Auswertung von Messungen
Teil I

1. Ergebnisdarstellung

Beispiel: - Aufnahme einer Weg-Zeit-Messung : t – x oder x(t)

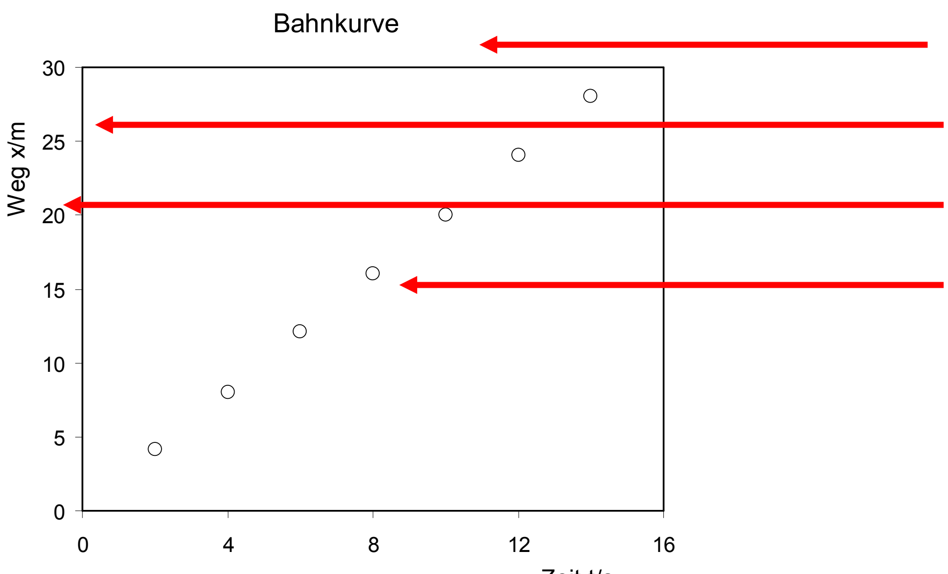
- Darstellung als Wertetabelle:

t/s	x/m	V/ ms^{-1}
2	0.01	0.005
4	0.02	0.005
8	0.16	0.02

Resultat: Maßzahl · Einheit z.B. v = 22 m/s

Achtung: SI-Einheiten m, kg, s, A, K, cd, mol

- Grafische Darstellung



2. Rechnen mit Messwerten

L = 72 cm, t = 13.3 s $\longrightarrow$ $v = \frac{L}{t}$ = 0.054135559... m/s

Beachte die Messabweichungen: ΔL = 1 mm, Δt = 0.1 s

$\frac{72,1}{13,2}$

L = (72,0 ±0,1) cm   t = (13,3 ± 0,1) s

v_{min} = cm/s = **0.05**3 656 71.. m/s

$\frac{71,9}{13,4}$ v_{max} = cm/s = **0.05**4 621 21.. m/s

$\Delta v = \frac{1}{2} (v_{max} - v_{min}) \cong$ 0.000 482 24.. m/s

Formales Ergebnis: v = (0.054 135 559.. ± 0.000 482 24..) m/s

Wie viele Stellen darf das Ergebnis haben?

In nichts zeigt sich der Mangel an mathematischer Ausbildung mehr als an einer übertrieben genauen Rechnung

(C.F.Gauß)

Beachte:

Jedes Messergebnis ist mit einer Messunsicherheit behaftet, die damit die signifikanten Stellen bestimmt!

Beispiel: Messung mit dem Zollstock L = 135,3 cm
Messunsicherheit 1 mm

Die Anzahl der Ziffern eines Ergebnisses wird durch die ***signifikanten*** *Stellen* gekennzeichnet!

Signifikante Stellen

Bei jeder Ergebnisangabe sollte die letzte signifikante Stelle des Ergebnisses *an der gleichen* Dezimalstelle stehen wie die *letzte signifikante Stelle* der Meßunsicherheit.

v = (0.054 135 559 ± 0.000 5) m/s

also: v = (0.054 1 ± 0.000 5) m/s

Beispiele:

92.819 4 ± 0.32 → 92.82 ± 0.32

0.003 421 6 ± 0.000 22 → $(3.42 \pm 0.22)\cdot 10^{-3}$

Was bedeutet das?

Ohne ergänzende Informationen: bei einer Einzelmessung erhält man mit 68% Wahrscheinlichkeit einen Meßwert zwischen $(3.42 - 0.22)\cdot 10^{-3}$ und $(3.42 + 0.22)\cdot 10^{-3}$

Der Aussagewert von Messwerten wird durch die signifikanten Stellen (oder Ziffern) bestimmt.

Zahl	**signifikante Stellen**
156.4	4
4.5300	5
$0.0018 = 1.8 \cdot 10^{-3}$	2
$0.001800 = 1.800 \cdot 10^{-3}$	4

Multiplikation, Division, Radizieren: signifikante Stellen des Resultats sind durch Zahl mit den wenigsten signifikanten Ziffern gegeben

Beispiel: $48.0 \cdot 943 = 45\,264 = 45.3 \cdot 10^3$

Addition, Subtraktion: Das Endergebnis hat nach dem Komma so viele signifikante Stellen wie die Zahl mit den wenigsten signifikanten Stellen.

Beispiel: $3.16 + 2.7 = 5.86 = 5.9$

3. Linearisierung

Das Auge kann nur die Gerade und den Kreis als geometrische Elemente eindeutig identifizieren.

$$Y = A \cdot X + B$$

Wichtige Funktionsverläufe können in Geradengleichungen überführt werden:

Potenzfunktion: $y = B \cdot x^{A} \quad \rightarrow \quad \ln y = A \cdot \ln x + \ln B$

doppelt-geteiltes logarithmisches Papier

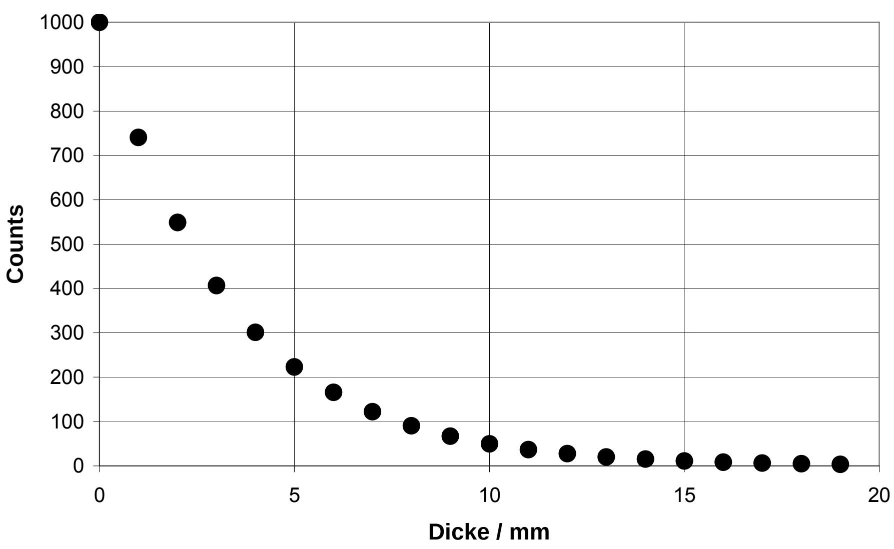
Exponentialfunktion: $y = B \cdot e^{A \cdot X} \quad \rightarrow \quad \ln y = A \cdot x + \ln B$

