Erderwärmung zum Nachrechnen

Ausgehend von einigen wenigen grundlegenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten, werden wir eine einfache theoretische Beschreibung des Energiehaushalts der Erde und damit ihrer Temperatur erarbeiten. Aus dieser folgt, dass die Erdtemperatur mit steigender Konzentration der sogenannten Treibhausgase steigt. Einsteigen werden wir mit einigen historischen Notizen, die für sich bereits aufschlussreich sind.

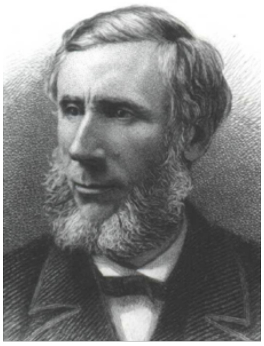
1 Historisches

Joseph Fourier ist uns v.a. als herausragender Mathematiker bekannt. Als seine größte Leistung gilt die Fourieranalyse und, eng damit verwandt, die Fouriertransformation, mit der man Differentialgleichungen lösen kann. Interessanterweise hat sie Fourier entwickelt, um die Diffusion der Wärme (Wärmeleitung) berechnen zu können. Schon damals war nämlich die Frage – damals allerdings nur eine akademische Frage – was die Temperatur der Erdoberfläche bestimmt. Zur Diskussion stand die Erwärmung aufgrund des heißen Erdkerns, die Sonnenstrahlung und merkwürdigerweise auch die Strahlung von anderen Himmelskörpern. Fourier fand zutreffend heraus, dass die Wärmeleitung aus dem Erdinnern jedenfalls keine Rolle spielt.

Joseph Fourier
1768 - 1830

Die zur sachgerechten Behandlung der Frage erforderlichen experimentellen und theoretischen Voraussetzungen, was denn dann für die Erdtemperatur entscheidend ist, standen Fourier jedoch nicht zur Verfügung; sie entwickelten sich erst ein halbes Jahrhundert später. Daher sind seine ab 1824 veröffentlichten Gedanken zu diesem Problem im wesentlichen falsch, als fruchtbar erwiesen sie sich gleichwohl. Er nahm (fälschlich) an, dass im Weltall eine Temperatur von -50°C herrscht und schloss, dass die Erde eigentlich viel kälter sein müsste. Um den Widerspruch aufzulösen, folgerte er, dass die Gase der Erdatmosphäre wie das Glas eines Treibhauses wirken. Das war ein kleiner Geniestreich:[1] Kurz zuvor hatte nämlich der schweizer Naturforscher Horace-Bénédict de Saussure ein doppelt verglastes Kästchen gebaut, ins Sonnenlicht gehalten und eine große Temperaturüberhöhung im Vergleich zur Umgebung gemessen. Genauso stellte sich das Fourier mit der Erdatmosphäre vor (ging aber, komplett falsch!, gleichwohl von einem dominierenden Beitrag der interstellaren Strahlung aus).

Fourier hatte keine Ahnung, warum die Gase der Atmosphäre einen Treibhauseffekt bewirken können. Das fand John Tyndall heraus. Er stammte aus einfachen Verhältnissen, studierte und promovierte mit Mühe in Deutschland, weil er in England keine Universitätszulassung bekam und wurde zu einem ebenso vielseitigen wie bedeutenden Forscher. Außerdem erlangte er mit der Erstbesteigung des Weisshorns Ruhm als Bergsteiger. Aber auch diese Freizeitbeschäftigung mündete in Forschung. Tyndall war von den Gletschern fasziniert und fragte sich, welche Ursachen die Eiszeiten haben könnten. Diese Frage stand in enger Beziehung zu seinen bedeutendsten wissenschaftlichen Leistungen, seinen Untersuchungen zur Wärmestrahlung.



John Tyndall
1820 - 1893

Tyndall vermaß mit eigens erfundenen Apparaturen die Absorption der Wärmestrahlung durch die Bestandteile der Atmosphäre und fand, dass Wasserdampf die Wärmestrahlung am stärksten absorbiert, aber auch Spurengase wie CO_2 nicht vernachlässigbar sind. Tyndall war in der Folge der erste, der die vergangenen Eiszeiten mit Schwankungen der Zusammensetzung der Atmosphäre in Verbindung brachte. Seine experimentellen Daten waren zudem die Grundlage für das Stefan-Boltzmann-Gesetz.

[1] Es war ein *kleiner* Geniestreich; schließlich machen Menschen wie Tiere seit Äonen die Erfahrung, dass eine Nacht unter klarem Himmel viel kälter ist als eine Nacht unter dicken Wolken. Was sie nicht ahnen ist, wie bärig kalt es ganz ohne Atmosphäre wäre.

Dem bedeutenden schwedischen Chemiker Svante Arrhenius standen schließlich alle erforderlichen Erkenntnisse zur Verfügung, um eine belastbare Theorie der Energiebilanz der Erde zu formulieren. Sie beruht auf den gleichen Gedanken wie unsere nachfolgenden Ausführungen. Arrhenius war auch der erste, der einen Temperaturanstieg in Folge der von der Menschheit verursachten CO_2-Emissionen vorhersagte. Er schätzte, dass eine Verdoppelung der CO_2-Konzentration in der Atmosphäre zu einem Temperaturanstieg von 5°C führen sollte, wobei ein gleichzeitiger Anstieg der Wasserdampf-Konzentration angenommen wurde. Der Skandinavier Arrhenius sah die Sache positiv: *Der Anstieg des CO_2 wird zukünftigen Menschen erlauben, unter einem wärmeren Himmel zu leben.*

Svante Arrhenius
1835 - 1927

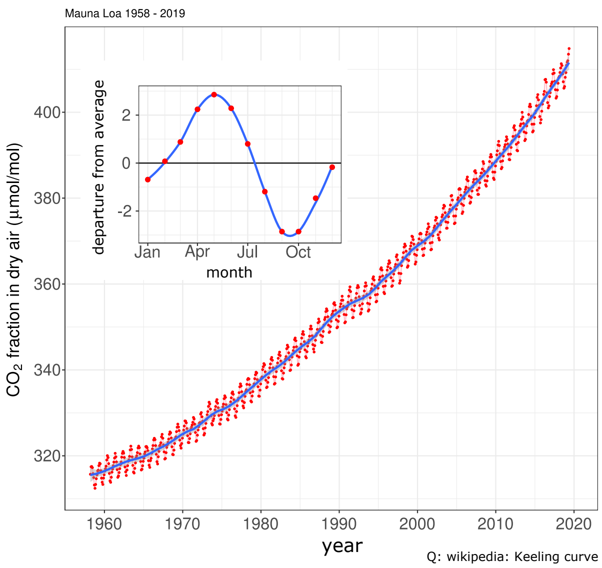
Bei weitem nicht alle Arbeiten Arrhenius' erwiesen sich als belastbar. Schon von daher ist es kein Wunder, dass seine Aussagen zum Klimawandel auf Kritik stießen. Seine physikalische Argumentation war zwar zumindest von ihren Grundannahmen nicht widerlegbar. Heftig in Zweifel gezogen wurde dagegen, dass der Mensch den CO_2-Haushalt der Erde merklich beeinflussen kann.

Diesen Disput entschied 50 Jahre später Charles Keeling, 25 Jahre nach Arrhenius Tod. Das Bild zeigt ihn 2001 in dem Moment, als ihm der Präsident der Vereinigten Staaten die National Medal of Science umhängt – das war George W. Bush, dessen Regierung sich im selben Jahr aus dem Kyoto-Protokoll zurückzog.

Charles D. Keeling
1928 - 2005

Keeling hat sein ganzes Wissenschaftlerleben einem einzigen Projekt gewidmet, der Messung des CO_2-Gehalts der Luft. Er baute ein zuverlässiges und genaues Messinstrument und installierte es weitab zivilisatorischer CO_2-Produktion. Die ersten Messungen verwirrten ihn jedoch: Entgegen der Erwartungen ging es auf und ab mit der CO_2-Konzentration – bis Keeling bemerkte, dass bis zum Frühling auf der Nordhalbkugel die Konzentration ansteigt und bis zum Herbst wieder abfällt. Keeling hat als erster dem Blauen Planeten beim Atmen zugesehen!

