

# 420 – Messung der Lichtgeschwindigkeit

## 1. Aufgaben

- 1.1 Machen Sie sich mit dem Messplatz und der Bedienung des Oszilloskops vertraut!
- 1.2 Beobachten Sie die Phasenverschiebung in Abhängigkeit vom Lichtweg, und bestimmen Sie daraus die Lichtgeschwindigkeit in Luft!
- 1.3 Messen Sie Brechzahl und Lichtgeschwindigkeit in zwei verschiedenen Medien!

## 2. Grundlagen

### Stichworte:

Lichtgeschwindigkeit, Brechzahl, Modulationsfrequenz, Periodendauer, Phasenverschiebung, Oszilloskop, Lissajousfiguren

### 2.1 Historische Betrachtungen

Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist eine der faszinierendsten Naturkonstanten. Nach Einstein ist sie die größte erreichbare Geschwindigkeit überhaupt. Aus der Relativitätstheorie sind Effekte wie Zeitdehnung oder Massenzunahme bekannt, die uns reichlich seltsam vorkommen, aber bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit tatsächlich passieren. Mit ca. 300.000 km/s ist die Geschwindigkeit des Lichtes so groß, dass wir im Alltag einen Vorgang scheinbar in demselben Moment sehen, in dem er stattfindet. Es verwundert daher nicht, dass über viele Jahrhunderte darüber gestritten wurde, ob die Lichtgeschwindigkeit endlich oder unendlich groß ist.

Erste Experimente zur Klärung dieser Frage wurden u.a. von G. Galilei durchgeführt (um 1600). Den ersten halbwegs brauchbaren Zahlenwert (213.000 km/s) fand der dänische Astronom O. Römer im Jahr 1676 durch Beobachtung der Jupitermonde. Danach vergingen noch fast 200 Jahre bis H. Fizeau mit der Zahnradmethode einen Wert messen konnte, der schon sehr nahe an der tatsächlichen Geschwindigkeit lag.

Bei Fizeaus Experiment wird Licht durch ein rotierendes Zahnrad auf einen weit entfernten Spiegel geleitet. Nach der Reflexion kehrt es durch das Zahnrad zum Beobachter zurück. In Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des Zahnrades, trifft das Licht auf dem Rückweg entweder auf einen Zahn oder eine Lücke, es ist also entweder dunkel oder hell. Aus Drehgeschwindigkeit und Spiegelentfernung lässt sich  $c$  bestimmen.

Dieses Grundprinzip wurde verfeinert und modifiziert, z.B. als Drehspiegelmethode (Focault, Michelson). Mittlerweile ist die Lichtgeschwindigkeit so genau messbar geworden, dass sie als fester Zahlenwert definiert und stattdessen das Meter als davon abgeleitete Größe betrachtet wird.

### 2.2 Messmethode

Der hier verwendeten Methode liegt eine ähnliche Idee zugrunde wie der Zahnradmethode von Fizeau. Allerdings wird bei uns am Ende nicht die Amplitude betrachtet, sondern der Phasen-

unterschied, welcher durch die Laufzeit des Lichtes entsteht (vgl. Anhang). Die Modulation des Lichtstrahles geschieht elektronisch. Je höher die Modulationsfrequenz, desto kürzer ist die Wegstrecke, nach deren Durchlaufen bereits eine gut messbare Phasenverschiebung (sinnvollerweise in der Größenordnung einer halben Periodendauer bzw. Modulationswellenlänge) entsteht. Bei  $f_m \approx 50$  MHz genügt die Länge eines Labortisches (1.50 m), bei Fizeau waren einige Kilometer erforderlich.