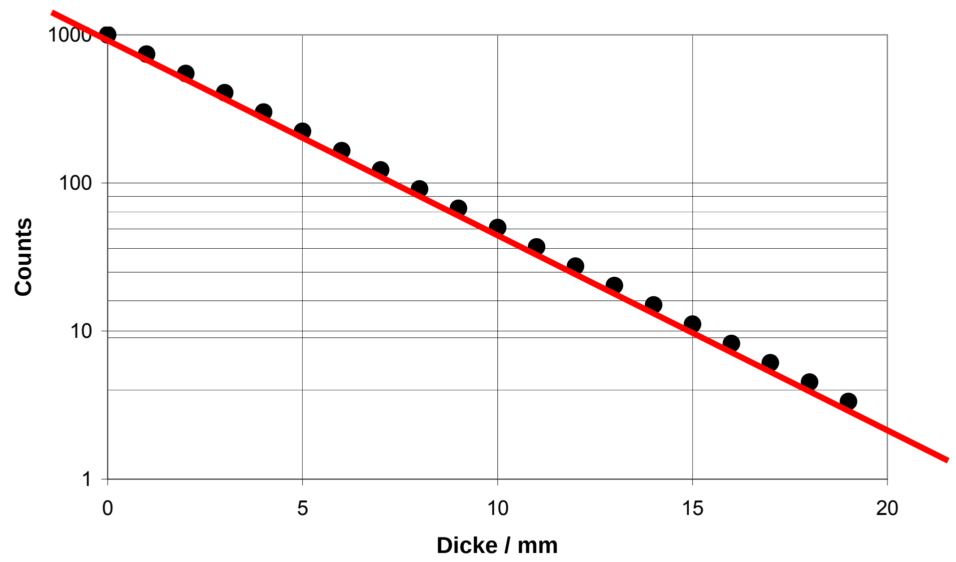
einfach-geteiltes logarithmisches Papier

Exponentialgesetze

$$y = B \cdot e^{A \cdot X} \qquad \rightarrow \qquad \ln y = A \cdot x + \ln B$$

Beispiel: radioaktiver Zerfall $\quad N = N_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$



