

## V 321

# Kondensator, Spule und Widerstand

## Zeit- u. Frequenzverhalten

### 1. Aufgaben:

- 1.1 Bestimmen Sie das Zeit- und Frequenzverhalten der Kombinationen von Kondensator und Widerstand bzw. Spule und Widerstand.
- 1.2 Ermitteln Sie die Zeitkonstanten und Grenzfrequenzen beider Baugruppen.

### 2. Grundlagen:

Stichworte: Kapazität, Induktivität, Integrator, Tiefpass, Differentiator, Hochpass.

Eine der wichtigsten Grundschaltungen der Elektrotechnik stellen die Baugruppen aus Widerstand R, Kapazität C und Induktivität L dar. Die Kombinationen der 3 Grundbauelemente ergeben je nach Anordnung der Elemente verschiedene Charakteristika: RC-Glied, LR-Glied = Tiefpass (Integrator), CR-Glied, RL-Glied = Hochpass (Differentiator). Die Kombinationen aus R und C bzw. R und L soll hier behandelt werden.

#### Einschalten (Aufladung) des Kondensators:

$$U_C(t) = U_0 \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad I_C(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1)$$

Die Spannung am Kondensator  $U_C$  wächst mit der Zeitkonstante  $\tau$  von 0 bis zur Spannung  $U_0$  an.

Der Ladestrom  $I_C$  klingt mit der Zeitkonstante  $\tau$  vom Anfangswert  $I(t=0) = I_0 = U_0/R$  exponentiell auf Null ab.

#### Zeitkonstante:

Die Zeitkonstante  $\tau$  für die Aufladung ist die Zeitdauer, in der die Spannung auf  $1-1/e$  (ca.2/3) des Maximalwertes  $U_0$  angestiegen ist.

Beim Entladen ist  $\tau$  die Zeit, in der die Spannung von  $U_0$  auf  $1/e$  (ca.1/3) abgefallen ist.

Die Zeitkonstante  $\tau$  beim Kondensator ist das Produkt aus Kapazität C und dem Widerstand R, über den der Kondensator aufgeladen wird.

$$\tau = R \cdot C \quad (2)$$

#### Ausschalten (Entladung) des Kondensators:

Im Entladungsfall ergeben sich die Kondensatorspannung  $U_C(t)$  sowie der Entladestrom  $I(t)$  zu:

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad I_C(t) = -I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3).$$

Der Entladestrom  $I_C$  fällt mit der Zeitkonstanten  $\tau$  vom Anfangswert  $I(t=0) = I_0 = U_0/R$  exponentiell auf Null ab. Die Spannung am Kondensator  $U_C$  fällt mit der Zeitkonstanten  $\tau$  vom Anfangswert  $U_0$  exponentiell auf Null ab, wobei R jetzt der Widerstandswert ist, über den sich der Kondensator entlädt.

**Einschalten der Spule:**

$$U_L(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad I_L(t) = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (4)$$

**Ausschalten der Spule:**

$$U_L(t) = -U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad I_L(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5)$$

Bei einer Induktivität ergibt sich die Zeitkonstante  $\tau$  als Quotient aus Induktivität  $L$  und dem Widerstand  $R$ , über den der Strom beim Einschalten b.z.w. Ausschalten fließt.

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (6)$$

**2.1 Kondensator und Widerstand**

Da das RC-Glied unter bestimmten Bedingungen elektronisch integrierend wirkt und mit dem CR-Glied elektronisch differenziert werden kann, benutzt man auch die Bezeichnungen Integrator und Differentiator für diese Baugruppen.

Je nachdem über welchem Bauelement (C oder R) man die Ausgangsspannung abgreift unterscheidet man also zwischen dem RC- und CR-Glied. Bezüglich des Zeit- und Frequenzverhaltens unterscheiden sich beide.

Legt man an die Reihenschaltung eines Widerstandes  $R$  und einer Kapazität  $C$  eine Eingangsspannung und greift die Ausgangsspannung über  $C$  ab erhält man einen Tiefpass b.z.w. einen Integrator. Das Zeitverhalten wurde in 2. für das Ein- u. Ausschalten beschrieben.

Vertauscht man  $R$  und  $C$  in der Schaltung erhält man einen Hochpass b.z.w. Differentiator (CR- Glied). Auch hier gibt es ein typisches Zeitverhalten für das Ein- u. Ausschalten.