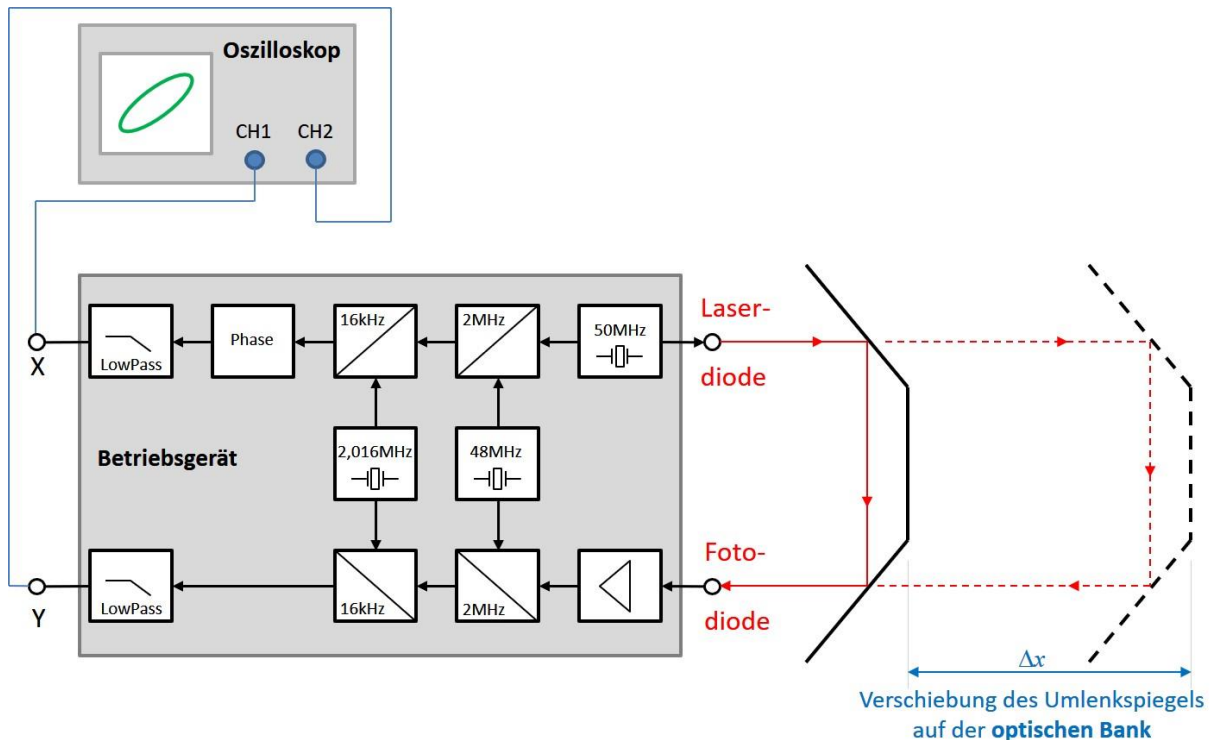


Bild 1: Messaufbau zur Lichtgeschwindigkeitsmessung: Referenzsignal X wird an den Oszi-Eingang CH1 (Kanal 1) angelegt. Das empfangene Messsignal am Ausgang Y wird zum Vergleich an den Oszi-Eingang CH2 (Kanal 2) gelegt.

Den prinzipiellen Messaufbau zeigt Bild 1. Er besteht aus einem Betriebsgerät, einer optischen Bank mit Umlenkspiegel und einem Oszilloskop. Im Betriebsgerät befindet sich ein Laser, dessen Abstrahlung mit  $f_m = 50.0$  MHz moduliert wird. Geräteintern wird ein zur Abstrahlung proportionales Referenzsignal bereitgestellt, das an den Oszi-Eingang CH1 angelegt wird. Der modulierte Lichtstrahl durchläuft entlang der optischen Bank eine äußere Wegstrecke und wird durch die Spiegelanordnung auf eine Fotodiode zurückgelenkt. Das modulierte aber wegen des längeren Lichtweges in seiner Phase veränderte Empfangssignal liegt am Eingang CH2.

Im DUAL-Betrieb wird die Phasenverschiebung, die der Messtrahl beim Zurücklegen des äußeren Weges gegenüber dem Referenzsignal erfährt, sichtbar und kann gemessen werden. Im speziellen Fall der Phasenverschiebung um eine halbe Periode lässt sich die Messung durch die Anwendung von Lissajousfiguren (vgl. Anhang) verbessern. Für  $\varphi = 0$  bzw.  $\varphi = 180^\circ$  entstehen dann zwei (schrägliegende) Geraden, die sich sehr genau einstellen lassen.

### 2.3 Auswertung für Luft

Zur Messung der Lichtgeschwindigkeit in Luft wird der Lichtweg um  $\Delta s = 2 \cdot \Delta x$  vergrößert (vgl. Bild 1), so dass eine Phasenänderung von  $\varphi = 0$  nach  $\varphi = 180^\circ$  bzw. umgekehrt eintritt. Das Licht benötigt für diesen Weg die Zeit:

$$\Delta t = \frac{1}{2} T_m = \frac{1}{2 f_m}$$

( $f_m$  ... Modulationsfrequenz,  $T_m$  ... zugehörige Periodendauer).