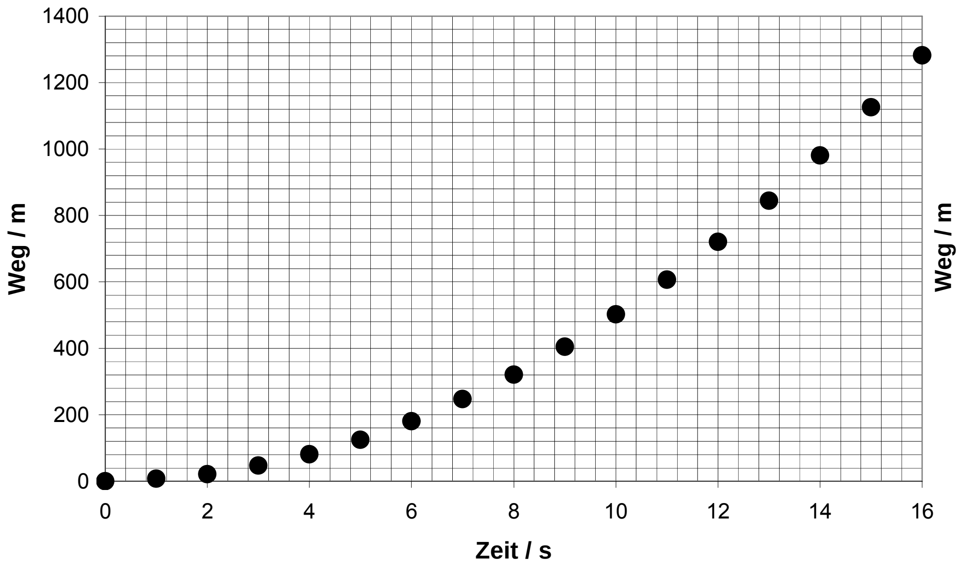


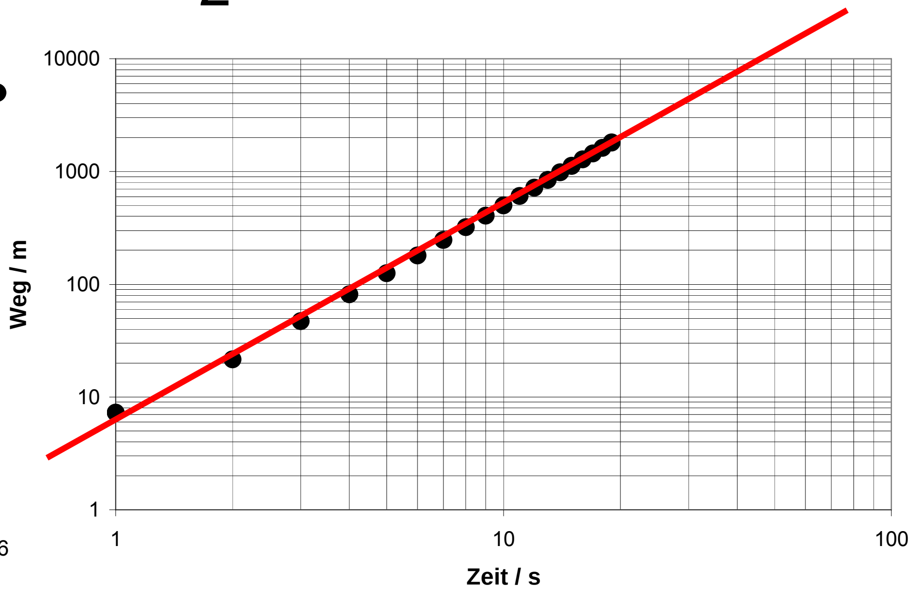
Einfach-logarithmische
Darstellung

Potenzgesetze

$$y = B \cdot x^A \qquad \rightarrow \qquad \ln y = A \cdot \ln x + \ln B$$

Beispiel: freier Fall $\qquad s = \frac{g}{2} \cdot t^2$

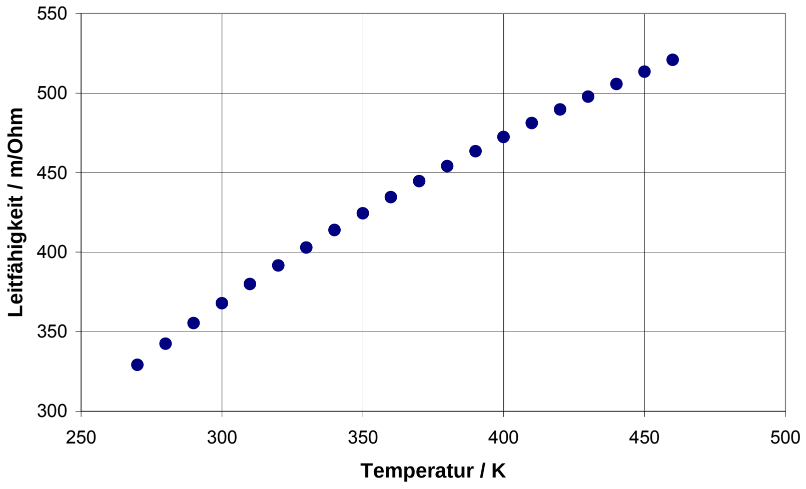


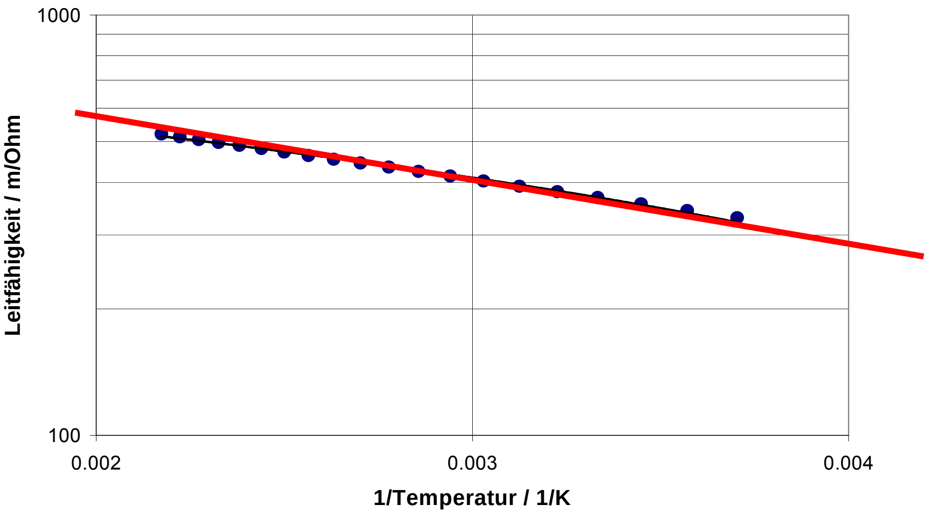


Doppelt-logarithmische Darstellung

Darstellung von e $^{const / T}$

Beispiel: elektrische Leitfähigkeit im Halbleiter $\sigma(T) = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E}{2kT}}$