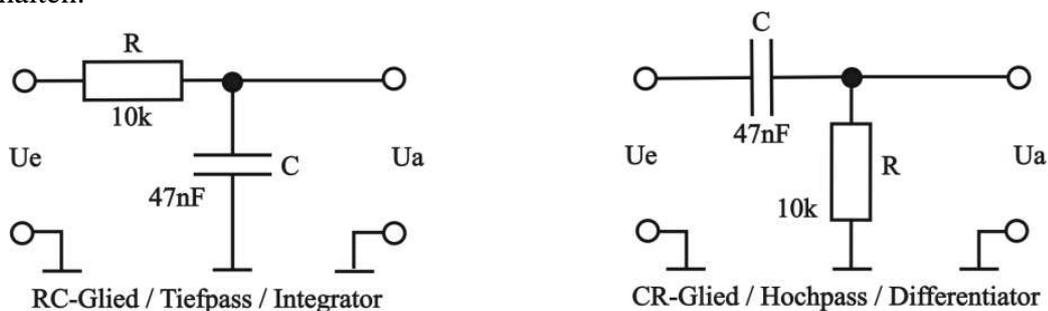


Abb.1 Schaltbild RC- u. CR-Glied

Neben dem Verhalten eines RC Gliedes im Zeitbereich kann man auch die Ausgangsspannung in Abhängigkeit der Frequenz betrachten.

In der Technik spielt diese Funktion zur Signalverarbeitung als Filter ebenfalls eine wichtige Rolle. Es ergibt sich beim RC-Glied eine Tiefpassfunktion (bei konstanter Eingangsspannung nimmt die Ausgangsspannung mit steigender Frequenz ab) und beim CR-Glied eine Hochpassfunktion (bei konstanter Eingangsspannung nimmt die Ausgangsspannung mit steigender Frequenz zu).

Das Frequenzverhalten ergibt sich aus dem frequenzabhängigen Widerstand des Kondensators.

$$\text{Betrag des kapazitiven Widerstandes beim Kondensator } X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (7)$$

Wir haben es beim Kondensator mit einem „Blindbauelement“ zu tun. Man darf also die Betrachtung einer Phasenverschiebung nicht vernachlässigen.

Um die Spannungsverhältnisse an R und C ausrechnen zu können muss man in der komplexen Zahlenebene arbeiten. Deshalb müssen die einzelnen Teilspannungen quadratisch addiert werden.

Es gilt:

$$U_e^2 = U_R^2 + U_C^2 \quad (8)$$

Hier ist  $U_e$  die Eingangsspannung,  $U_R$  die Spannung am Widerstand (auf der reellen Achse) und  $U_C$  die Spannung am Kondensator (auf der imaginären Achse). Die Beträge (Amplituden) addieren sich wie im rechtwinkligen Dreieck und dieser Zusammenhang kann graphisch sehr gut dargestellt werden:

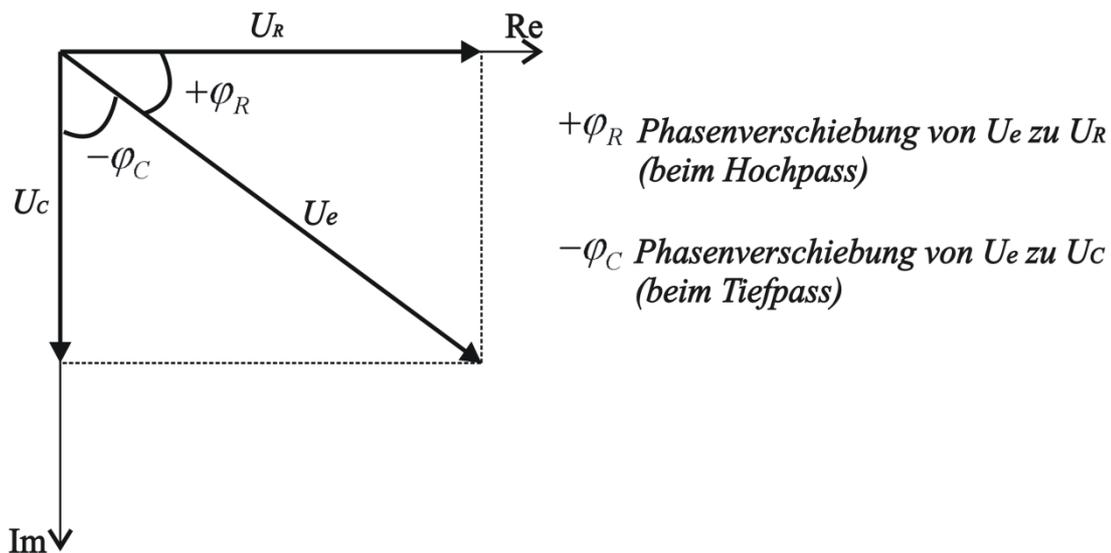


Abb.2 Phasenverschiebung am RC-Glied

Für die RC- und CR-Glieder gilt weiter:

Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen  $U_e$  und  $U_a$  beträgt

$$\text{beim Tiefpass } \varphi = -\arctan(\omega RC) = -\arctan\left(\frac{R}{X_C}\right) \text{ und damit } -45^\circ \text{ bei der Grenzfrequenz } \omega_g \quad (9)$$

$$\text{beim Hochpass } \varphi = +\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right) = +\arctan\left(\frac{X_C}{R}\right) \text{ b.z.w. } +45^\circ \text{ bei der Grenzfrequenz } \omega_g \quad (10)$$

### 2.2 Induktivität und Widerstand

Das Zeitverhalten des RL - Gliedes entspricht dem des CR-Gliedes (differenzierend).  
 Das LR - Glied verhält sich im Zeitbereich wie eine RC-Kombination (integrierend).

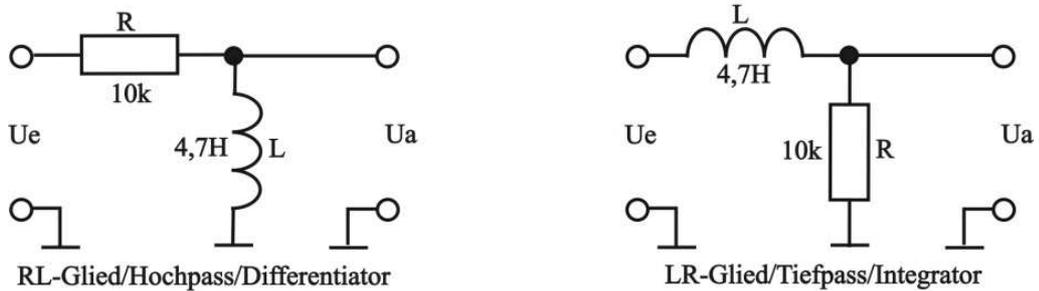


Abb.3 Schaltbild RL- u. LR-Glied

Wie bei einem RC-Glied kann man frequenzabhängige Schaltungen auch mit einem RL-Glied (Widerstand und Induktivität) realisieren. Die Eigenschaften sind hier nur "vertauscht".

Die Frequenzabhängigkeiten der Spannungsteilerschaltung entstehen auch hier wieder dadurch, dass sich der Blindwiderstand der Induktivität (Betrag:  $X_L = \omega L$ ) mit der Frequenz ändert (nimmt mit steigender Frequenz zu) während die Größe des ohmschen Widerstandes R unverändert bleibt. Dadurch ändert sich das Spannungsteilerverhältnis. Bei tiefen Frequenzen ( $\omega L < R$ ) fällt der Hauptteil der Eingangsspannung an R (grosser Widerstand) ab, während die Spannung am (kleinen) Widerstand von L nur gering ist, bei hohen Frequenzen  $\omega L > R$  ist es umgekehrt. Schickt man also ein Frequenzgemisch, z.B. Musik, als Eingangsspannung auf die LR - Kombination und greift sich die Spannung über R zur weiteren Verstärkung heraus, so werden am Ende hauptsächlich die tiefen Töne zu hören sein, die hohen sind an der Induktivität L „hängengeblieben“ (Tiefpass). Würde das Signal an L abgegriffen so passiert genau das Gegenteil (Hochpass).