Wichtiger: Keeling hat seine Messstation mit Zähnen und Klauen verteidigt und es geschafft, seine Messungen seit 1958 ununterbrochen bis zum heutigen Tag fortzusetzen – obwohl er doch bereits 2005 verstorben ist. Tatsächlich ist sein Sohn in seine Fußstapfen getreten. Viel wichtiger als die saisonalen CO_2-Schwankungen war die Beobachtung des Trends. Zu Beginn von Keelings Arbeit lag der Wert unter 320 Millionstel (320 parts per million, 320 ppm), heute, 60 Jahre später, sind es 410 ppm. Damit sind die Auswirkungen des menschlichen Treibens auf die Zusammensetzung der Atmosphäre bewiesen. Die Keeling-Kurve gilt bereits heute als eine der wirkmächtigsten wissenschaftlichen Beobachtungen. Ihr Einfluss auf unser Weltbild wird verglichen mit Tycho Brahes präzisen Himmelsbeobachtungen, die entscheidend für den Sieg des heliozentrischen Weltbilds waren, oder Albert Michelsons Messungen der Lichtgeschwindigkeit, die die Relativitätstheorie entscheidend stützten.



Die Keeling-Kurve. Seit 1958 wird mitten im Pazifik auf dem Mauna Loa, Big Island, Hawaii, in über 3 000 m Höhe kontinuierlich der CO_2-Gehalt der Luft gemessen. Gezeigt wird hier der Mittelwert eines jeden Monats als roter Punkt. Die kleine Graphik zeigt vergrößert die Abweichung vom Mittelwert über eine Spanne von einem Jahr. Die gesamte Messung umfasst mehr als 60 Jahre!

2 Grundlegendes

2.1 Wärme

Mit der Lehre von der Wärme hat sich die Wissenschaft sehr schwer getan, obwohl heiß und kalt doch so alltägliche Phänomene sind. Der Physiker[2] unterscheidet heute thermische Energie und Wärme. Wenn ein Gegenstand viel thermische Energie hat, ist er heiß, ansonsten kalt. Sie würden sagen, dass der Gegenstand dann Wärme hat? Nein, unter Wärme versteht man streng genommen den Transport von Energie, bei dem keine (mechanische) Arbeit verrichtet wird. Ist Ihnen zu abstrakt? Macht nichts, im Alltag nehmen die Physiker es auch nicht so genau – sind auch nur Menschen.

Worauf ich hinaus will: Es gibt drei Formen des Wärmetransports:[3] *(i)* Die Wärmeleitung: Wenn ein heißer Körper mit einem kalten zusammengefügt wird, wird der kalte Körper wärmer und der heiße kälter. *(ii)* Die Konvektion: Warme Luft steigt auf und mischt sich mit kalter Luft, so dass diese wärmer wird. *(iii)* *Wärmestrahlung*: Die ist viel abstrakter, gleichwohl wir alle wissen und es sogar alltäglicher Sprachgebrauch ist, dass heiße Körper Wärme „abstrahlen“. Wärmestrahlung unterscheidet sich von Wärmeleitung und Konvektion darin, dass bei ihr zum Wärmetransport keine Materie erforderlich ist. Wenn wir die Luft zwischen dem Ofen und dem Sofa abpumpen würden, würde der Ofen trotzdem behagliche Wärme ausstrahlen.

Warum diskutiere ich das? Nun, das Weltall ist leer, die Sonne heiß und die Erde bestenfalls warm. Der Wärmetransport zwischen Sonne und Erde geschieht also *nur* als Wärmestrahlung. Mit grundlegenden Gesetzmäßigkeiten der Wärmestrahlung, konkret dem Stefan-Boltzmann-Gesetz, werden wir uns also befassen müssen. Im Übrigen ist Wärmestrahlung physikalisch das gleiche wie Licht. Weiter unten werden wir das noch etwas genauer berichten.

2.2 Sonnenenergie

Wir wollen uns klar machen, wieviel Energie die Erde von der Sonne pro Sekunde zugestrahlt bekommt. Energie pro Sekunde bezeichnet der Physiker als Leistung, die in der vermutlich jedermann vertrauten Einheit Watt gemessen wird. Leistung kann, genauso wie Energie, in den verschiedensten Formen auftreten: elektrische Leistung, Wärmeleistung, mechanische Leistung[4] und eben Strahlungsleistung.

Dem ein oder anderen dürfte bekannt sein, dass die Sonnenstrahlung pro Quadratmeter ungefähr 1 Kilowatt, also 1 000 Watt beträgt, wenn die Sonnenstrahlung senkrecht einfällt bzw. man ein Solarpanel so ausrichtet, dass die Sonnenstrahlung darauf senkrecht einfällt. Tatsächlich beträgt die Strahlungsleistung der Sonne außerhalb der Atmosphäre ca. $1.4\,\mathrm{kW/m^2}$. Man nennt diese Größe *Solarkonstante*. Mithilfe grundlegender physikalischer Gesetze kann man diesen Wert einfach berechnen (s. Kap. 3.3), so dass man sich gar nicht die Mühe machen müsste, ihn zu messen. Von den $1.4\,\mathrm{kW/m^2}$ erreicht nicht alles die Erdoberfläche; manches wird z.B. an der Wolkendecke reflektiert, anderes in der Atmosphäre absorbiert. Die Details interessieren uns nicht, wir rechnen zunächst einfach mit dem runden Wert $1\,\mathrm{kW/m^2}$.

Wenn wir die $1\,\mathrm{kW/m^2}$ mit der Erdoberfläche, also mit der Anzahl der Quadratmeter der Erdoberfläche, multiplizieren, erhalten wir den gesuchten Wert, also die gesamte Strahlungsleistung, die die Erde von der Sonne erhält. Aber Halt! Natürlich scheint die Sonne nur am Tag, es ist also nur die Hälfte der Erdoberfläche anzusetzen. Und außerdem fällt die Sonne in unseren Breiten, oder gar an den Polen, nicht senkrecht auf die Erdoberfläche. Nun, klar, wir müssen die Fläche des Schattens, den die Erde im Weltall verursacht, verwenden, also den Querschnitt der Erde.

Die Erde hat einen Radius $R_♁$ von 6 000 km oder 6 Millionen Meter.[5] Die Physiker würden $R_♁ = 6 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ schreiben, was einfach eine Sechs mit sechs Nullen, eben 6 Millionen bedeutet. Die Querschnittsfläche A berechnet sich mit der Formel für den Kreisinhalt $A = \pi\, R_♁^2$, wobei $\pi = 3.1415...$ die Kreiszahl ist. Für die Querschnittsfläche erhalten wir so $A = 3.1415 \cdot 6 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \cdot 6 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \approx 1.1 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m^2}$.

---

[2] Selbstverständlich sind auch Physikerinnen gemeint und genauso selbstverständlich auch Mitmenschen, die sich mit keinem der beiden Geschlechter identifizieren können. „Selbstverständlich“ impliziert, dass ich diese Bemerkung im Grunde für überflüssig halte. Wer will, darf sich aber gerne ein Gendersternchen dazu denken.

[3] Wie eben gesagt: Wärmetransport ist doppelt gemoppelt, eine Tautologie, aber egal.

[4] Die mechanische Leistung begegnet uns im Alltag insbesondere beim Autokauf. Dort geben wir die Leistung nach wie vor gerne in der eigentlich nicht mehr zugelassenen Einheit Pferdestärken an: 1 PS = 735 W.

[5] Die Astronomen (auch die Astrologen ...) verwenden ♁ als Symbol für die Erde. Später verwenden wir noch ⊙ als Symbol für die Sonne.

Diese Fläche multiplizieren wir mit den $1\,000\,\mathrm{W/m^2}$ und erhalten so die Leistung, die die Sonne der Erde zustrahlt. Auch für diese Größe wollen wir ein Symbol einführen: P_+. Die Erde erhält also von der Sonne eine Energie pro Sekunde, Leistung, von $P_+ = 1\,000\,\mathrm{W/m^2} \cdot 1.1 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m^2} = 1.1 \cdot 10^{17}\,\mathrm{W}$. Das ist eine riesengroße Zahl. Wir können versuchen, sie uns anschaulich zu machen, indem wir sie mit der Leistung eines großen Kraftwerks vergleichen, das sind etwa 1 Gigawatt oder 1 Milliarde Watt, eine 1 mit neun Nullen, $1 \cdot 10^9\,\mathrm{W}$. Demnach liefert die Sonne der Erde soviel Energie wie 10^8 große Kraftwerke, 100 Millionen große Kraftwerke. Ist das anschaulicher? Nicht wirklich. Weder vermag der menschliche Verstand die Leistung eines großen Kraftwerks zu *erfassen* noch die Zahl 100 Millionen. Aber immerhin vermag er es, solche Zahlen zu *berechnen*: $P_+ = 10^{17}\,\mathrm{W}$.