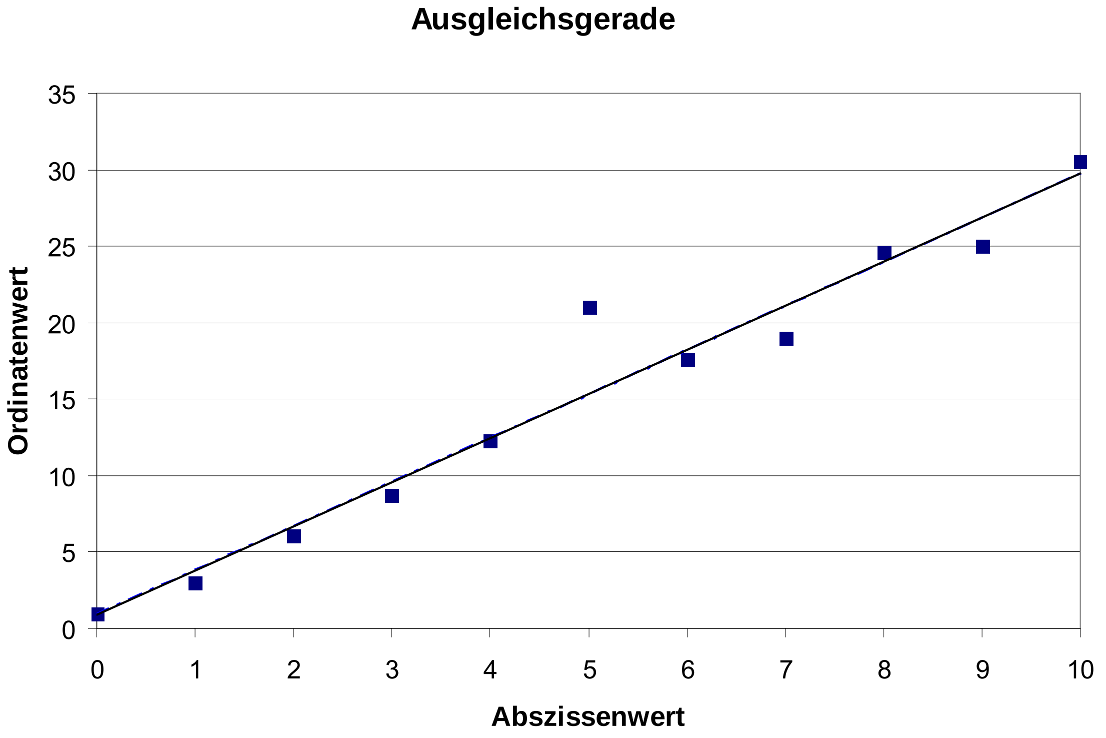


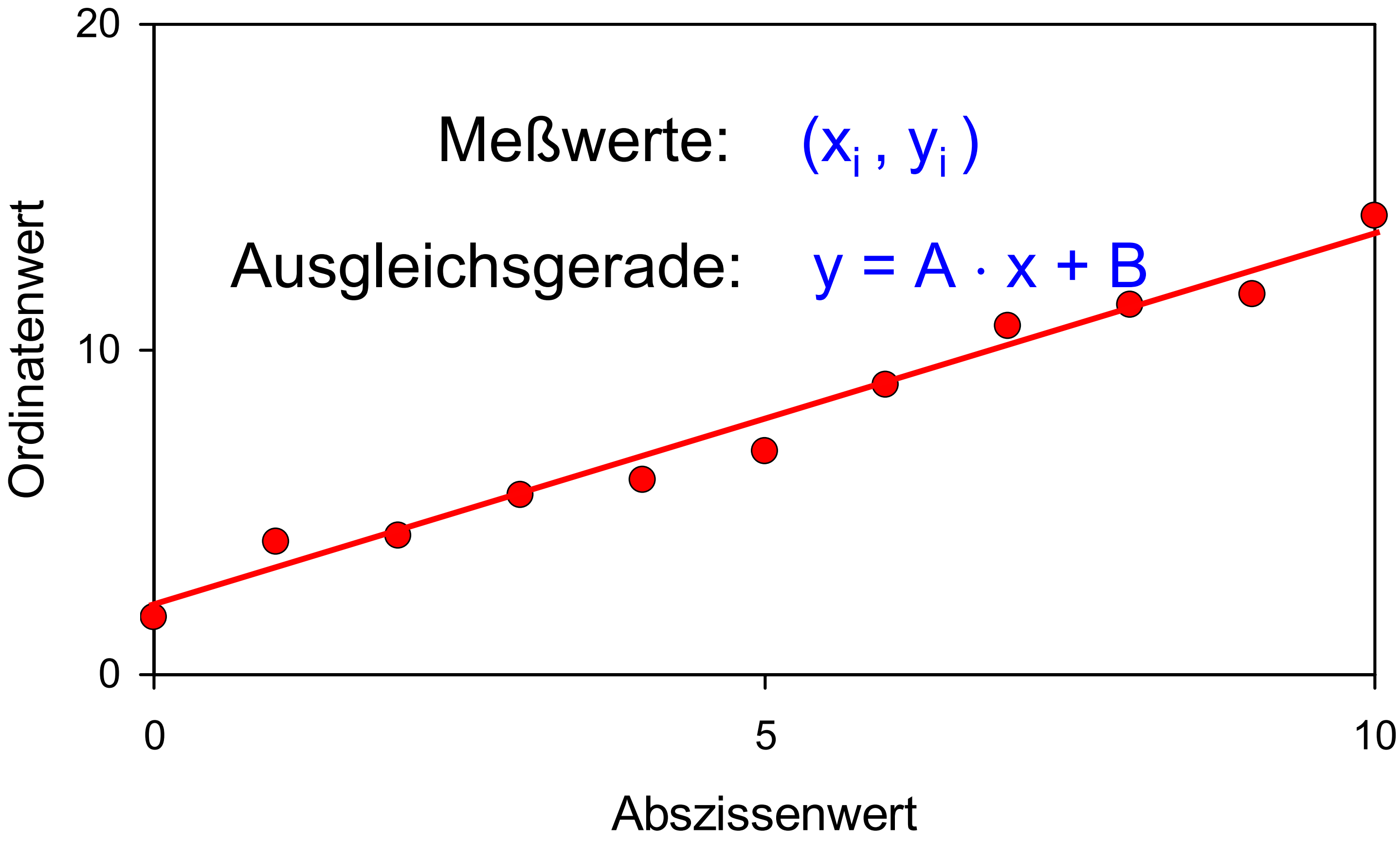


4. Ausgleichsgerade - lineare Regression

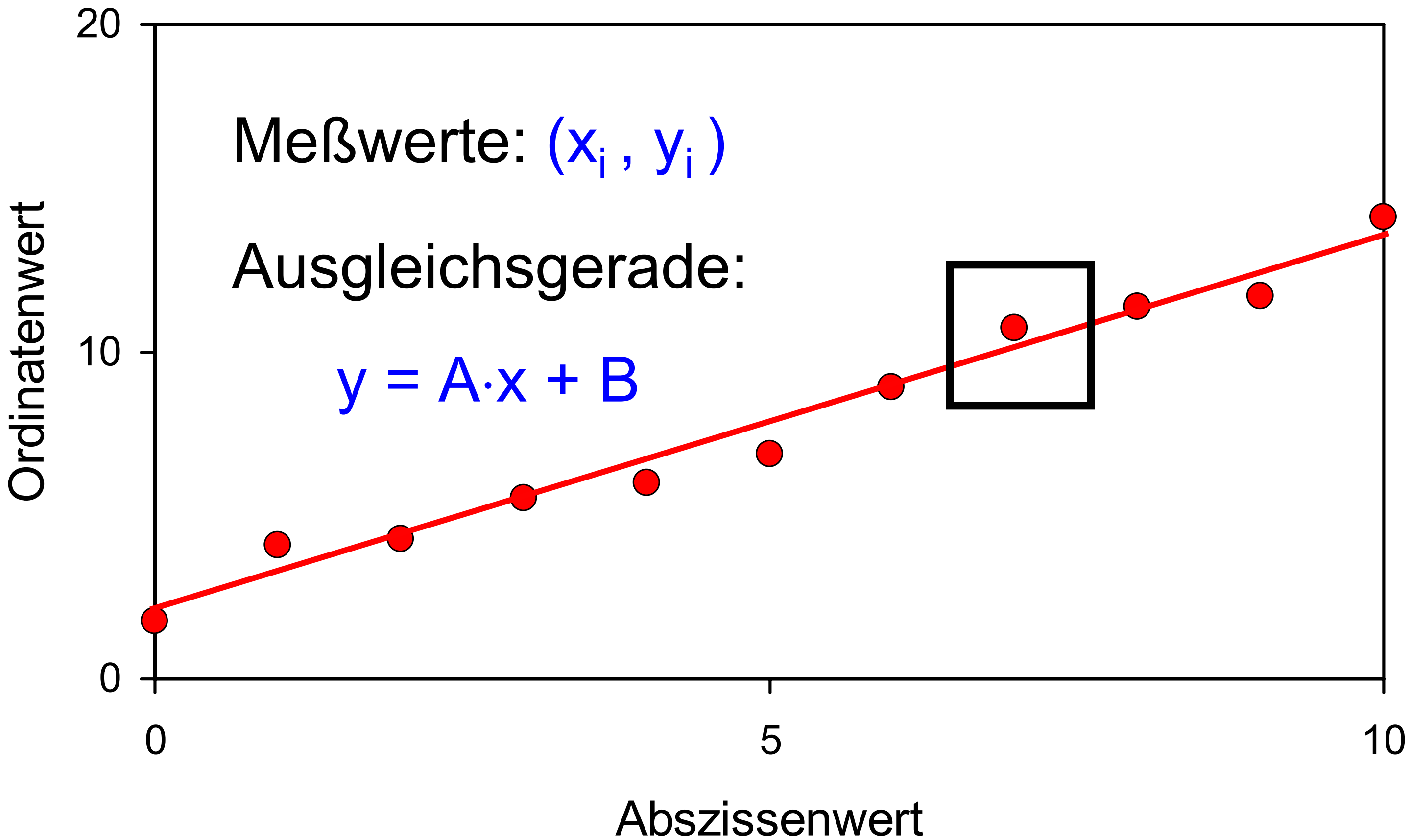
Problem: Messwerte streuen infolge Messabweichungen um eine Gerade.