Damit ergibt sich die Lichtgeschwindigkeit in Luft:

$$c_L = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2\Delta x \cdot 2f_m = 4f_m \cdot \Delta x \quad (1).$$

#### 2.4. Auswertung für ein Medium

Die Lichtgeschwindigkeit  $c_M$  in einem Medium wie Wasser oder Glas wird durch Vergleich mit der Lichtgeschwindigkeit in Luft  $c_L$  gemessen (Bild 2). Die erste Messung wird mit eingelegtem Medium durchgeführt. Der Lichtstrahl durchläuft im Medium die Strecke  $l$  (bei doppeltem Durchlauf ist der Weg  $2 \cdot l$ ). Gleichzeitig wird die Phasenlage des durchlaufenden Strahls für Position  $x_1$  manuell am Betriebsgerät auf 0 oder  $\pi$  (bzw.  $180^\circ$ ), also „schräge Gerade“ eingestellt. In einer zweiten Messung wird das Medium entfernt. Dabei ändert sich die Lissajousfigur: aus der Gerade wird wieder eine Ellipse. Um die ursprüngliche Phasenlage (und damit den gleichen optischen Weg) einzustellen, muss der Lichtweg in Luft vergrößert werden. Dieses geschieht dadurch, dass man die Spiegel um die Strecke  $\Delta x$  von der Lichtquelle weg verschiebt.

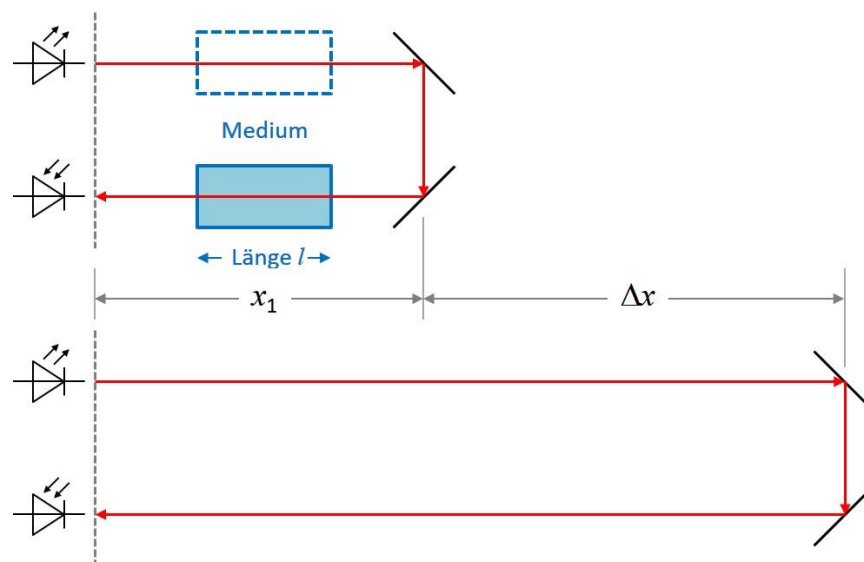


Bild 2: Messung der Lichtgeschwindigkeit in anderen Medien als Luft.

Gleiche Phasenlage bei den beiden Messungen bedeutet auch gleiche optische Wege. Wird das zu untersuchende Medium vom Lichtstrahl einmal durchlaufen, so gilt:

$$n_M \cdot l + l = 2l + 2 \cdot \Delta x$$

$$n_M = 1 + \frac{2\Delta x}{l} \quad (2)$$

( $n_M$  ... Brechzahl des Mediums).

Wird das zu untersuchende Medium vom Lichtstrahl zweimal durchlaufen (auf Hin- und Rückweg), gilt dementsprechend:

$$2 \cdot n_M \cdot l = 2l + 2 \cdot \Delta x$$

$$n_M = 1 + \frac{\Delta x}{l} \quad (3)$$

Damit kann nach Gl. 2 bzw. Gl. 3 die Brechzahl des Mediums und durch Vergleich mit Luft ( $n_L = 1$ ) die Lichtgeschwindigkeit berechnet werden:

$$c_M = \frac{c_L}{n_M} \quad (4).$$

### 3. Versuchsdurchführung

#### 3.1 Oszilloskop

Hinweise zur Bedienung des Oszilloskops finden Sie im Anhang.