Einen Vergleich sollten wir gleichwohl noch anstellen, nämlich den mit dem Energieverbrauch der Menschheit. Das sind ca. $1.5 \cdot 10^{13}\,\mathrm{W}$, also knapp $10^4 = 10\,000$ mal weniger als die Sonne uns zustrahlt. Zwei große Schlüsse können wir daraus ziehen: Erstens ist das Potential erneuerbarer Energien riesig groß, auch wenn es eine riesengroße technische Herausforderung ist, die mehr oder weniger gleichmäßig über den Globus verteilte Sonnenenergie einzusammeln. Aber das ist ein eigenes Thema und führt uns weg von dem unseren. Für das Problem Erderwärmung wichtiger ist, zweitens, dass der eigentliche Energieverbrauch der Menschheit in der globalen Energiebilanz keine Rolle spielt. Es sind die sekundären Effekte unserer derzeitigen Energiewirtschaft, die Folgen der CO_2-Produktion, die das Problem verursachen.

3 Grundlegende physikalische Gesetzesmäßigkeiten

3.1 Energieerhaltung

1840 heuerte der junge Arzt Julius Robert Mayer auf dem holländischen Dreimaster *Java* als Schiffsarzt an. Zu seinen Dienstpflichten gehörte auch die Messung und Aufzeichnung von Wetter- und Wasserdaten. Das war alles andere als ungewöhnlich, vielmehr legten alle seefahrenden Nationen aus naheliegenden Gründen Datenbanken zu den Wetterverhältnissen auf den Weltmeeren an. Die überraschende und der Intuition zuwider laufende Beobachtung, die Mayer an Bord der *Java* machte, hätten also viele vor ihm machen können. Er bemerkte, dass das Wasser der aufgewühlten See ein klein wenig wärmer ist als bei einer glatten Wasseroberfläche bei wenig Wind.

J. Robert von Mayer
1814 - 1878

Zurück in Heilbronn ging er dem Phänomen auf den Grund und postulierte schließlich das Prinzip der Energieerhaltung. Energie kann demnach weder erzeugt noch vernichtet werden, vielmehr können die verschiedenen Energieformen (mechanische Energie, Wärmeenergie, Strahlungsenergie, elektrische Energie) nur ineinander umgewandelt werden.

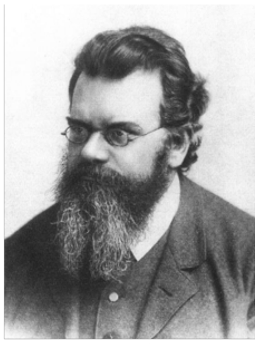
Mayer ermittelte sogar experimentell, wieviel mechanische Energie erforderlich ist, um einen Liter Wasser um ein Grad Celsius zu erwärmen, das sogenannte Wärmeäquivalent. Das weitere Schicksal, seine Nobilierung 1867 darf darüber nicht täuschen, meinte es nicht gut mit Robert Mayer. Ausgerechnet die deutschen Physiker haben sich dabei, im Gegensatz zum Iren Tyndall, nicht gerade mit Ruhm bekleckert. Lassen wir die Geschichte ruhen und fragen lieber, was das Prinzip der Energieerhaltung für unser Problem, für die Erderwärmung, bedeutet. Es bedeutet, dass die Erde jedes Watt der ca. $1.1 \cdot 10^{17}$ Watt wieder los werden muss, d.h. in die Weiten des Alls abgeben muss; wir werden gleich sehen, auf welche Weise. Würde die Erde weniger Energie verlieren als sie von der Sonne empfängt, würde sie immer wärmer. Offensichtlich geschieht das derzeit in gewissem Maße – warum ist klar, das CO_2, wie, das werden wir sehen.

Zur Abrundung des Themas ein kurzer Blick auf ein mögliches Missverständnis: Die Erde muss wirklich die ganze Energie, die sie von der Sonne erhält, wieder abgeben, wenn ihre Temperatur konstant bleiben soll. Den Energie“verbrauch” der Menschheit können wir nicht davon abziehen, denn jedes Watt Sonnenstrahlung, das wir z.B. in ein Watt elektrische Leistung umwandeln, wird irgendwann genauso zu einem Watt Wärme werden, wie wenn die Sonne die Erde direkt erhitzt hätte: Energie wird nicht erzeugt oder verbraucht, sondern nur umgewandelt, und am Ende wird alles zu Wärmeenergie. Eher ist es anders herum: Die Erde muss sogar ein klein bisschen mehr Energie abführen, als sie von der Sonne erhält, schließlich verbrennen wir derzeit vor Jahrmillionen in Form von Kohle, Öl und Gas eingelagerte Sonnenenergie. Aber, wie oben bemerkt, der direkte Effekt dieser Verbrennung ist nicht das Problem.

3.2 Stefan-Boltzmann-Gesetz

Jeder heiße (oder auch nur warme) Körper sendet Strahlung in Form von Licht und Wärmestrahlung aus. Licht oder Wärmestrahlung – physikalisch besteht zwischen beiden kein prinzipieller Unterschied. Wir werden also fortan einfach nur noch von Wärmestrahlung reden, also auch den sichtbaren Teil der Sonnenstrahlung, das Licht im engeren Sinne, als Wärmestrahlung bezeichnen.[6]

Josef Stefan
1835 - 1893



Ludwig Boltzmann
1844 - 1906

Der uns bereits bekannte John Tyndall führte nicht nur Messungen zur Absorption von Infrarot- (IR-)Strahlung in Gasen durch, sondern er untersuchte auch die IR-Strahlung, die von heißen Körpern ausgeht. Das waren wegweisende Experimente auf dem Weg zur modernen Physik, der Quantenphysik.

Der Schlusspunkt der von Tyndall und einigen anderen angestoßenen Untersuchungen war nämlich das plancksche Strahlungsgesetz, auf das wir im folgenden Abschnitt noch kurz eingehen werden. Auf den Weg dorthin liegt jedoch das Stefan-Boltzmann-Gesetz, das für die Berechnung der mittleren Erdtemperatur eine überragende Bedeutung hat. Der Wiener Professor Josef Stefan hat es 1879 aus Tyndalls damals 15 Jahre alten Daten extrahiert. Stefan war es auch, der als Erster die Sonnentemperatur richtig berechnete – neben anderen bedeutenden Leistungen. Außerdem war er der Doktorvater des großen Ludwig Boltzmann, der viele physikalische Gesetze, darunter auch das Stefan-Boltzmann-Gesetz, auf Statistik, also letztlich auf das Zählen, zurückführen konnte.

Das Gesetz besagt, dass eine heiße Oberfläche des Flächeninhaltes A Wärmestrahlung mit einer Leistung

$$P \;=\; \sigma\, A\, T^4 \tag{1}$$

abstrahlt. Dabei ist $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2/K^4}$ eine leicht zu merkende Naturkonstante und T die sog. *absolute Temperatur*, also die Temperatur gemessen in Kelvin statt in Grad Celsius. Man erhält sie, indem man zur Celsius-Temperatur 273 hinzuzählt. Wo begegnet uns dieses Gesetz im Alltag? Zum Beispiel im Kamin als glühende, d.h. Licht aussendende Kohle, oder die glühende Wendel in einem Ceran-Kochfeld, und natürlich der Glühfaden in der schlechten, alten Glühbirne. Alle warmen Körper[7] strahlen Licht ab, je mehr, je höher die Temperatur – genauer: viel, viel mehr, je höher die Temperatur; es geht mit der vierten Potenz! Außerdem strahlt ein Körper umso mehr ab (und kühlt deshalb umso schneller ab), je größer seine Oberfläche ist. Auch deshalb vergrößert man die Oberfläche von z.B. Verbrennungsmotoren durch Kühlrippen. Was jedermann zudem weiß, worüber das Stefan-Boltzmann-Gesetz aber nichts sagt, ist, dass Gegenstände bei Erwärmung zunächst tiefrot, dann mit steigender Temperatur orange und schließlich grellweiß glühen. Auch das ist Alltagswissen geworden: Bei Leuchtdioden wird die Farbtemperatur angegeben. Wenn da 6 000 K steht, bekommen Sie Licht so grellweiß wie das Tageslicht, gut für diffizile Arbeit, aber im Wohnzimmer ungemütlich.