Da der Widerstand einer Induktivität auch ein „Blindwiderstand“ ist ( $i\omega L$ ) müssen die zugehörigen Rechnungen mit komplexen Zahlen erfolgen. Auch hier lassen sich die Verhältnisse am Spannungsteiler grafisch durch vektorielle Addition in der komplexen Zahlenebene veranschaulichen. Hier ist  $U_e$  die Eingangsspannung,  $U_R$  die Spannung am Widerstand (auf der reellen Achse) und  $U_L$  die Spannung an der Induktivität (auf der imaginären Achse). Die Beträge (Amplituden) addieren sich wie im rechtwinkligen Dreieck:

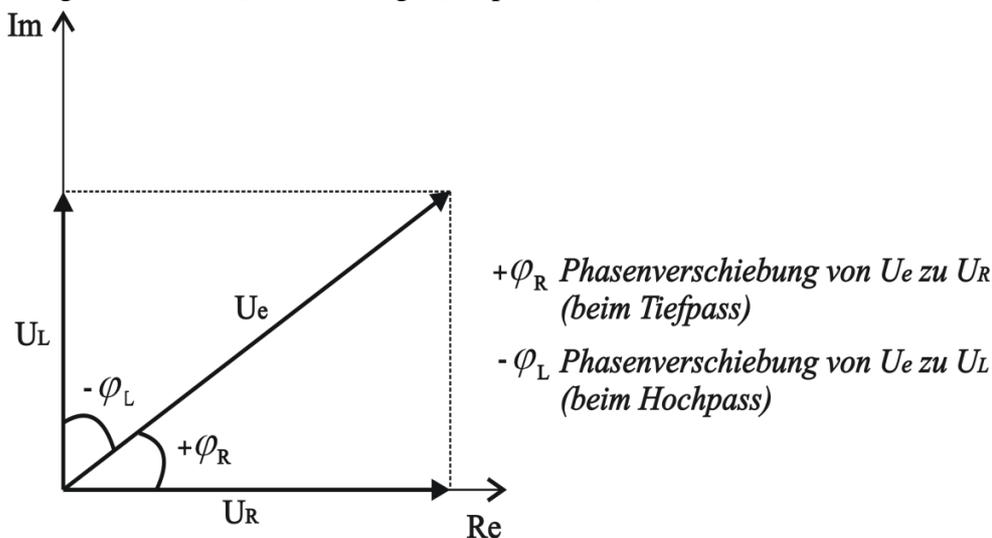


Abb.4 Phasenverschiebung RL-Glied

Auch hier gilt: 
$$U_e^2 = U_R^2 + U_L^2 \tag{11}$$

$$\text{Betrag des induktiven Widerstandes bei der Induktivität } X_L = \omega \cdot L \quad (12)$$

Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen  $U_e$  und  $U_a$  beträgt

$$\text{beim LR-Tiefpass } \varphi = + \arctan \left( \frac{\omega L}{R} \right) \quad \text{und damit } +45^\circ \text{ bei der Grenzfrequenz } \omega_g \quad (13)$$

$$\text{beim RL-Hochpass } \varphi = - \arctan \left( \frac{R}{\omega L} \right) \quad \text{b.z.w. } -45^\circ \text{ bei der Grenzfrequenz } \omega_g \quad (14)$$

### Grenzfrequenz:

Ein wichtiger Parameter zur Charakterisierung von Filtern ist die Grenzfrequenz :  
Diese erreicht, wenn die Ausgangsspannung gegenüber der Eingangsspannung auf  $1/\sqrt{2}$  abgefallen ist.

$$\text{Grenzfrequenz Definition } \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \quad (15)$$

$$\text{Grenzfrequenz } \omega_g = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{R \cdot C} \quad f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} \quad (16)$$

$$\text{Grenzfrequenz } \omega_g = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} \quad (17)$$

### 3. Versuchsdurchführung

Zum Aufzeichnen der Signalformen und Messung von Spannungen steht Ihnen der PC-gesteuerte AD-Wandler USB1208FS und die LabView Software „Yt-Analyzer (GPra)“ zur Verfügung. An Benutzen Sie für die USB1208FS folgende Anschlussbelegung:

- [A-In CH0] Eingang der Experimentierschaltung
- [A-In CH1] Ausgang der Experimentierschaltung

Für Ihr Protokoll übernehmen Sie alle aussagekräftigen Darstellungen b.z.w. Bilder des Oszilloskops und der LabView Software.

