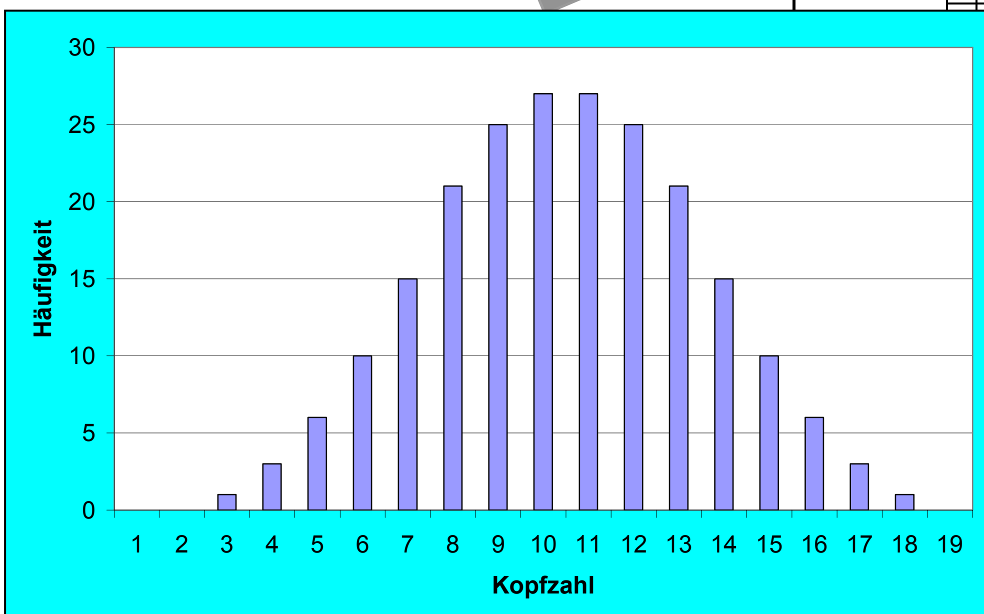


3. Zentraler Grenzwertsatz

3 Würfel:

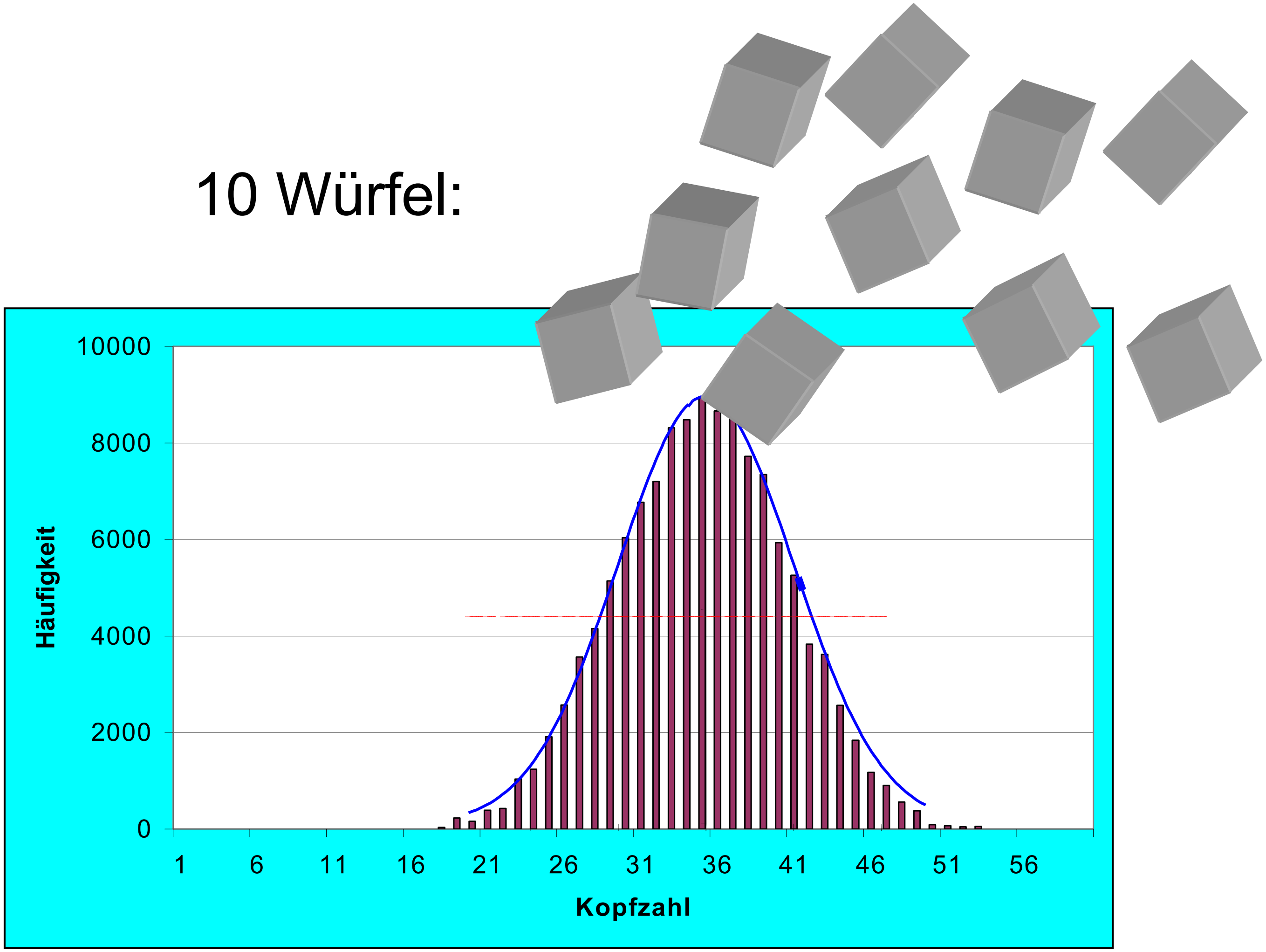


Kopfzahl	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	1	1	1	1	1	1										
		1	1	1	1	1	1									
			1	1	1	1	1	1								
				1	1	1	1	1	1							
					1	1	1	1	1	1						
						1	1	1	1	1	1					
		1	1	1	1	1	1									
			1	1	1	1	1	1								
				1	1	1	1	1	1							
					1	1	1	1	1	1						
						1	1	1	1	1	1					
							1	1	1	1	1	1				
			1	1	1	1	1	1								
				1	1	1	1	1	1							
					1	1	1	1	1	1						
						1	1	1	1	1	1					
							1	1	1	1	1	1				
								1	1	1	1	1	1			
				1	1	1	1	1	1							
					1	1	1	1	1	1						
						1	1	1	1	1	1					
							1	1	1	1	1	1				
								1	1	1	1	1	1			
									1	1	1	1	1	1		
					1	1	1	1	1	1						
						1	1	1	1	1	1					
							1	1	1	1	1	1				
								1	1	1	1	1	1			
									1	1	1	1	1	1		
										1	1	1	1	1	1	
						1	1	1	1	1	1					
							1	1	1	1	1	1				
								1	1	1	1	1	1			
									1	1	1	1	1	1		
										1	1	1	1	1	1	
											1	1	1	1	1	1
		3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1