Gleichung (1) kann man auf beiden Seiten durch die Oberfläche A des strahlenden Körpers teilen. Dann erhält man die Anzahl der Watt, die der Körper pro Quadratmeter seiner Oberfläche abstrahlt:

$$P \;=\; \sigma\, A\, T^4 \;\Big|\cdot \frac{1}{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{P}{A} \;=\; \sigma\, \frac{A}{A}\, T^4 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{P}{A} \;=\; \sigma\, T^4 \tag{2}$$

[6] Röntgenstrahlung, UV-Strahlung, sichtbares Licht, Wärmestrahlung, Radiowellen – sie alle werden von der Wellengleichung für elektromagnetische Strahlung beschrieben. Wir bezeichnen sie deshalb als elektromagnetische Wellen. Die Strahlung, die ein warmer Körper abgibt, sind elektromagnetische Wellen. Hier bezeichnen wir sie als Wärmestrahlung, ebensogut könnten wir auch den Begriff Licht verallgemeinern.

[7] Für einen Physiker sind alle Körper warm, deren Temperatur höher als -273°C = 0 Kelvin ist.

3.3 Berechnung der Solarkonstanten

Gleichung (2) können wir gleich mal auf die Sonne anwenden. Sie hat eine Temperatur von 5 504 °C = 5 777 K.[8] Wir nehmen einen Taschenrechner und tippen ein

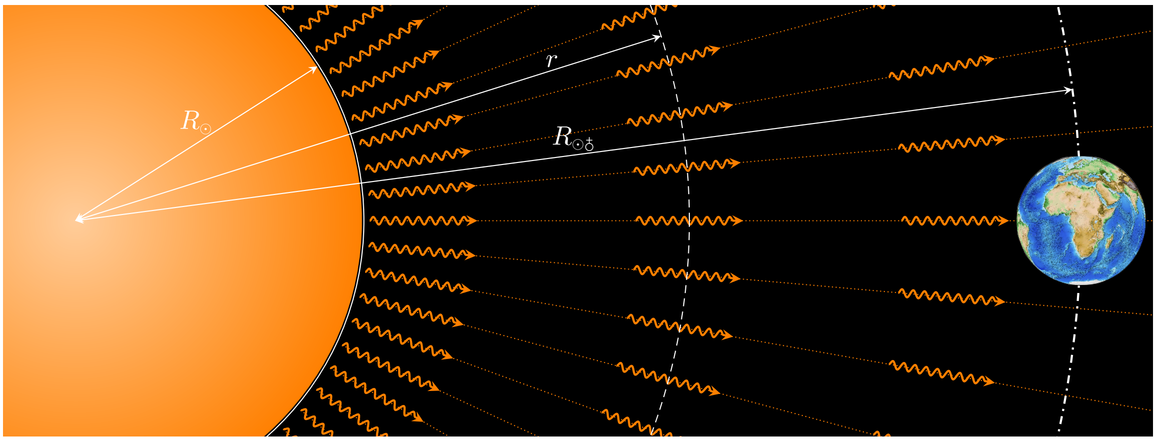
$$5.67 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cancel{K^4}} \cdot 5\,778\,\cancel{K} \cdot 5\,778\,\cancel{K} \cdot 5\,778\,\cancel{K} \cdot 5\,778\,\cancel{K} \tag{3}$$

und erhalten rund 63 Millionen Watt pro Quadratmeter, 63 Megawatt/m^2. Nur drei Quadratmeter der Sonnenoberfläche strahlen also genauso viel Energie ab, wie das Kraftwerk in Winzerla Elektrizität produziert! Nachdem die Sonne aber riesengroß ist – ihr Radius beträgt $R_\odot = 696\,000\,\mathrm{km}$, also rund 700 Millionen Meter – ist auch ihre Oberfläche $A_\odot$ riesengroß:[9]

$$A_\odot = 4\pi\, R_\odot^2 = 4 \cdot 3.1415 \cdot 696 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \cdot 696 \cdot 10^6\,\mathrm{m} = 6.087 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m}^2 \tag{4}$$

Wir sagen also, die Sonne strahlt $63 \cdot 10^6$ Watt auf jeden ihrer $6.087 \cdot 10^{18}$ Quadratmeter Oberfläche ab. Entsprechend strahlt die Sonne eine Leistung von insgesamt $63 \cdot 10^6 \cdot 6.087 \cdot 10^{18}$ Watt $= 3.84 \cdot 10^{26}$ Watt ins All. Das ist wieder so eine Größe, die über den menschlichen Verstand geht, eine buchstäblich astronomische Zahl. Aber – wir können sie berechnen!

Was passiert nun mit den $3.84 \cdot 10^{26}$ Watt wenn sie sich in alle Raumrichtungen, sternförmig, von der Sonne weg ins All ausbreiten? Es ist zumindest nicht falsch und es hilft der Anschauung, wenn wir uns die $3.84 \cdot 10^{26}$ Watt als eine gewaltig große, aber doch ziemlich genau bekannte Zahl N von Lichtteilchen (Photonen) vorstellen, die pro Sekunde die Sonnenoberfläche verlassen. Die Abbildung illustriert die Verhältnisse: Die N Photonen, die die Sonnenoberfläche in alle Richtungen jetzt verlassen, werden sich in ca. vier Minuten auf einer Kugelschale befinden, die einen Radius r hat, der so groß ist wie die halbe Entfernung zwischen Sonne und Erde (gestrichelte weiße Linie). Nach weiteren ca. vier Minuten befinden sich die N Photonen auf einer Kugelschale mit einem Radius $R_{\odot\text{♁}}$, der der Entfernung Sonne-Erde entspricht.



Wichtig ist, sich die Trivialität bewusst zu machen, dass keines der N Photonen auf dem Weg in die Weiten des Alls verloren geht oder gar welche dazu kämen.[10] In der Abbildung haben wir das dadurch betont, dass die Photonen auf ihrem Weg ins All durch die orange gepunkteten, strahlenförmig von der Sonne weggehenden Linien verbunden sind. Nachdem die N Photonen der Strahlungsleistung der Sonne, also den $3.84 \cdot 10^{26}$ Watt entsprechen, bedeutet dies, dass z.B. durch die gedachte Kugelschale um die Sonne, auf der sich der Orbit des Planeten Erde befindet, genau diese $3.84 \cdot 10^{26}$ Watt gehen.

An der Graphik erkennt man sofort, dass die Photonen dort viel dünner gesät sind verglichen mit der Situation auf der Sonnenoberfläche. Ja klar: Auf der Sonnenoberfläche dringen $3.84 \cdot 10^{26}$ Watt durch die Son-

[8] Woher wir das wissen? Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Sonnentemperatur zu bestimmen. Wie gesagt, konnte schon Josef Stefan einen ziemlich genauen Wert angeben. Eine besonders überzeugende Messung gelingt mit dem Planck-Gesetz, s. Abschnitt 3.4.

[9] Die Formel für die Oberfläche einer Kugel ist $4\pi\, r^2$, also viermal so viel wie eine Kreisfläche mit demselben Radius r. Na klar: Vergleichen wir die Oberfläche einer Kugel mit der einer Scheibe, müssen bei letzterer schon mal Vorder- und Rückseite, also zusammen $2\pi\, r^2$, genommen werden. Und dann sind diese Vorder- und Rückseite zu Kugelflächen auszubauchen, wodurch sich die Flächen vergrößern. Die Rechnung ergibt, dass sich die Oberflächen durch die Umformung zu Halbkugeln verdoppeln.