Die Modulationsfrequenz von 50.0 MHz (quarzstabilisiert) ist zur Darstellung von Sende- und Empfangssignal auf dem Oszilloskop auf ca. 16 kHz herabgesetzt.

#### 3.2 Justierung

Um gute Messwerte zu erhalten, ist eine saubere Justierung des Strahlengangs erforderlich. Testen Sie durch Verschieben der Umlenkspiegel auf der optischen Bank, ob der Laserstrahl stets mit hinreichender Intensität auf die Empfangsdiode fällt (auch nach dem Einbringen von brechzahländernden Medien in den Strahlengang). Ist das nicht der Fall, muß die Anordnung vor Messbeginn nachjustiert werden. Hinweise dazu finden Sie am Versuchsplatz.

#### 3.3 Messung in Luft

Nehmen Sie im DUAL-Betrieb eine Messreihe auf, welche die Zunahme des Phasenunterschiedes mit größer werdendem Abstand des Spiegels zeigt. Das kann so erfolgen, dass man den Spiegel zunächst in die Nähe des Betriebsgerätes stellt, die Phase auf Null regelt und dann die Spiegelentfernung  $\Delta x$  in z.B. 40cm-Schritten vergrößert und jeweils die Phasendifferenz  $\Delta\varphi$  misst (Gl. 5). Trägt man  $\Delta\varphi$  über  $\Delta x$  grafisch auf, sollte sich ein linearer Zusammenhang ergeben. Die Strecke  $\Delta x$ , bei der die Differenz  $T_m/2$  (also  $\Delta\varphi = 180^\circ$  bzw.  $\pi$ ) erreicht, kann der Grafik entnommen werden und dient zur Berechnung von  $c$ .

Genauer wird die Messung, wenn man in den XY-Betrieb schaltet und Lissajous-Figuren nutzt. Beginnen Sie diesmal am besten mit einem möglichst großen Abstand, stellen als Lissajous-Figur mit Hilfe des Phasenreglers am Betriebsgerät eine schrägliegende Gerade ein und verringern dann den Abstand so weit, dass wieder eine Gerade (diesmal in die andere Richtung geneigt) entsteht. Die Strecke  $\Delta x$  sollte auf diese Weise noch etwas genauer messbar sein. Berechnen Sie  $c$ , und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem erwarteten Wert!

### 3.4 Messung im Medium

Bringen Sie das Medium (Wasserküvette oder Glasblock) in den Strahlengang (möglichst nahe an den Laser), den Umlenkspiegel dicht dahinter und stellen eine schrägliegende Gerade ein. Entfernen Sie das Medium wieder (aus der Geraden wird jetzt eine Ellipse) und verschieben den Spiegel so weit nach hinten, dass wieder die Gerade entsteht. Aus der Wegdifferenz  $\Delta x$  und den Abmessungen der Körper kann über Gl. 2 bzw. 3 die Brechzahl und über Gl. 4 die Lichtgeschwindigkeit im jeweiligen Medium berechnet werden.

Wiederholen Sie diese Messungen mehrmals (ggf. auch in umgekehrter Reihenfolge, d.h. zuerst ohne Medium, dann mit). Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Tabellenwerten!

### 3.5 Hinweise zur Genauigkeitsabschätzung

Die Messgenauigkeit der Ergebnisse hängt hauptsächlich davon ab, wie genau die beiden Spiegeleinstellungen gemessen werden können. Dabei ergibt sich der Fehler der Verschiebung  $\Delta x$ , also mathematisch geschrieben  $\Delta(\Delta x)$  aus der Addition der Einzelfehler, die sich wiederum aus der Ablesegenauigkeit des Massstabes und der Unsicherheit am Oszi (wann ist die Figur tatsächlich eine exakte Gerade?) zusammensetzen. Es ist sinnvoll, die Einstellungen mehrmals durchzuführen und am Ende einen Mittelwert zu bilden (mit der Streuung der Einzelwerte als Fehler).

Die Längen  $l$  von Wasserküvette und Glasblock einschließlich ihre Genauigkeiten  $\Delta l$  sowie die Genauigkeit der Modulationsfrequenz  $\Delta f_m$  finden Sie am Platz.