#### 3.1 Messung des Zeitverhaltens eines RC Gliedes

3.1.1 Bauen Sie nacheinander beide Schaltungen nach Abb.1 auf. Verwenden Sie die Bauelementewerte in der dort angegebenen Schaltung (  $R=10k$   $C=47nF$  ).

Benutzen Sie jetzt einen Funktionsgenerator zum Ein- und Ausschalten der Spannung am Eingang.

Legen Sie an den Eingang der Schaltungen ein Rechtecksignal (Taste "Wave") von 5V Amplitude mit einer Frequenz von 200 Hz. Der Ausgang „TTL/CMOS Output“ des Funktionsgenerators liefert diese Spannung.

Die Amplitude können Sie mit der verwendeten Software messen.

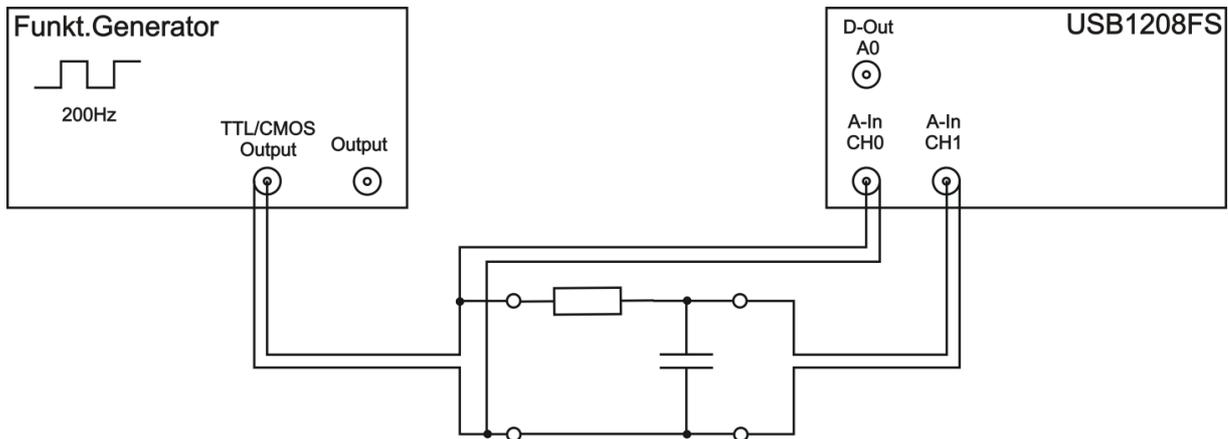
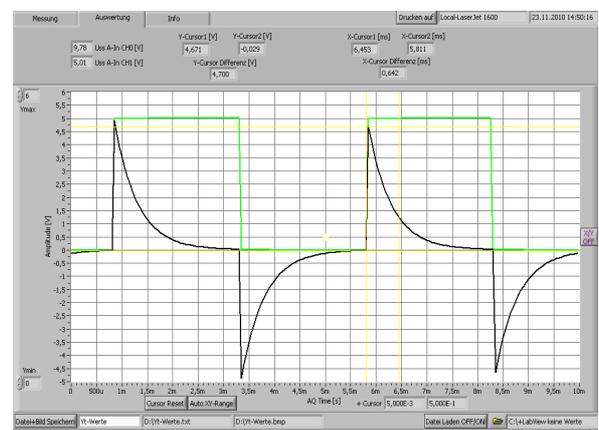
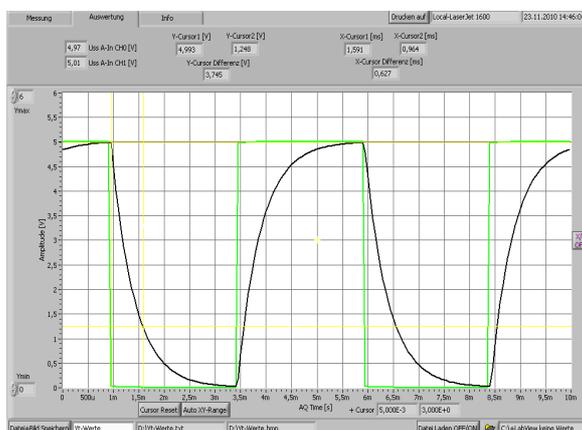


Abb.5 Schaltungsaufbau zur Messung des Zeitverhaltens

Beobachten Sie gleichzeitig Eingangssignal (A-In Ch0) und Ausgangssignal (A-In Ch1). Variieren Sie auch die AD-Wandler Parameter und beschreiben Sie ev. auftretende Probleme. Optimieren Sie dann die Messparameter des A/D Wandlers so, daß man die Zeitkonstante gut beobachten kann und max. 2 Perioden des Signals im Zeitbereich aufgenommen werden.