[10] Natürlich können ein paar Photonen an irgendwelchen Himmelskörpern hängen bleiben. Verglichen mit der Gesamtzahl sind das aber äußerst wenige und für unsere Überlegung spielen sie sowieso keine Rolle.

nenoberfläche $4\pi R_{\odot}^2$, während auf der Erdbahn dieselben $3.84 \cdot 10^{26}$ Watt durch eine viel größere Kugelfläche $4\pi R_{\odot♁}^2$ fliegen. Während der Sonnenradius 696 Millionen Meter beträgt, $R_{\odot} = 696 \cdot 10^6$ m, beträgt der Abstand Sonne-Erde 150 Milliarden Meter, $R_{\odot♁} = 150 \cdot 10^9$ m, d.h der Sonnenradius ist $R_{\odot♁}/R_{\odot} = 215.5$ mal kleiner als der Erdorbitradius. Entsprechend ist die Oberfläche der Sonne $(R_{\odot♁}/R_{\odot})^2 = 215.5 \cdot 215.5 = 46\,450$ kleiner als die gedachte Kugeloberfläche, auf der sich die Erdbahn befindet.

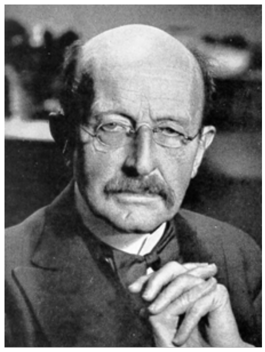
Auf der Sonnenoberfläche entsprach die Sonnenleistung $3.84 \cdot 10^{26}$ Watt einer Leistung pro Quadratmeter von 63 Megawatt. In Erdentfernung verteilt sich die Sonnenleistung auf eine 46 450 mal größere Fläche, also beträgt die auf den Quadratmeter bezogene Strahlungsleistung der Sonne dort 63 Megawatt geteilt durch 46 450. Das sind $1360\,\mathrm{W/m^2}$, genau die Solarkonstante. Wir haben also tatsächlich den in Kap. 2 behaupteten Wert von ca. $1.4\,\mathrm{kW/m^2}$ ausgerechnet!

Fassen wir zusammen: Aus Gl. (2) haben wir $63\,\mathrm{MW/m^2}$ auf der Sonnenoberfläche berechnet. Dieser Wert verringert sich auf dem Weg zur Erde um den Faktor $1/f = (R_{\odot♁}/R_{\odot})^2 = 46\,450$. Man bezeichnet f entsprechend auch als *Verdünnungsfaktor*. Nehmen wir beides zusammen, können wir eine kompakte Formel für die Solarkonstante hinschreiben:

$$\frac{P_{♁}}{A} = \frac{R_{\odot}^2}{R_{\odot♁}^2}\,\sigma\, T_{\odot}^4 = f\,\sigma\, T_{\odot}^4 \tag{5}$$

3.4 Planck-Gesetz[11]

Im Abschnitt 3.2 hatten wir bemerkt, dass das Stefan-Boltzmann-Gesetz zwar die Gesamtstrahlung eines heißen Körpers akkurat beschreibt, aber nichts über die spektrale Verteilung der Strahlung berichtet. Der Schmied in seiner Werkstatt ist in dieser Hinsicht schon seit 3 000 Jahren weiter: Er beurteilt anhand der Farbe seines glühenden Werkstücks, ob es die zum Schmieden richtige Temperatur hat. Aber die Physiker haben aufgeholt: Max Planck hat 1900 sein berühmtes Gesetz formuliert, das nicht nur angibt, wieviel Strahlung ein heißer Körper insgesamt von sich gibt, sondern auch wieviel Strahlung jeder Farbe, wir sagen das Spektrum der Wärmestrahlung. Das Stefan-Boltzmann-Gesetz ist nur noch ein Spezialfall des Planck-Gesetzes.



Max Planck
1858 - 1947

Nun, „Farbe“: Der Begriff Farbe bezieht sich eigentlich auf den sichtbaren Teil der Wärmestrahlung, auf das Licht. Grünes Licht hat eine Wellenlänge von ungefähr $0.5\,\mu$m, also ein halbes Tausendstel eines Millimeters, und rotes Licht gut $0.6\,\mu$m. Hin zu kürzeren Wellenlängen schließt sich Blau, die UV- und die Röntgenstrahlung an, zu den größeren Wellenlängen das infrarote Licht.

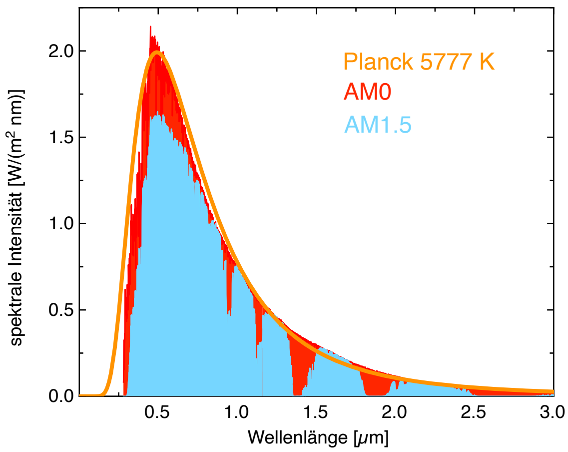
Eine Wärmebildkamera ist z.B. auf die Strahlung mit Wellenlängen im Bereich von 5 bis $10\,\mu$m empfindlich. Das Auge sieht da gar nichts mehr. Wenn man einen warmen Körper in einen dunklen Raum stellt, „leuchtet“ er sozusagen schwarz. Die Anführungszeichen hätte ich mir auch sparen können: Eine Wärmebildkamera beweist sofort, dass der Körper leuchtet.

Für Körper, die nur aufgrund ihrer Temperatur Strahlung abgeben, hat man im 19. Jhdt. den Begriff Schwarzkörper-Strahlung geprägt. Nun leuchtet aber derselbe Körper, der bei 100°C schwarz ist, bei 600°C tiefrot. Und wenn er auf Sonnentemperatur, also ca. 5 500°C, aufgeheizt wird, strahlt er grellweiß. Gleichwohl: Die Physik ist stets dieselbe und deshalb beschreiben die Physiker selbst die Sonne als Schwarzen Körper – und wundern sich, dass sie vom Rest der Menschheit zuweilen als etwas wunderlich wahrgenommen werden.[12]

Die folgende Abbildung zeigt drei Spektren, also drei Kurven, die angeben welche Intensität bei welcher Farbe (Wellenlänge) gemessen wird. Die rote Kurve zeigt das Sonnenspektrum außerhalb der Atmosphäre, also wie es von einem Satelliten gemessen wird, und die glatte orange Kurve ist das plancksche Gesetz für einen Schwarzen Strahler der Temperatur 5 777 K. Die Tatsache, dass beide Kurven sehr gut übereinstimmen zeigt, dass man die Sonnentemperatur auch über das Planck-Gesetz bestimmen kann. Die beiden Kurven stimmen nicht nur ihrer Form nach überein, sondern auch in absoluten Zahlen, wenn man den in Abschnitt 3.3 diskutierten Verdünnungsfaktor berücksichtigt.

[11] Dieser Abschnitt enthält nur ergänzende Informationen, die zum Verständnis der übrigen Überlegungen nicht erforderlich sind.

[12] Zur Ehrenrettung der Physiker: Die Geschichte ist ein klein wenig komplizierter. Tatsächlich soll der Begriff „schwarz“ ausdrücken, dass der Körper kein Licht reflektiert.



Die Sonnenstrahlung als Schwarzkörperstrahlung: Das Sonnenspektrum außerhalb der Atmosphäre wird mit AM0 (air mass 0) bezeichnet. In unseren Breiten geht man im Mittel von eineinhalb Atmosphärendicken aus, AM1.5. Im Vergleich dazu das Spektrum eines Schwarzen Strahlers bei Sonnentemperatur.