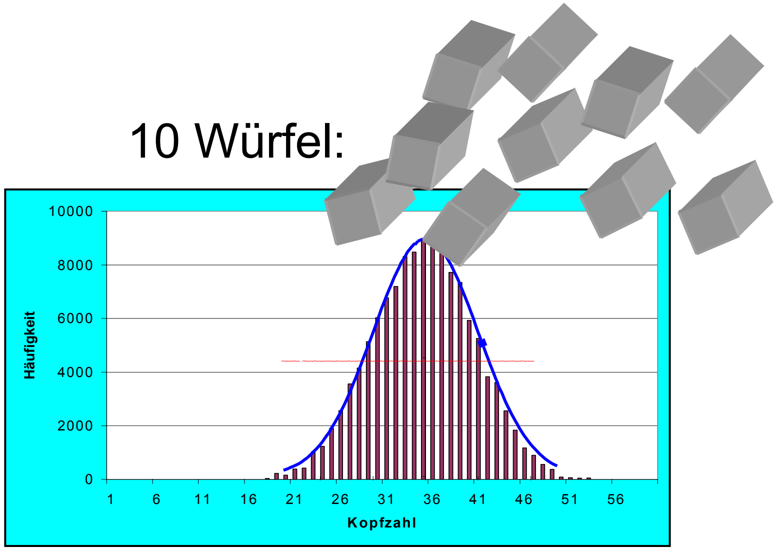
3. Zentraler Grenzwertsatz

10 Würfel:



3. Zentraler Grenzwertsatz

10 Würfel:



Ergebnis:

Obwohl die Augenzahl *eines Würfels gleichverteilt* ist, ist die Summe der Augenzahlen bei vielen *Würfeln annähernd normalverteilt*.

3. Zentraler Grenzwertsatz

Zentrale Grenzwertsatz:

Die Summe von (vielen) stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen ist annähernd normalverteilt.

Das heisst:
Für Stichproben von genügend großem Umfang n mit Mittelwert $\bar{x}$ und Varianz s^2 sind deren Mittelwerte normalverteilt mit der Varianz

$$s_{\bar{X}}^2 = \frac{s^2}{n}$$

ohne dass man etwas über die Verteilung von X voraussetzen muss
(n sollte nach einer groben Faustformel mindestens 30 sein)

4. Vertrauensbereich (Konfidenzintervall)

Frage: Wie gut (sicher) repräsentiert ein Stichprobenkennwert den Mittelwert oder die Varianz der Grundgesamtheit?

Die **Sicherheitswahrscheinlichkeit** wird durch die **Konfidenzzahl*) „1-α“** ausgedrückt.

Der mögliche Bereich der z-Werte heißt **Vertrauensbereich bzw. Konfidenzintervall.**

*) wir lernen später α als Signifikanzzahl kennen

Wir wollen mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit 1-α behaupten dürfen, dass der wahre Wert μ im Intervall

$$\bar{x} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \prec \mu \prec \bar{x} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

liegt. Also ist der Faktor „**t**“ zu finden!

4. Vertrauensbereich (Konfidenzintervall)

4.1 Gesucht ist der Vertrauensbereich für Mittelwert, wenn die Varianz σ der Messung bekannt ist

n Messwerte, Sicherheitswahrscheinlichkeit soll (1-α)·100% sein!

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

gesucht ist $z_{1-\alpha/2}$. Dieses kann aus der Tabelle F(z) abgelesen werden.

z,.B. 1-α = 0,95

$F(z_{1-\alpha/2}) - F(z_{-\alpha/2}) = 0,95 \longrightarrow z_{1-\alpha/2} = t = 1,96$

$$\boxed{\bar{x} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \prec \mu \prec \bar{x} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

4. Vertrauensbereich (Konfidenzintervall)

4.2 Gesucht ist Stichprobenumfang für vorgegebene Konfidenz 1-α

Bestimmung des Stichprobenumfangs, um ein vorgegebenes Konfidenzintervall zu erhalten:

Mit $z_{1-\alpha/2} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ findet man für die Anzahl notwendiger Messungen:

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\bar{x} - \mu} \right)^2$$

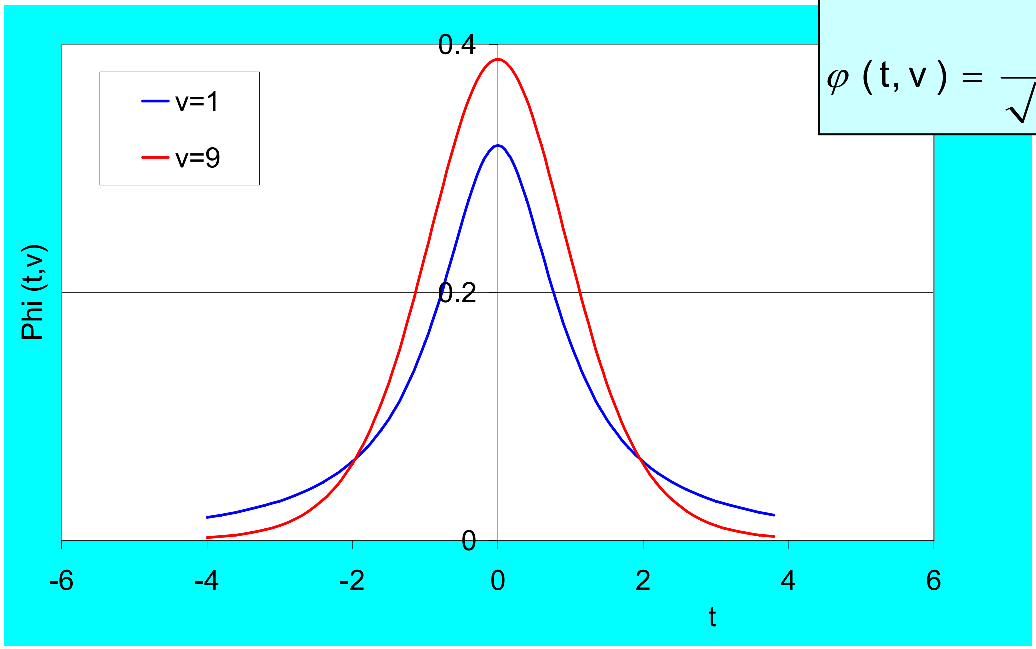
4. Vertrauensbereich (Konfidenzintervall)

4.3 Gesucht ist Vertrauensbereich für Mittelwert, wenn die Varianz σ **nicht** bekannt ist (sondern aus Messwerten berechnet werden muss)

Anstelle von $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ kennt man jetzt $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$

z ist normalverteilt, t hingegen folgt der **STUDENT-Verteilung**:

$$\varphi(t, v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi \cdot v} \cdot \Gamma(v/2) \cdot (1 + t^2/v)^{(v+1)/2}}$$



Freiheitgrade $v = n - 1$

Achtung:
Sowohl die **t-Verteilung** als auch die **kumulierte t-Verteilung** hängen vom Parameter v ab!

Beide Funktionen sind tabelliert.

4.4 Grenzwerte der Studentverteilung

Freiheits-grade f	Kumulierte Studentverteilung: Flächen F(t)					
	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	318,29
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	22,33
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	10,21
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	5,89
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85	3,55
100	1,29	1,66	1,98	2,36	2,63	3,17
200	1,29	1,65	1,97	2,35	2,60	3,13
10000	1,28	1,65	1,96	2,33	2,58	3,09

$1-\alpha/2$

4.5 Beispiel zu 4.3:

Für die Außendurchmesser von PVC-Rohren liegen unten stehende folgend Stichprobenwerte vor:

Durchmesser von PVC-Rohren [mm]									
44,4	44,2	44,3	44,2	44,6	44,4	44,7	44,3	44,5	43,9

Berechnen Sie Vertrauensintervalle für den Mittelwert dieser Stichprobe.