Bei der Ermittlung von  $c_L$  (Gl.1) werden die relativen Fehler addiert:  $\Delta c_L/c_L = \Delta(\Delta x)/\Delta x + \Delta f_m/f_m$  (bei  $c_M$  (Gl.4) ebenso:  $\Delta c_M/c_M = \Delta c_L/c_L + \Delta n_M/n_M$ ) und anschließend dann daraus die absoluten Fehler  $\Delta c_L$  bzw.  $\Delta c_M$  berechnet.

In Gl.2 und 3 betrifft die Addition der relativen Fehler (plus Umrechnung in Absolutfehler) jeweils den Summanden, der zur „1“ dazuaddiert wird. Fragen Sie im Zweifelsfall Ihren Assistenten. Alternativ kann hier auch die „Einsetzmethode“ (Max./Min.) Anwendung finden.

## Anhang

### Anhang 1: Oszilloskop

Die Arbeit mit dem Oszilloskop ist neben der Messung von  $c$  ein Lehrziel dieses Versuchs. In unserem Experiment wird ein analoges Zweistrahloszilloskop verwendet. Ausführliche Erläuterungen (einschließlich Abbildung) dazu gibt es in der Anleitung zum Versuch 330. Nachfolgend werden die wichtigsten Funktionen und Bedienelemente kurz vorgestellt: Signale (sinnvollerweise periodische Signale, z.B. Sinus) können an den Eingang 1 (Kanal 1, CH1) und/oder CH2 angelegt werden. Ihre zeitlichen Verläufe werden einzeln (CH1, CH2) oder gemeinsam (DUAL) am Bildschirm dargestellt. Die  $x$ -Achse (Zeit in s, ms,  $\mu$ s) wird über TIME/DIV, die  $y$ -Achse (Amplitude, Spannung in V) über VOLTS/DIV eingestellt (DIV entspricht 1 cm). Über Position X bzw. Y können die Signale nach rechts/links bzw. oben/unten verschoben werden. Getriggert wird im Versuch generell intern (INT) auf TRIGGER SOURCE CH1 oder CH2 (dazu den Assistenten befragen). Im XY-Betrieb wird das Zusammenspiel beider Signale als Lissajous-Figur dargestellt. Die Regler INTEN und FOCUS regeln Helligkeit und Schärfe

des Bildes. Alle weiteren Knöpfe werden nicht benötigt, bei Interesse wenden Sie sich bitte an den Assistenten.

Zur Bestimmung der Phasenverschiebung werden im DUAL-Betrieb beide Sinussignale geeignet (formatfüllend, symmetrisch zur  $x$ -Achse) dargestellt, auf der  $x$ -Achse die gesuchten Strecken (volle Periode  $T$  und Zeitverschiebung  $t$ ) in cm so genau wie möglich gemessen und über TIME/DIV in  $\mu\text{s}$  umgerechnet. Über die Beziehung

$$t / T = \varphi / 360^\circ \quad (5)$$

kann die Phasenverschiebung  $\varphi$  berechnet werden.

Zur Betrachtung der Lissajous-Figuren wird auf XY-Betrieb umgeschaltet (hier: den TIME/DIV-Regler nach ganz rechts drehen, bei vielen Oszis gibt es dafür eine separate Taste).

## Anhang 2: Elektromagnetische Wellen

Die Ausbreitung einer ebenen elektromagnetischen Welle  $E(z,t)$  (diese Eigenschaft hat auch das Licht) im Vakuum längs der Koordinate  $z$  kann durch einen Ausdruck der Gestalt

$$E(z,t) = \hat{E} \cdot \sin\left(2\pi \cdot ft - 2\pi \cdot \frac{z}{\lambda}\right) \quad (6)$$

beschrieben werden, wobei  $t$  die Zeit,  $f$  die Lichtfrequenz und  $\lambda$  die Lichtwellenlänge sind.

Den Ausdruck in der Winkelfunktion  $2\pi \cdot \left(ft - \frac{z}{\lambda}\right)$  nennt man die Phase  $\varphi$  der Welle.

Beobachtet man einen beliebigen Punkt mit konstanter Phase, z.B. mit  $\varphi = 0$

$$\varphi = 2\pi \left(ft - \frac{z}{\lambda}\right) = 0 \quad (7)$$

so bewegt sich dieser mit der Phasengeschwindigkeit  $c$

$$c = \frac{dz}{dt} = f \cdot \lambda \quad (8)$$

entlang der Ausbreitungsrichtung  $z$ . Beim Durchlaufen eines Mediums mit der Brechzahl  $n_M$  ändert sich die Phasengeschwindigkeit zu

$$c_{\text{Medium}} = \frac{c}{n_M} \quad (9),$$

wobei die Stoffkonstante  $n_M$  die optische Brechzahl ist, die wegen der Materialdispersion [ $n(f)$  bzw.  $n(\lambda)$ ] noch von der Lichtfrequenz  $f$  abhängt.