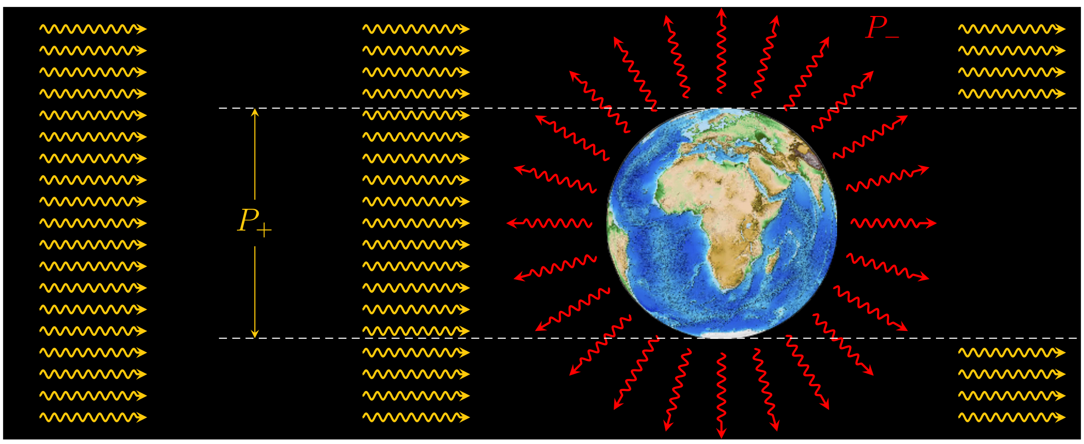
Was ist mit den kleinen Unterschieden? Nun, die Sonne besteht aus Wasserstoff, Helium und kleinen Mengen anderer Elemente. Diese absorbieren Strahlung gewisser Wellenlängen. Fraunhofer hat diesen Effekt in Form der Fraunhofer-Linien Anfang des 19. Jhdts. entdeckt. Die blaue Kurve zeigt das Sonnenspektrum, wie wir es in unseren Breiten zur Mittagszeit auf Meereshöhe erwarten können. Man sieht, dass Strahlung gewisser Wellenlängen im Infrarotbereich vollständig von der Atmosphäre absorbiert werden. Das war Tyndalls Entdeckung.

4 Berechnung der Planeten-Temperatur

4.1 Ein erster (zu) einfacher Ansatz

Zwei Dinge haben wir nun gelernt: Erstens, dass die Erde die Energie, die sie von der Sonne empfängt, wieder los werden muss, wenn sie nicht aufgeheizt werden soll bis sie verdampft. In anderen Worten: Die Energiebilanz muss ausgeglichen sein, es muss genauso viel Energie eingenommen wie ausgegeben werden. Zweitens haben wir gelernt, wieviel Energie die Erde konkret empfängt. Wir kennen also die Einnahmenseite – und damit auch, wieviel Energie die Erde wieder los werden muss. Wie macht sie das? Nun, die Erde ist auch ein warmer Körper und strahlt deshalb ihrerseits Wärmestrahlung in die Weiten des Alls. Sicher, bezogen auf einen Quadratmeter sehr viel weniger als die Sonne und auch keine sichtbare Strahlung, weil sie eine durchschnittliche Temperatur von gerade mal grob 15°C=288 K hat und nicht 5 777 K wie die Sonne.

Die Abbildung veranschaulicht den Gedanken der Energiebilanz: Die Erde absorbiert die Sonnenstrahlung, verbucht sie also als Einnahme, hier durch die von links kommenden orangegelben Pfeile symbolisiert, die auf der rechten Seite der Erde fehlen. Die Erde sendet die durch die roten Pfeile dargestellte Wärmestrahlung aus; das sind die Ausgaben.



Die Einnahmen P_+ müssen gleich den Ausgaben P_- sein. Wir schreiben

$$P_+ \stackrel{!}{=} P_-, \tag{6}$$

wobei das Ausrufezeichen über dem Gleichheitszeichen andeutet, dass wir die Gleichheit der Energie-Einnahmen P_+ und -Ausgaben P_- *verlangen*.

Für P_+ haben wir genau genommen schon eine Gleichung: Gleichung (5) sagt uns, wieviele Watt Sonnenstrahlung pro Quadratmeter auf die Erde treffen (ungefähr $P_{\text{♁}}/A = 1\,350\,\mathrm{W/m^2}$). Gleichung (5) muss also nur mit der projizierten Fläche der Erde $\pi R_{\text{♁}}^2$ multipliziert werden, um P_+ zu erhalten. In der Abbildung ist das dadurch angedeutet, dass im Schatten der Erde auf der rechten Seite der Abbildung die Photonen von der Sonne fehlen. Also haben wir

$$P_+ \;=\; \frac{P_{\text{♁}}}{A} \cdot \pi R_{\text{♁}}^2 \stackrel{(5)}{=} f\,\sigma\,T_\odot^4 \cdot \pi R_{\text{♁}}^2, \tag{7}$$

wobei, Sie erinnern sich, $f = 1/46\,450$ der Verdünnungsfaktor ist.

Nun zu den Ausgaben: Dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ist es egal, ob wir über die Sonne oder die Erde reden. Die Wärmestrahlungsleistung, die die Erde pro Quadratmeter abstrahlt, ist, wie in Abschnitt 3.2 besprochen, gegeben durch σT^4, hier also durch $\sigma T_{\text{♁}}^4$. Vorhin haben wir das auf die Sonne angewandt und $\sigma T_\odot^4$ verwendet, jetzt eben $\sigma T_{\text{♁}}^4$. Wenn wir das mit der Erdoberfläche[13] multiplizieren, haben wir die gesamte Strahlungsleistung der Erde, also P_-,

$$P_- \;=\; \sigma T_{\text{♁}}^4 \cdot 4\pi\, R_{\text{♁}}^2. \tag{8}$$

P_+ soll gleich P_- sein, also müssen auch die rechten Seiten der Gleichungen (7) und (8) gleich sein.

$$f\,\cancel{\sigma} T_\odot^4 \cdot \cancel{\pi}\cancel{R_{\text{♁}}^2} \stackrel{!}{=} \cancel{\sigma} T_{\text{♁}}^4 \cdot 4\cancel{\pi}\,\cancel{R_{\text{♁}}^2}. \quad \Big|\ \div\,\sigma,\ \ \div\,\pi,\ \ \div\,R_{\text{♁}}^2 \tag{9}$$

Die beiden Seiten einer Gleichung darf man durch dieselbe Zahl teilen, ohne dass das Gleichheitszeichen falsch würde. Teilen wir, wie oben bereits angedeutet, auf beiden Seiten durch σ, π und $R_{\text{♁}}^2$, so folgt $f\,T_\odot^4 = T_\odot^4 \cdot 4$. Wir ziehen die vierte Wurzel und lösen nach der Erdtemperatur $T_{\text{♁}}$ auf und erhalten

$$\boxed{T_{\text{♁}} \;=\; \sqrt[4]{\frac{f}{4}}\,T_\odot.} \tag{10}$$

Gleichung (10) bedeutet, dass wir die Erdtemperatur $T_{\text{♁}}$ aus der Sonnentemperatur $T_\odot$ berechnen können, f ist ja bekannt. Also, den Taschenrechner gezückt …

$$T_{\text{♁}} \;=\; \sqrt[4]{\frac{1}{4 \cdot 46\,450}} \cdot 5\,777\,\mathrm{K} \;=\; 278\,\mathrm{K} \;=\; 5°\mathrm{C}. \tag{11}$$

5°C? Ein bisschen zu kalt vielleicht, aber angesichts der zwar grundlegenden, letztlich aber doch primitiven Überlegung bemerkenswert gut. Es scheint, wir können die Erdtemperatur *berechnen*! Doch Vorsicht! Wir haben zwei wichtige Dinge nicht berücksichtigt.

4.2 Berücksichtigung der Albedo

Bereits im Abschnitt 2.2 (als wir ausrechneten, dass die Sonne der Erde 10 000 mal mehr Energie zustrahlt als die Menschheit verbraucht), haben wir darauf hingewiesen, dass die Strahlungsleistung pro Quadratmeter außerhalb der Atmosphäre ungefähr $1.4\,\mathrm{kW/m^2}$ beträgt, von der auf der Erdoberfläche aber nur etwa $1\,\mathrm{kW/m^2}$ ankommen. Das müssen wir genauer diskutieren.