3.1.2 Bestimmen Sie die Zeitkonstanten  $\tau$  und vergleichen diese wieder mit den theoretischen Zeitkonstanten (Bauelementewerte) des RC- und CR-Gliedes. Nutzen Sie das Menü „Auswertung“ der Software für die Vermessung. Übernehmen Sie nur das Signalbild des CR-Gliedes für Ihr Protokoll (Funktion: „Drucken auf“).

**3.2 Messung des Frequenz- und Phasenverhaltens des RC-Gliedes im CW-Verfahren**

Verwenden Sie die gleichen Schaltungen und messen den Frequenzgang beider Baugruppen nach Abb.5 im CW (Continuous Wave) -Verfahren. Den Frequenzgang bestimmt man, durch Variieren der Frequenz und Messung der Ausgangsspannung (Voraussetzung: Eingangsspannung bleibt konstant). Für eine Simulation dieses Frequenzverhaltens benutzen Sie das LabView-Programm „RLC-Simulation“.

Die Spannungen am Eingang und Ausgang der Schaltung werden wieder mit dem LabView Messprogramm „Yt-Analyser“ und dem AD-Wandler „USB1208FS“ gemessen.

Als Quelle dient wieder der Funktionsgenerator.

Stellen Sie die Signalform Sinus-Wechselspannung (Taste "Wave") und 8V<sub>ss</sub> (Regler"Amplitude") ein. Das entspricht etwa der Stellung des „AMPL“ Reglers ca.1/2. Die Angabe V<sub>ss</sub> ist die Spitze-Spitze-Spannung in Volt und kann mit der Software gemessen werden. Das Signal liegt dann am Ausgang „Output 50Ω“ an.

Mit dem LabView-Darstellungsprogramm „Werte-zu-Graph“ können Sie die gemessenen Werte graphisch darstellen, eine txt Datei anlegen und speichern, um die Messwerte in eine andere Auswertesoftware importieren zu können.

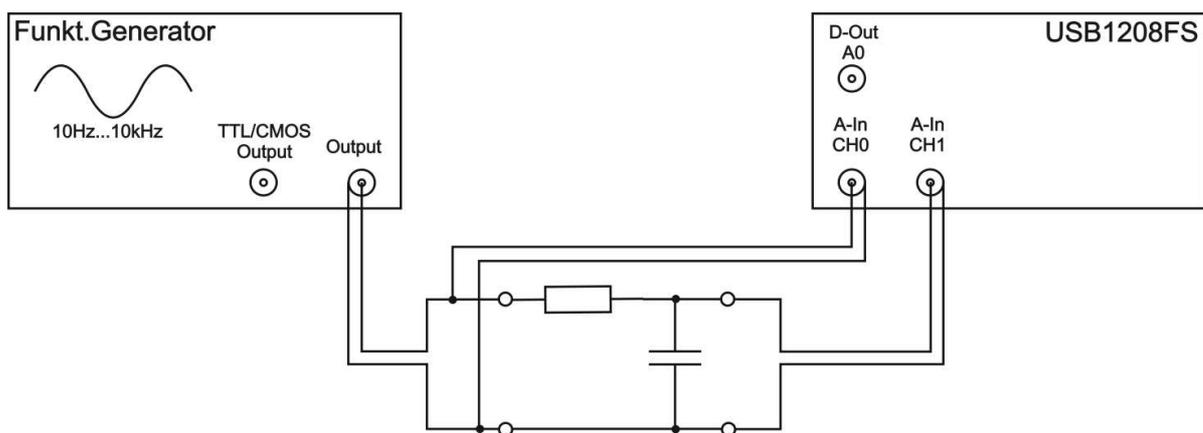
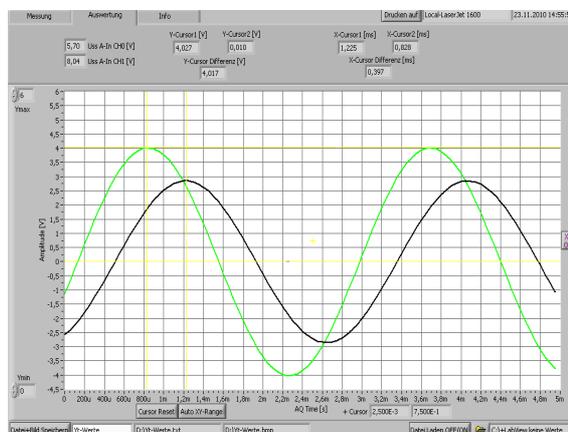