## Anhang 3: Phasenmessverfahren

Beim **Phasenmessverfahren** wird ein Lichtstrahl **in seiner Intensität** periodisch mit der Modulationsfrequenz  $f_m$  moduliert, wie es Bild 3 zeigt. Dabei sind:

$$\begin{aligned}
 & f_m && \text{Modulationsfrequenz [Hz]} \\
 T_m = 1/f_m & && \text{Modulationsperiode [s]} \\
 \lambda_m = c \cdot T_m = c/f_m & && \text{Modulationswellenlänge [m]}
 \end{aligned}$$

Die **Phasenlage dieser Intensitätsmodulation** breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  (genauer: mit der Gruppengeschwindigkeit) aus und hat nach der Zeit  $T_m = 1/f_m$  eine Wegstrecke von  $\lambda_m = c/f_m$  zurückgelegt.

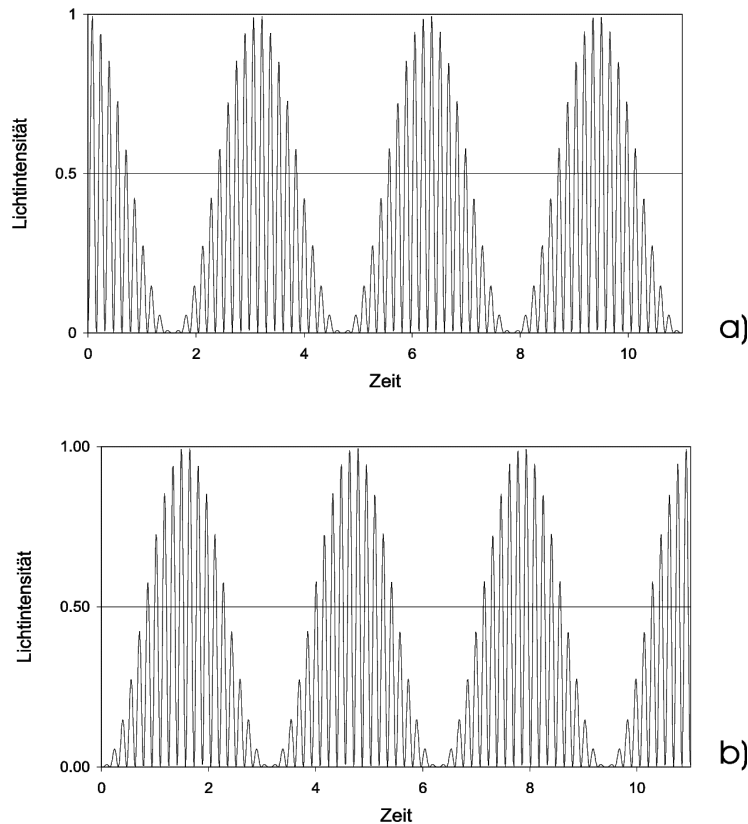


Bild 3: Momentbilder eines modulierten Lichtstrahles, die im Zeitabstand von  $T_m/2$  für a)  $t = 0$  und b)  $t = T_m/2$  aufgenommen wurden.

Bild 3 zeigt beispielhaft zwei Momentaufnahmen einer Welle, die im Zeitabstand von  $T_m/2$  aufgenommen wurden. Die Welle ist dabei um  $\lambda_m/2$  weitergelaufen. Die Welle in b) hat jetzt einen Phasenunterschied von  $\pi$  gegenüber der Welle in a). Die Messung der Phasenunterschiede erfolgt einfach und elegant mit Hilfe von Lissajousfiguren (Bild 4).