Tatsache ist, dass die Erde, genauso wie die anderen Planeten oder der Mond, einen Teil der auf sie treffenden Sonnenstrahlung reflektiert. Wäre es anders, also würde die Erde, wie im vorangegangenen Abschnitt angenommen, die gesamte Sonnenstrahlung absorbieren, um sie danach als für das menschliche Auge unsichtbare Wärmestrahlung wieder zu emittieren, dann erschiene die Erde vom Weltall aus gesehen schwarz – das berühmte von Apollo 8 geschossene Photo der hinter dem Mond aufgehenden Erde gäbe es dann nicht. Die Eigenschaft des Planeten, Strahlung zu reflektieren, nennt man *Albedo*, auf deutsch Weißheit.[14] Die Zahl gibt an, wie weiß ein Planet ist. Eine Albedo $\rho = 1$ eines Planeten bedeutet, dass er

[13] Sie erinnern sich: Eine Kreis hat den Flächeninhalt πr^2, aber eine Kugel die Oberfläche $4\pi r^2$.
[14] nicht Weisheit …

alles Licht reflektiert, $\rho = 0$ bedeutet, dass er nichts reflektiert, also alles absorbiert und damit schwarz ist.[15]

Es ist natürlich klar, dass die Sonnenstrahlung, die z.B. an den Wolken, dem Eis in den Polarregionen oder dem Wüstensand reflektiert wird, die Erde nicht erwärmt, also aus der obigen Energiebilanz herausgenommen werden muss. Wir müssen P_+ um den reflektierten Teil reduzieren. Glücklicherweise kennt man die Albedo sehr genau. Seit 2015 wird sie sogar kontinuierlich von der Raumsonde Deep Space Climate Observatory aus 1.5 Millionen Kilometer Entfernung gemessen. Daher weiß man $\rho = 0.306$. Von der Erde wird also nur $(1-\rho) \approx 70\%$ der einfallenden Sonnenstrahlung absorbiert. Statt Gleichung (7) schreiben wir also

$$P_+ \;=\; (1-\rho)\, f\, \sigma\, T_\odot^4 \cdot \pi R_♁^2, \tag{12}$$

während sich auf der Ausgabenseite, d.h. bei Gleichung (8), nichts ändert. Wir verlangen wieder, dass die Energiebilanz ausgeglichen sein muss, also $P_+ \overset{!}{=} P_-$

$$(1-\rho)\, f \cancel{\sigma} T_\odot^4 \cdot \cancel{\pi} \cancel{R_♁^2} \overset{!}{=} \cancel{\sigma} T_♁^4 \cdot 4\cancel{\pi}\, \cancel{R_♁^2}. \quad \Big|\; \div\, \sigma, \;\; \div\, \pi, \;\; \div\, R_♁^2 \tag{13}$$

Wenn wir das nach der Erdtemperatur $T_♁$ auflösen und Zahlen einsetzen, erhalten wir

$$T_♁ \;=\; \sqrt[4]{\frac{(1-\rho)\, f}{4}}\, T_\odot \;=\; \sqrt[4]{\frac{1-0.306}{4 \cdot 46\,450}} \cdot 5\,777\,\mathrm{K} \;=\; 254\,\mathrm{K} \;=\; -19°\mathrm{C}. \tag{14}$$

Wäre das die ganze Wahrheit, dann gäbe es uns nicht, die Erde wäre ein gefrorener Eisball. Aber es ist nicht die ganze Wahrheit, in unserer Rechnung fehlt der Treibhauseffekt. Er kommt, wie bereits berichtet, von der Absorption der Wärmestrahlung in der Atmosphäre. Wichtig ist, zu erkennen, dass der für unser Auge sichtbare Teil der Wärmestrahlung (also das Licht) in der Atmosphäre kaum absorbiert wird im Gegensatz zum infraroten Anteil, der zum Teil sehr stark absorbiert wird. Das ist nicht anders als beim Treibhaus: Das Glasdach lässt das Sonnenlicht durch, die Wärmestrahlung größtenteils jedoch nicht.[16]

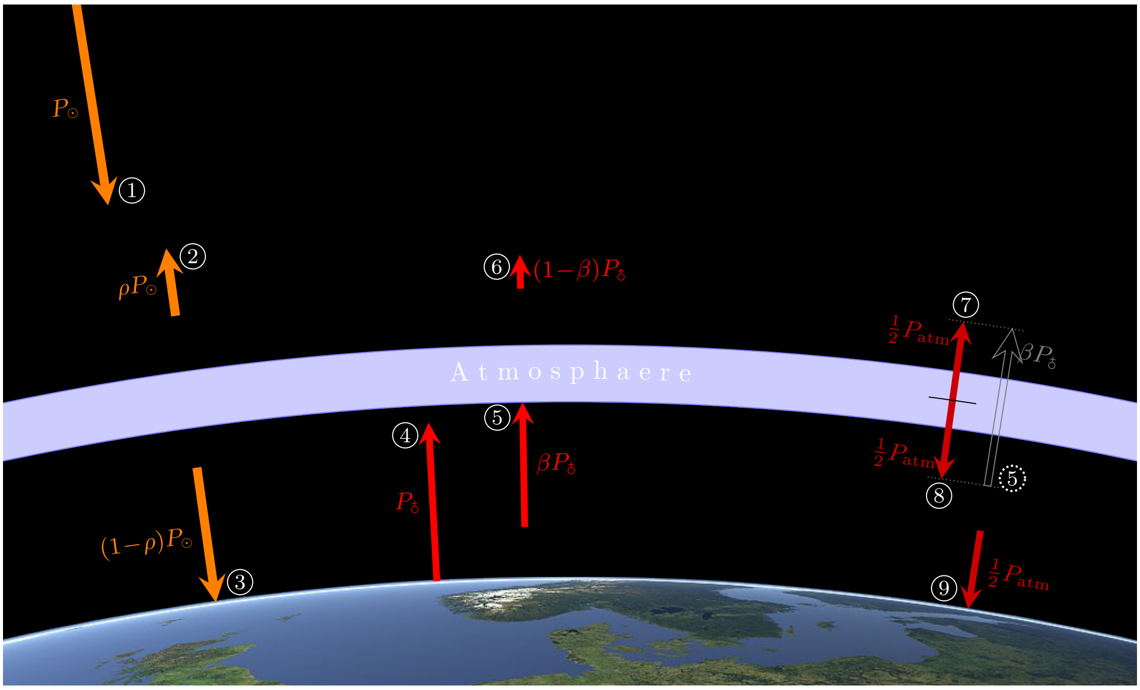
4.3 Berücksichtigung des Treibhauseffektes

Es wird also Wärmestrahlung in der Atmosphäre absorbiert. Konsequenterweise erwärmt sie sich dadurch – und strahlt ihrerseits Wärmestrahlung ab. Genauer: Die Temperatur der Atmosphäre geht solange nach oben (und strahlt daher nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz immer stärker), bis sie genauso viel Energie abstrahlt wie sie absorbiert hat. Es gibt jetzt also zwei Energiebilanzen, eine für die Erdoberfläche ähnlich wie bisher und eine neue für die Atmosphäre.

In der folgenden Abbildung gehen wir den Energieflüssen nach. Vorneweg dazu die Bemerkung, dass Pfeile, deren Spitzen an der Erdoberfläche bzw. Atmosphäre enden, Energieflüsse darstellen, die dort Energie eintragen. Umgekehrt werden Energieverluste durch Pfeile symbolisiert, die an der Erdoberfläche bzw. Atmosphäre beginnen. Alle übrigen Pfeile sind Energieflüsse, die nicht in die Bilanz eingehen.

[15] Wenn dieser Planet, sagen wir, 800°C hätte, würde er orangerot glühen. Der Physiker würde ihn, genau wie die Sonne, trotzdem als schwarz bezeichnen ... (s. Kap. 3.4)

[16] Gleichzeitig verhindert das Treibhaus, dass die warme Luft entweicht. Die Analogie zwischen dem was im Treibhaus passiert und dem Treibhauseffekt ist also nicht vollständig. Pedantische Zeitgenossen unterscheiden daher zwischen Glashaus und Treibhaus – naja.



Folgen wir den Energieflüssen: ① Die Sonne strahlt der Erde den Energiefluss[17] $P_\odot$ zu. Sie erinnern sich, $1.4\,\mathrm{kW/m^2}$. Ein Teil, ziemlich genau 30%, $\rho P_\odot$, wird reflektiert ② aufgrund der Albedo ρ der Erde. Dieser Teil geht zurück ins All, also nicht in die Bilanz von Erde oder Atmosphäre. Die übrigen knapp 70%, $(1-\rho)P_\odot$, werden von der Erdoberfläche absorbiert ③. Das ist eine Energieeinnahme für die Erde.