Gesucht ist diejenige Gerade, die den Messwerten am besten entspricht :

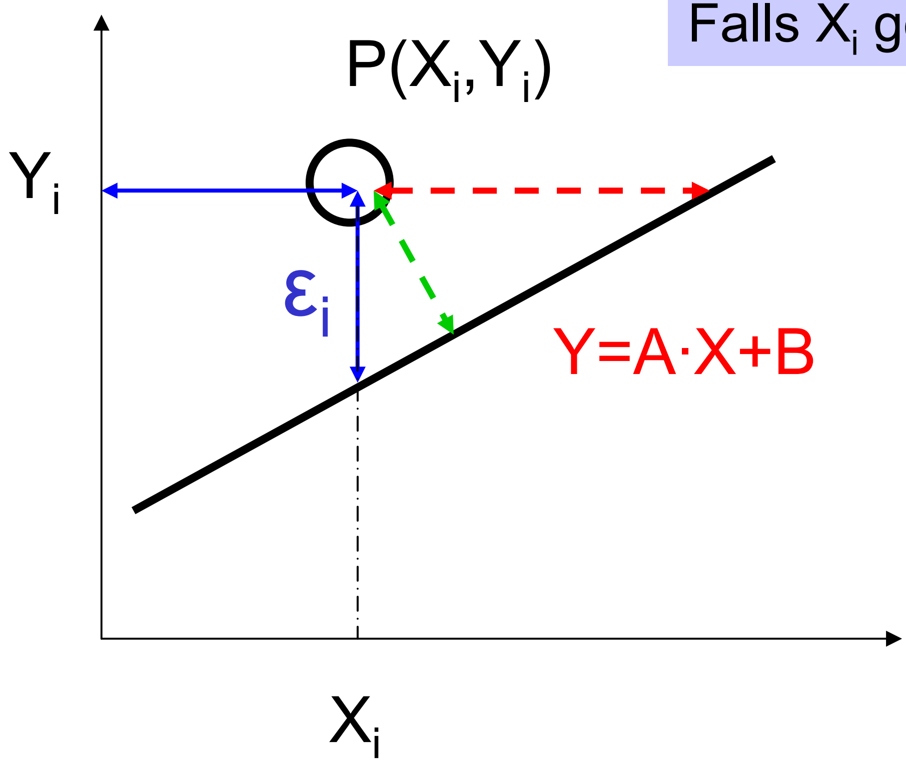




Idee: A und B so wählen, daß die Abweichungen der Meßwerte von der Ausgleichsgeraden minimal werden >>> *(Methode der kleinsten Quadrate)*



$\sum$ (Abweichungen)^2 = Minimum



Falls X_i genauer als Y_i gemessen wurde:

$$Y_i = A \cdot X_i + B - \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i = A \cdot X_i + B - Y_i$$

$$\sum \varepsilon_i^2 = \text{Minimum}$$

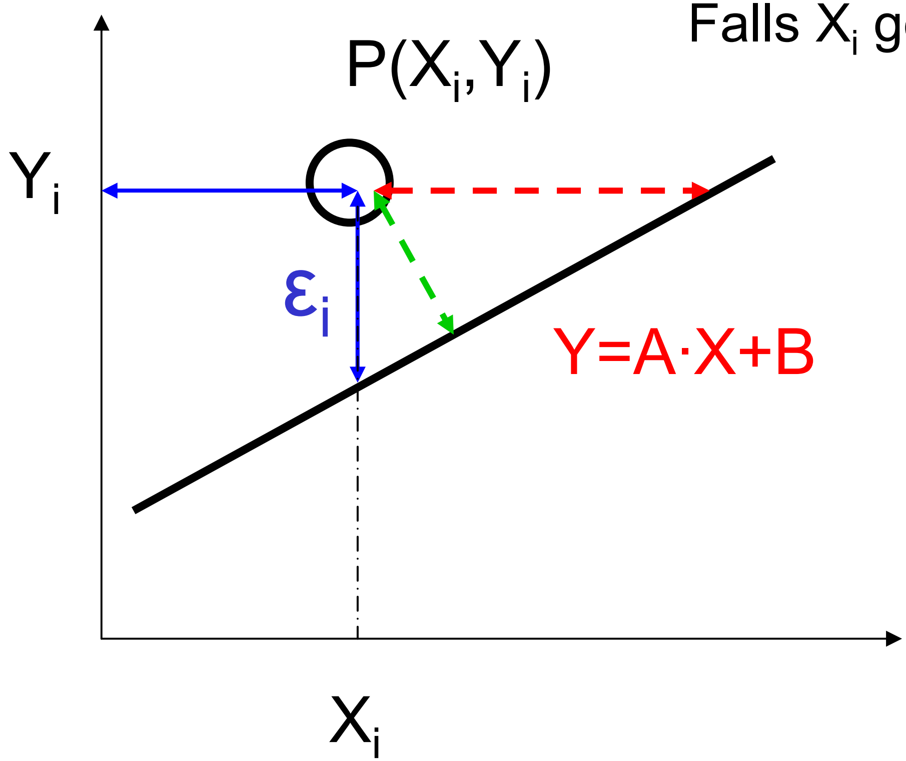
$$\varepsilon_i = f\,(A,B)$$

$$\longrightarrow$$

$$\partial\left(\sum \varepsilon_i^2\right)/\partial A = 0\ !$$

$$\partial\left(\sum \varepsilon_i^2\right)/\partial B = 0\ !$$

Auflösung der beiden Gleichungen nach den 2 Unbekannten A und B. Einführung der Mittelwerte x und y sowie der Varianz Q_{xx} und Kovarianz Q_{xy} .



Falls X_i genauer als Y_i gemessen wurde:

$$Y_i = A \cdot X_i + B - \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i = A \cdot X_i + B - Y_i$$

$$\sum \varepsilon_i^2 = \text{Minimum}$$

$$\varepsilon_i = f(A,B)$$

$$\longrightarrow$$

$$\partial \left(\sum \varepsilon_i^2\right)/\partial A = 0\ !$$

$$\partial \left(\sum \varepsilon_i^2\right)/\partial B = 0\ !$$

$$A = \frac{Q_{xy}}{Q_{xx}}$$

$$B = \bar{y} - A \cdot \bar{x}$$

$$Q_{xx} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

$$Q_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right) \cdot \left(y_i - \bar{y}\right)$$

5. Messabweichungen

Messabweichung = Messwert - wahrer Wert

DIN 1319-1

Systematische Messabweichungen :

- bei Wiederholung der Messung reproduzierbar

- schwer erkennbar - aber korrigierbar
  - z.B. Anzeigefehler, Schlupf, Spannungsabfall ..