Abb.6 Schaltungsaufbau zur Messung des Frequenzverhaltens



3.2.1 Bestimmen Sie zunächst die Grenzfrequenz  $f_g$  beider Schaltungen. Die Realtime- Spannungsmessung der Software erleichtert Ihnen die Messung. Übernehmen Sie die gemessene Grafik bei der Grenzfrequenz („Drucken auf“) für Ihr Protokoll.

3.2.2 Messen Sie jetzt die Ausgangsspannung in Abhängigkeit für weitere Werte der Frequenz. Bestimmen Sie die jeweilige Phasenverschiebung (in Grad) zwischen Ein- und Ausgangssignal mit Hilfe des Zeitsignals. Dafür ist das das Menü „Auswertung“ der Software hilfreich.).

Nehmen Sie ausreichend Messwerte, um die Ausgangsamplitude und Phase in Abhängigkeit der Frequenz in einem Diagramm darstellen zu können.

Nehmen Sie 10 bis 15 Messwerte zwischen 10Hz und 10kHz auf

(z.B.: 10Hz, 20Hz, 50Hz, 100Hz, 200Hz, 400Hz, 800Hz, 1,5kHz, 3kHz, und 6kHz).

Für die Frequenzachse ist eine log.Darstellung sinnvoll. Für diese Darstellung können Sie sich am PC eine A4 Seite mit einfach log. Millimeterpapier ausdrucken (Siehe Verknüpfung auf dem Desktop).

In dieser Grafik sollte der Frequenz- u. Phasenverlauf des Hoch- u. Tiefpasses übersichtlich dargestellt werden.

Welche messtechnischen Probleme fallen Ihnen bei zunehmender Frequenz auf und worauf sind diese zurückzuführen?

### 3.3 Berechnen Sie aus dem gemessenen Tau der Aufgabe 3.1.2 die Grenzfrequenz $f_g$ .

Vergleichen Sie die aus dem Tau bestimmte Grenzfrequenz  $f_g$ , mit der hier in Aufgabe 3.3.1 direkt gemessenen Grenzfrequenz  $f_g$ .

### 3.4 Messung des Zeitverhaltens eines RL-Gliedes

Bauen Sie wieder nacheinander die Schaltungen nach Bild 2 auf.

Übernehmen Sie das Signalbild des LR-Gliedes für Ihr Protokoll

(Funktion: „Drucken auf“).

### 3.5 Messung des Frequenz- und Phasenverhaltens des RL-Gliedes im CW-Verfahren

Messungen wie Aufgabe 3.2

### 3.6 Berechnen Sie wieder aus dem gemessenen Tau der Aufgabe 3.4 die Grenzfrequenz $f_g$ .

Vergleichen Sie die aus dem Tau bestimmte Grenzfrequenz  $f_g$ , mit der hier in Aufgabe 3.5 direkt gemessenen Grenzfrequenz  $f_g$ .

#### Hinweis:

Achten Sie bei der Auswertung in Ihrem Protokoll auf eine übersichtliche Gesamtdarstellung aller gemessenen und errechneten Werte und diskutieren diese.

Beachten Sie, dass die Bauelemente R, L und C eine Herstellertoleranz von  $\pm 5\%$  haben.

Überlegen Sie welche Fehlerquellen ev. bei den einzelnen Messungen möglich waren.

#### Anhang:

$$\text{Tiefpass Übertragungsfunktion } A = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot e^{-j \arctan(\omega RC)}$$

$$\text{Betragsmäßiger Amplitudengang } |A| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\text{Hochpass Übertragungsfunktion } A = \frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega RC}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}} \cdot e^{j \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)}$$

$$\text{Betragsmäßiger Amplitudengang } |A| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}}$$