Die Erde ihrerseits gibt die Wärmestrahlung $P_{♁}$ ab ④. Der größte Teil $\beta P_{♁}$ davon wird in der Atmosphäre absorbiert, führt ihr also Energie zu und erwärmt sie dadurch ⑤. Der kleinere Teil $(1-\beta)P_{♁}$ entweicht ins All ⑥ und verschwindet so aus der Bilanz. Konsequenterweise bezeichnet man β als *Treibhauskoeffizienten*. Für die Erde gilt $\beta = 0.77$, wobei zugegeben werden sollte, dass dieser Treibhauskoeffizient deutlich weniger gut als die Albedo definiert ist.

Die Atmosphäre hat also den Energiefluss $\beta P_{♁}$ erhalten und muss diesen wieder los werden. D.h. die Atmosphäre wird eine Strahlung $P_{\mathrm{atm}} = \beta P_{♁}$ abgeben ⑤. Nun ist die Atmosphäre im Vergleich zur Erde dünn wie ein Blatt Papier. Daher ist klar, dass die Erde die eine Hälfte Richtung All strahlt ⑦ und die andere Richtung Erdoberfläche ⑧, wo sie absorbiert wird ⑨. Die Erde hat also eine zusätzliche Einnahmequelle – das ist der Treibhauseffekt.

Wenn wir Ein- und Ausgaben für Erde und Atmosphäre in eine Tabelle einsortieren, sieht das so aus:

		Einnahmen		Ausgaben
Erdoberfläche	③	$(1-\rho)P_\odot$	④	$P_{♁}$
	⑨	$\frac{1}{2}P_{\mathrm{atm}}$		
Atmosphäre	⑤	$\beta P_{♁}$	⑦	$\frac{1}{2}P_{\mathrm{atm}}$
			⑧	$\frac{1}{2}P_{\mathrm{atm}}$

Prüfen Sie ruhig nach, ob die Pfeilspitzen, die an der Erde bzw. Atmosphäre enden, auf der jeweiligen Einnahmenseite stehen und entsprechend die Ausgaben. Nun verlangen wir, dass Ein- und Ausgaben für die Erde und die Atmosphäre jeweils ausgeglichen sind, also ③+⑨ $\overset{!}{=}$ ④ und ⑤ $\overset{!}{=}$ ⑦+⑧. Ausgeschrieben sieht das so aus:

$$(1-\rho)\,P_\odot + \frac{1}{2}P_{\mathrm{atm}} = P_{♁} \tag{15}$$

$$\beta\,P_{♁} = P_{\mathrm{atm}} \tag{16}$$

[17] Der Begriff Energiefluss ist identisch mit Leistung, klingt hier aber eingängiger, nachdem ich gesagt hatte, wir folgen den Energieflüssen.

In beiden Gleichungen taucht die Strahlungsleistung P_{atm} auf; wir haben sie blau gedruckt, um das zu verdeutlichen. D.h. nach Gleichung (16) kann statt P_{atm} ebenso gut $\beta P_{\oplus}$ geschrieben werden. Tun wir das doch in (15):

$$(1-\rho)\,P_{\odot} + \frac{1}{2}\beta\,P_{\oplus} \;=\; P_{\oplus} \quad\Longrightarrow\quad (1-\rho)\,P_{\odot} \;=\; P_{\oplus} - \frac{1}{2}\beta\,P_{\oplus} \quad\Longrightarrow\quad (1-\rho)\,P_{\odot} \;=\; (1-\frac{\beta}{2})\,P_{\oplus}$$

Wenn wir nach $P_{\oplus}$ auflösen und für $P_{\odot}$ und $P_{\oplus}$ die in Abschnitt 4.1 diskutierten Ausdrücke einsetzen, ergibt sich:

$$P_{\oplus} \;=\; \frac{1-\rho}{1-\beta/2}\,P_{\odot} \quad\Longrightarrow\quad 4\cancel{\pi}\cancel{R_{\oplus}^2}\cancel{\sigma}T_{\oplus}^4 \;=\; \frac{1-\rho}{1-\beta/2}\,f\,\cancel{\pi}\cancel{R_{\oplus}^2}\cancel{\sigma}T_{\odot}^4$$

Wiederum wie in Abschnitt 4.1 ziehen wir die vierte Wurzel, lösen nach $T_{\oplus}$ auf und setzen Zahlen ein:

$$T_{\oplus} \;=\; \sqrt[4]{\frac{f}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1-\rho}{1-\beta/2}}\cdot T_{\odot} \;=\; \sqrt[4]{\frac{1}{4\cdot 46\,450}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1-0.306}{1-0.77/2}}\cdot 5\,777\,\text{K} \;=\; 287\,\text{K} \;=\; 14°\text{C} \qquad (17)$$

Das passt ganz genau – verdächtig genau. Tatsächlich wurde $\beta = 0.77$ so gewählt, dass sich die richtige Erdtemperatur ergibt. Es wäre auch deutlich zu viel erwartet von einem derart einfachen theoretischen Modell, dass man die Erdtemperatur bis auf die Nachkommastelle herausbekäme. Andererseits, und das ist das Entscheidende: erstens ist der $\beta = 0.77$ durchaus ein plausibler Wert und, wichtiger, zweitens zeigt das Modell mindestens qualitativ, dass die Erdtemperatur mit steigender Absorption, also mit steigender Treibhausgaskonzentration steigen *muss*!

Wie vernünftig unsere Rechnung ist, können Sie auch an Folgendem sehen: In Gleichung (15) und (16) habe ich nicht nur P_{atm} blau gedruckt, sondern auch $P_{\oplus}$ grün. Wir könnten, statt in (15) P_{atm} durch $\beta P_{\oplus}$ zu ersetzen, jetzt $P_{\oplus}$ durch P_{atm}/β ersetzen und so statt der Erdtemperatur die Atmosphärentemperatur ausrechnen. Das Ergebnis ist

$$T_{\text{atm}} \;=\; \sqrt[4]{\frac{f}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1-\rho}{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{2}}}\cdot T_{\odot} \;=\; -4°\text{C} \qquad (18)$$

Ein bemerkenswertes Ergebnis: Die Atmosphäre ist ca. 20°C kälter als die Erdoberfläche. Das ist nachprüfbar, indem man in einer klaren Nacht ein handelsübliches Infrarotthermometer gen Himmel hält – und es stimmt! Die relativ kalte Atmosphäre ist übrigens auch daran schuld, dass die Windschutzscheibe Ihres Autos beschlägt oder gar überfriert, obwohl die Lufttemperatur gar nicht unter 0°C gesunken ist.

Epilog

Es ist offensichtlich, dass das hier erläuterte holzschnittartige Modell des Treibhauseffektes – in der Literatur als idealisiertes Treibhausmodell bekannt – nicht geeignet ist, *quantitative* Vorhersagen über die Erderwärmung zu liefern – einerseits. Das liegt u.a. daran, dass die Wärmestrahlung mit der Atmosphäre deutlich vielschichtiger wechselwirkt als hier angenommen. Sie wird z.B. je nach Spektralbereich von den verschiedenen Treibhausgasen sehr verschieden absorbiert. Andererseits besteht der besondere Wert des idealisierten Treibhausmodells gerade darin, dass es den Zusammenhang zwischen Treibhausgaskonzentration sehr transparent qualitativ oder sogar halb quantitativ auf physikalische Gesetze zurückführt, die seit Anbeginn der Zeit das Universum beherrschen. Selbstverständlich beruhen auch die komplexen theoretischen Modelle der modernen Klimaforschung zu wesentlichen Teilen auf den hier präsentierten grundlegenden Ideen.

Insbesondere beweist das idealisierte Treibhausmodell, dass die Menschheit mit dem immensen CO_2-Ausstoß ein gefährliches Experiment mit der Erdatmosphäre begonnen hat. Allerspätestens seitdem der Nachweis erbracht wurde, dass die Erdtemperatur im Steigen begriffen ist (Stichwort: hockey stick graph), ergibt sich zwingend die Schlussfolgerung, dieses Experiment so schnell wie möglich zu beenden. Die verbliebenen Unwägbarkeiten in der Vorhersage der Erdtemperatur sind kein Grund, weiter zuzuwarten, sondern, ganz im Gegenteil, ein weiterer Grund zum Handeln angesichts der drohenden katastrophalen Konsequenzen; *better save than sorry*, sagt der Engländer. Dabei ist es leider schon unwahrscheinlich geworden, dass wir uns überhaupt noch auf die wirklich sichere Seite retten können.

Prof. Dr. Dr. h. c. Gerhard G. Paulus
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Friedrich-Schiller-Universität Jena