Zufällige Messabweichungen, (auch: statistische M.a.):

- können positiv und negativ sein („streuen“)
- Häufigkeit nimmt mit der Größe ab

…. die Normenarbeit geht weiter: INC-1 (1980)

Nicht mehr Unterteilung in systematische und zufällige Messabweichungen mehr sondern in:

Standardunsicherheit vom Typ A:

bei Wiederholmessung

$$u_x = S_{\overline{X}}$$

Standardunsicherheit vom Typ B:

wissenschaftliche Beurteilung aller Informationen über die mögliche Streuung der Messgrößen:

Fehlergrenzen, Herstellerangaben, ………

Dann Annahmen über den Verteilungstyp,

Angabe der kombinierten Standardunsicherheit (Quadratisches Fortpflanzungsgesetz)

Wiederholmessungen

Zur genauen Bestimmung der Meßgröße y wird die Messung mehrfach wiederholt: $\longrightarrow$ Meßwerte y_i mit i = 1..n

Aus der **Messstatistik** der y_i (= Stichprobe) können der Mittelwert $\bar{y}$ und die empirische Standardabweichung s bestimmt werden.

S^2 heißt empirische Varianz der Stichprobe.

Indirekte Messungen

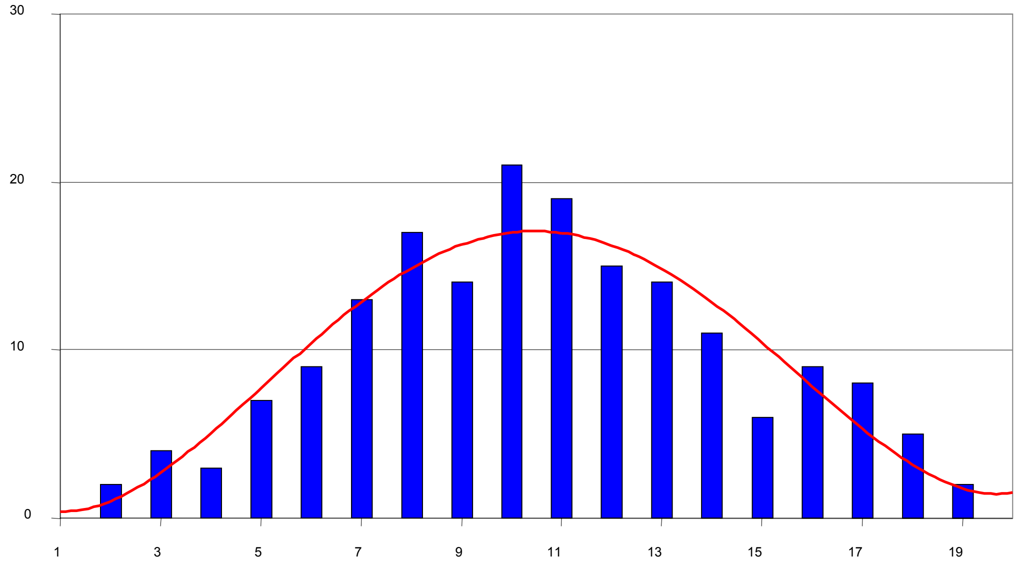
Die Meßgröße y hängt in bekannter Weise von mehreren Meßwerten x_i ab: $y = f\,(x_1, x_2, ..\, x_m)$.

Die Meßunsicherheit von y wird durch **Fortpflanzungsgesetze** beschrieben (linear oder quadratisch).