Lösung:

$\bar{x}$	44,350 mm
n	10
s	0,2273 mm
f	9

Vertrauensbereiche VB für den Mittelwert			
$1-\alpha$	0,9	0,95	0,99
α	0,1	0,05	0,01
$\alpha/2$	0,05	0,025	0,005
$1-\alpha/2$	0,95	0,975	0,995
$t_{\alpha/2}$			
$t_{1-\alpha/2}$			
a			
X-a			
X+a			

9 Freiheitsgrade

4.4 Grenzwerte der Studentverteilung

Freiheits-grade f	Flächen F(t)					
	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	318,29
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	22,33
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	10,21
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	5,89
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85	3,55
100	1,29	1,66	1,98	2,36	2,63	3,17
200	1,29	1,65	1,97	2,35	2,60	3,13
10000	1,28	1,65	1,96	2,33	2,58	3,09

$1-\alpha/2$

4.5 Beispiel zu 4.3:

Für die Außendurchmesser von PVC-Rohren liegen unten stehende folgend Stichprobenwerte vor:

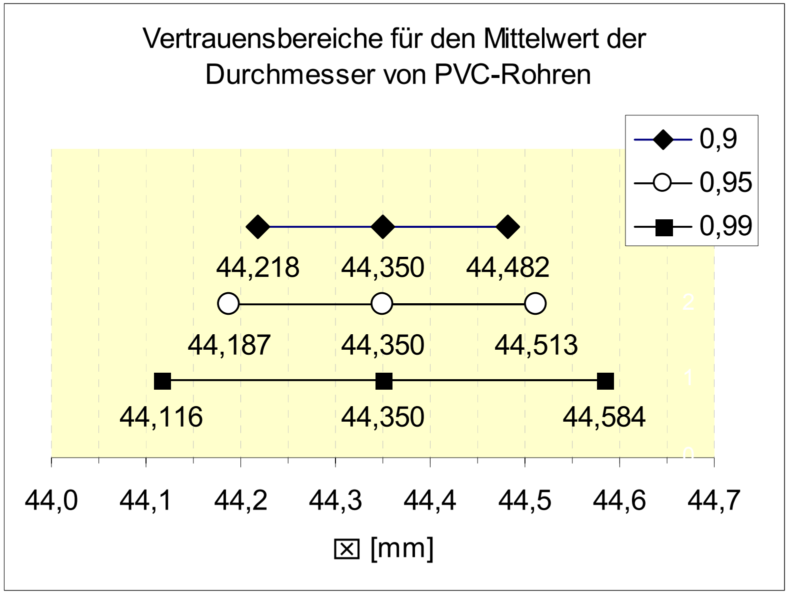
Durchmesser von PVC-Rohren [mm]									
44,4	44,2	44,3	44,2	44,6	44,4	44,7	44,3	44,5	43,9

Berechnen Sie Vertrauensintervalle für den Mittelwert dieser Stichprobe.

Lösung:

$\bar{x}$	44,350 mm
n	10
s	0,2273 mm
f	9

Vertrauensbereiche VB für den Mittelwert			
$1-\alpha$	0,9	0,95	0,99
α	0,1	0,05	0,01
$\alpha/2$	0,05	0,025	0,005
$1-\alpha/2$	0,95	0,975	0,995
$t_{\alpha/2}$	-1,83	-2,26	-3,250
$t_{1-\alpha/2}$	1,83	2,26	3,250
a	0,132	0,163	0,234
x-a	44,22	44,19	44,12
x+a	44,48	44,51	44,58



Literatur

- H.Gränicher, „Messung beendet – was nun?“, Teubner 1994
- .R.Spiegel, L.J.Stephens, Statistik, McCraw_Hill 1999
- T.Elser, Statistik für die Praxis, Wiley 2004
- L.Squires, Meßergebnisse und ihre Auswertung, 1971
- J.Mandel, The statistical analysis of experimental data, 1984
- M.Drosg, Umgang mit Unsicherheiten, facultas 2006
- L.Kirkup, B.Frenkel, Uncertainty in Measurements, Cambridge 2006
- J.R.Taylor, Fehleranalyse VCH 1988

- DIN 1319, Teil 3 und 4 Messunsicherheiten
- DIN 55350, Teil 13 Messunsicherheiten