#### Anhang 4: Lissajousfiguren

Phasenverschiebungen zwischen zwei periodischen Verläufen  $X(t)$  und  $Y(t)$  mit

$$\begin{aligned}
 X(t) &= X_o \cdot \cos(2\pi f_1 t) \quad \text{und} \\
 Y(t) &= Y_o \cdot \cos(2\pi f_2 t + \varphi)
 \end{aligned}$$

lassen sich bequem mittels Lissajousfiguren darstellen und ausmessen. Dazu betreibt man ein Zweistrahloszilloskop im X-Y-Modus und legt an die beiden Eingänge die Signale  $X(t)$  und  $Y(t)$  an. Der Elektronenstrahl des Oszilloskops wird jetzt gleichzeitig in Horizontalrichtung mit

$X(t)$  und in Vertikalrichtung mit  $Y(t)$  abgelenkt. Setzt man voraus, dass  $f_1 = f_2$  ist, so wird die entstehende Lissajousfigur signifikant durch die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen  $Y(t)$  und  $X(t)$  bestimmt.

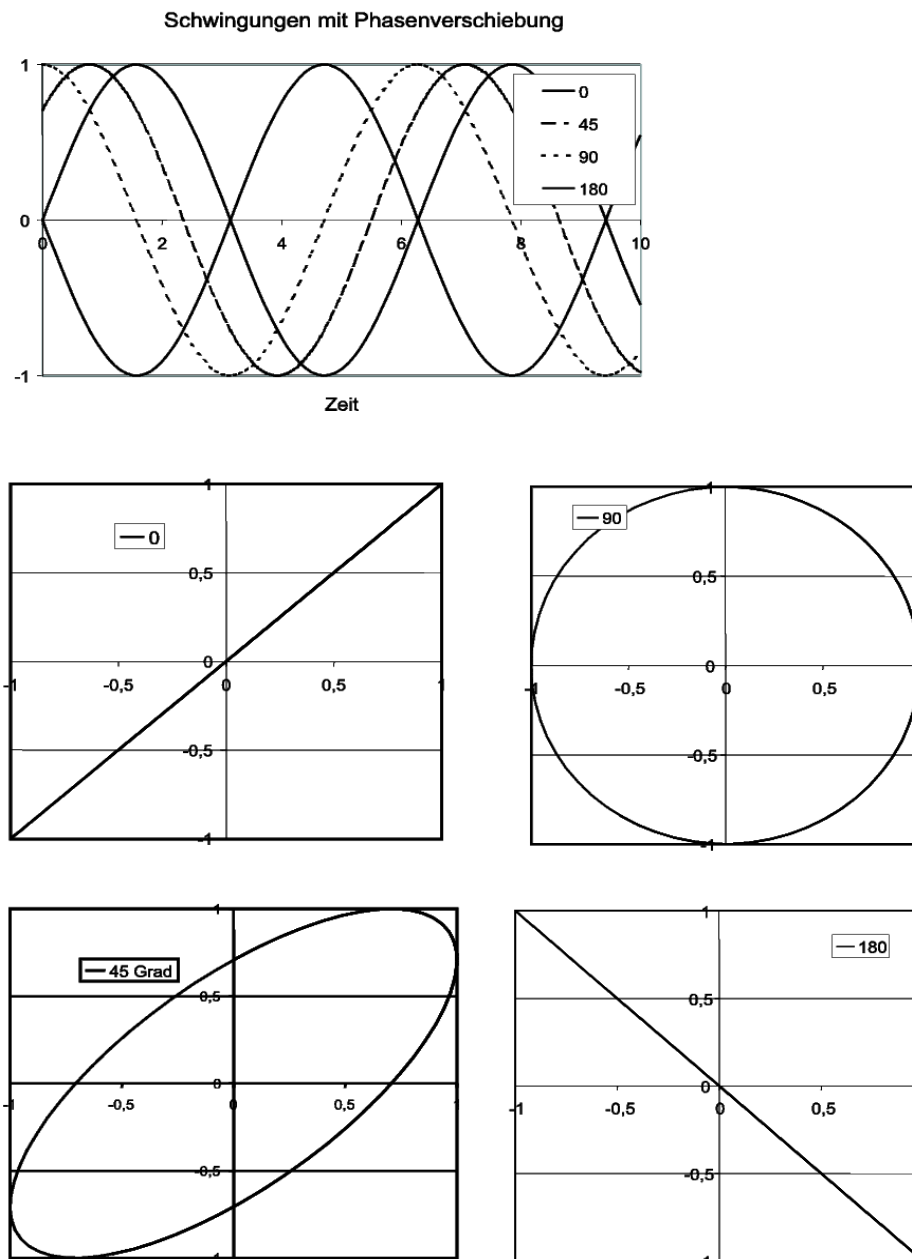


Bild 4: Phasenverschiebung und Lissajousfiguren.