6. Häufigkeitsverteilungen

Ursachen der *Zufälligkeit*:
- statistisch
- nichtlinear
- unvorhersehbar

Häufigkeitsverteilung der Messwerte ist darstellbar als Histogramm

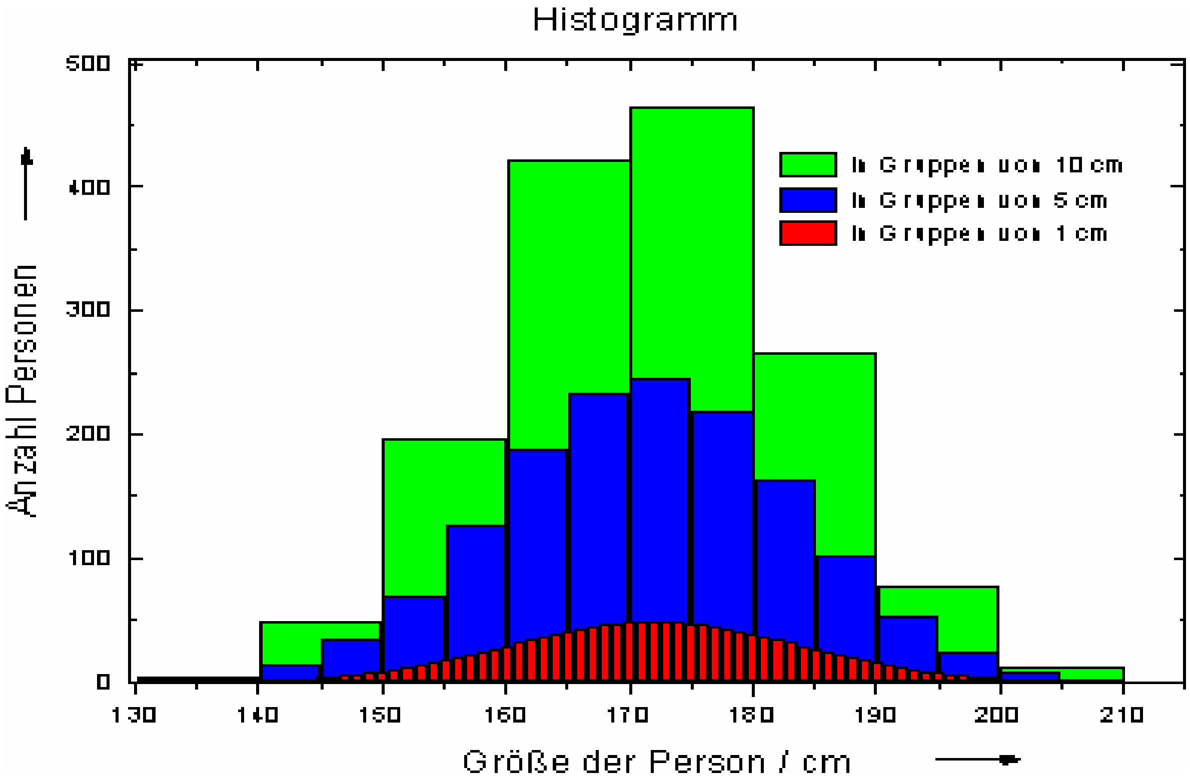


Histogramm bei unterschiedlichen Intervallgrössen

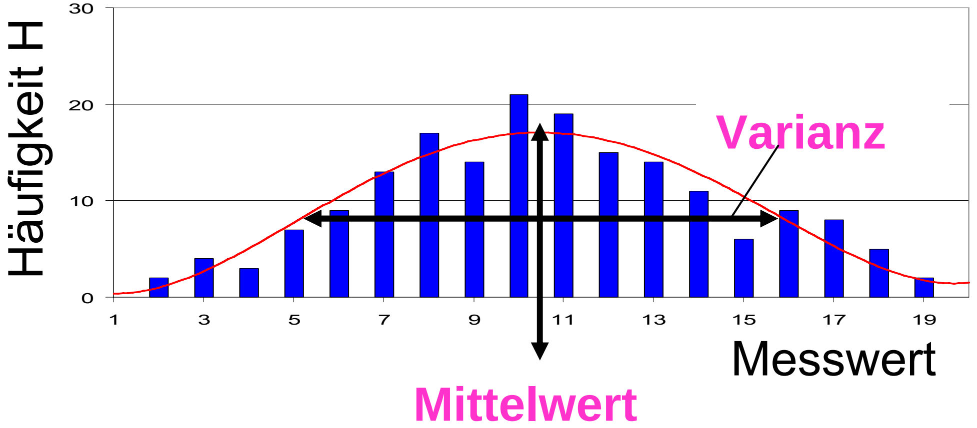
Anzahl der Ergebnisse n

Anzahl der Intervalle K

$$K = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{für} \quad n \le 1000 \\ 10 \cdot \lg n & \text{für} \quad n \ge 1000 \end{cases}$$



Lageparameter der Häufigkeitsverteilung



Verteilungsfunktion durch **Mittelwert** und Dispersionsgröße (z.B. **Varianz s^2**) charakterisieren

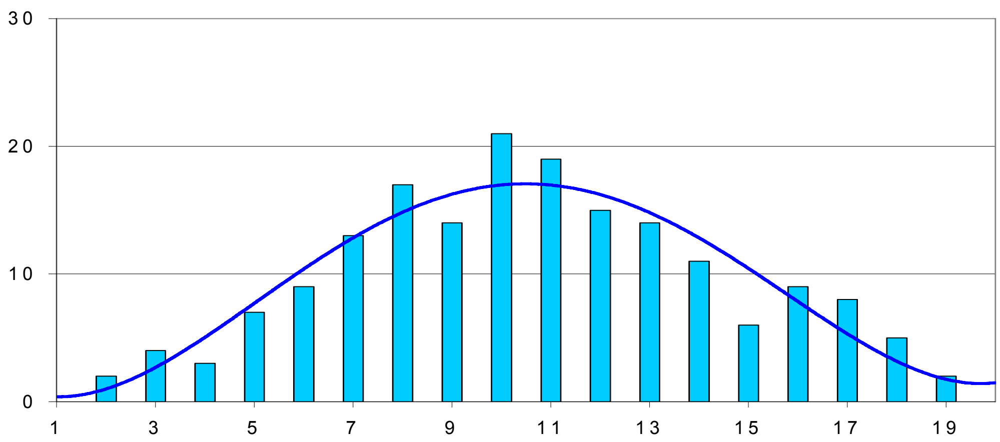
$$S^2(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{K} H_j \cdot \left(x_j - \overline{x}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}$$

Varianz bezüglich eines anderen Wertes B

$$S^2(B) = S^2(\overline{x}) + \left(B - \overline{x}\right)^2$$

Experiment - Theorie

Stichprobe i ⟷ Grundgesamtheit, Modellverteilung



Experiment	Theorie
$\overline{x}$	μ
$s = \sqrt{\dfrac{\sum (x - \overline{x})^2}{\boxed{n-1}}}$	$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (x - \mu)^2}{\boxed{n}}}$
$s^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$	$\sigma^2 = \overline{x^2} - \mu^2$

Mittelwerte

Meßwerte $\{y_i\}$

Mittelwerte - arithmetisch: $\bar{y} = \frac{\sum_{1}^{N} y_i}{N}$

- geometrisch: $\bar{y} = \sqrt[n]{y_1 y_2 .. y_n}$

- quadratisch : $\bar{y} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

- Median : steht in der Mitte

Warum wird der arithmetische Mittelwert bevorzugt?

Eigenschaften des arithmetischen Mittelwerts

- Summe aller Fehler verschwindet: $$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}) = 0$$

- Summe der Fehlerquadrate ist minimal: $$\frac{\partial}{\partial \overline{y}} \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = 0$$

Standardabweichung = Breite der Messwertverteilung um Mittelwert

= Wurzel aus Varianz

Standardabweichung s: $$s = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}[y_i - \overline{y}]^2}{n-1}}$$

Betrachtung von mehreren Stichproben.

Wie breit ist die Verteilung der Mittelwerte?

Hierzu folgt ein simuliertes Beispiel

Gemessen wird die Gesamtaugenzahl X von 5 Würfeln, jeweils gemittelt über n =100 Würfe

Einzelmessungen der Stichprobe:	Mittelung über alle Stichproben:
$\overline{X_i}$ $\qquad$ S_x	$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_n \overline{X}_i$ $\qquad$ $S_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$

Mittelwert	Standardabweichung
16,95	4,18
16,91	4,1
17	3,43
17,42	3,45
18,2	3,9
17,14	3,74
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
17,49	4

Mittelwert	Standardabweichung
17,47	0,39

Mittelwert und Standardabweichung der **Stichprobe**

Mittelwert und Standardabweichung des **Mittelwerts**

Schlußfolgerungen für die Streuung der Mittelwerte

- 1 Meßreihe liefert die Messwerte x_j, aus denen der Mittelwert $\overline{X_i}$ und die Streuung s_i der Messwerte um den Mittelwert berechnet werden.
- Die Mittelwerte $\overline{X_i}$ vieler Messreihen verteilen sich mit der Streuung $S_{\overline{X}}$ um den wahrscheinlichsten Mittelwert $\overline{X}$.

Es gilt bei Messreihe mit Stichprobenumfang n für die Standardabweichung des Mittelwerts (= Standardunsicherheit):

$$\boxed{s_{\overline{\mathrm{X}}} = \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

7. Fortpflanzung von Messabweichungen
7.1 systematische Messabweichungen

Gesucht ist eine obere Schranke ΔZ
für die Messunsicherheit der indirekt gemessenen Größe Z,
die aus mehreren unsicheren Einzelgrößen bestimmt wird !

$$Z = f(X,Y) \qquad \Delta Z = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right) \cdot \Delta X + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right) \cdot \Delta Y$$

$$Z = X \pm Y \qquad \Delta Z = \Delta X + \Delta Y$$

$$Z = X \cdot Y \qquad \Delta Z / Z = \Delta X / X + \Delta Y / Y$$

Im Praktikum werden gewöhnlich die Meßabweichungen mit 1..2 signifikanten Ziffern angegeben.

7.2 zufällige Messabweichungen (Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz)

- $Z = f\,(X,Y)$
- Unkorrelierte und zufällige Messabweichungen bei X und Y
- Standardabweichungen s_X und s_Y

Gesucht ist die wahrscheinlichste Standardabweichung von Z!

$Z = f\,(X,Y)$ bekannt: s_X, s_Y gesucht: s_Z

$$s_{\overline{Z}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{\overline{X}}^{2} \cdot s_{\overline{X}}^{\;2} + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_{\overline{Y}}^{2} \cdot s_{\overline{Y}}^{\;2}}$$

s_Z wird nach DIN 1319 kombinierte Standardunsicherheit genannt

Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$s_{\overline{Z}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{\overline{X}}^{2} \cdot s_{\overline{X}}^{2} + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_{\overline{Y}}^{2} \cdot s_{\overline{Y}}^{2}}$$

$Z = X + Y$	$s_Z^2 = s_X^2 + s_Y^2$
$Z = X \cdot Y$	$\left(\frac{s_{\overline{Z}}}{\overline{\overline{Z}}}\right)^2 = \left(\frac{s_{\overline{X}}}{\overline{\overline{X}}}\right)^2 + \left(\frac{s_{\overline{Y}}}{\overline{\overline{Y}}}\right)^2$
$Z = x^n$	$s_Z = s_X \cdot n$
$Z = \ln X$	$s_Z = s_X / X$
$Z = e^X$	$s_Z = s_X \cdot Z$

1. Beispiel für Fehlerfortpflanzung
(zufällige Meßabweichungen)

Messung von g mit einem einfachen Pendel $g = g(l,T) = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot l}{T^2}$

Abschätzung der Messunsicherheit: $\frac{\delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + \left(2\frac{\delta T}{T}\right)^2}$

$$mit \quad \frac{\delta l}{l} = 0{,}1\% \quad und \quad \frac{\delta T}{T} = 0{,}4\%$$

$$wird: \quad \frac{\delta g}{g} = 0{,}4\%$$

2. Beispiel für Fehlerfortpflanzung
(zufällige Meßabweichungen)

Bestimmung der Dichte von Luft : $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m_1 - m_2}{V}$

V = 16.73 ± 0.21 cm^3
m_1 = 10.3420 ± 0.0020 g
m_2 = 10.3210 ± 0.0020 g

Abschätzung der Messunsicherheit:

$$\frac{s_{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{s_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{s_V}{V}\right)^2} = \sqrt{\frac{s_{m_1}^2 + s_{m_2}^2}{m^2} + \left(\frac{s_V}{V}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{0.0020^2 + 0.0020^2}{0.021^2} + \left(\frac{0.21}{16.73}\right)^2} \approx \sqrt{\frac{2}{100} + (0.013)^2} \approx 0.14$$

also: $\boxed{\dfrac{s_{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} = 0.14}$

8. Genauigkeit der linearen Regression

$Y = A \cdot X + B$ gegeben: σ_Y mit $\sigma_Y^2 = \frac{1}{N-2}\sum (Y_i - A\cdot X_i - B)^2$

8.1 gesucht: σ_A , σ_B, $\sigma_A^2 = \sum\left(\frac{\partial A}{\partial Y_i}\cdot\sigma_Y\right)^2$ $\sigma_B^2 = \sum\left(\frac{\partial B}{\partial Y_i}\cdot\sigma_Y\right)^2$

z.B. für σ_B :

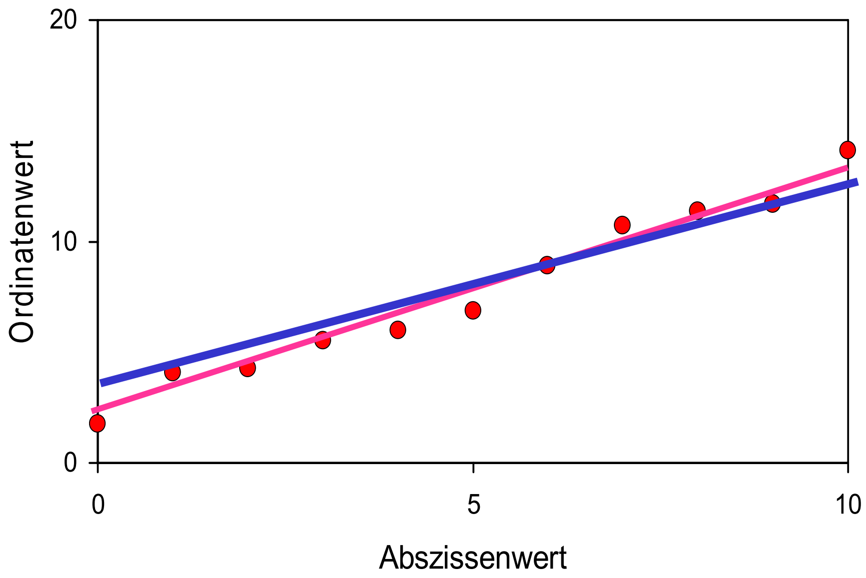
$$B = \frac{\sum X^2 \cdot \left(Y_1 + \ldots Y_j + ..\right) - \sum X \cdot \left(X_1 Y_1 + .. X_j Y_j\right)}{Nenner}$$

$$\frac{\partial B}{\partial Y_j} = \frac{\sum X^2 - X_j \cdot \sum X}{Nenner} \qquad \sum_j\left(\frac{\partial B}{\partial Y_j}\right)^2 = \frac{N\cdot\left(\sum X^2\right)^2 - \sum X^2 \cdot \left(\sum X\right)^2}{Nenner^2} = \frac{\sum X^2}{Nenner}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{\sigma_Y^2 \cdot \sum X_i^2}{N \cdot \sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2} \qquad \sigma_A^2 = \frac{N \cdot \sigma_Y^2}{N \cdot \sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2}$$

8. Genauigkeit der linearen Regression

8.2 Was bedeutet der Korrelationskoeffizient?



Vertikale Abweichungen minimiert:

$$y = A \cdot x + B$$

Horizontale Abweichungen minimiert

$$x = A' \cdot y + B'$$

Bestimmtheitsmaß $R^2 = A \cdot A'$

Korrelationskoeffizient R

$$R^2 = \frac{Q_{xy}^2}{Q_{xx} \cdot Q_{yy}}$$

Anhang

- Literatur
- Bestimmung der Standardunsicherheit
- Ablaufschema zur Bestimmung der Messunsicherheit einer direkt gemessenen Größe
- Beispiel: Fadenpendel mit großer Auslenkung

Literatur

- H.Gränicher, „Messung beendet – was nun?“, Teubner 1994
- .R.Spiegel, L.J.Stephens, Statistik, McCraw_Hill 1999
- T.Elser, Statistik für die Praxis, Wiley 2004
- L.Squires, Messergebnisse und ihre Auswertung, 1971
- J.Mandel, The statistical analysis of experimental data, 1984
- M.Drosg, Umgang mit Unsicherheiten, facultas 2006
- L.Kirkup, B.Frenkel, Uncertainty in Measurements, Cambridge 2006
- J.R.Taylor, Fehleranalyse VCH 1988

- DIN 1319, Teil 3 und 4 Messunsicherheiten
- DIN 55350, Teil 13 Messunsicherheiten