317 – Elektrischer Schwingkreis

1. Aufgaben

1.1 Untersuchen Sie das Verhalten **eines** elektrischen **Schwingkreises**! Nehmen Sie die Resonanzkurve auf und berechnen Sie Bandbreite, Güte und Reihenverlustwiderstand! Betrachten Sie auch die Phasenlage zwischen Eingangs- und Schwingkreis-Signal!

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten zweier **gekoppelter Schwingkreise**. Bestimmen Sie die Resonanzfrequenzen des gekoppelten Systems! Messen Sie Schwingungs- und Schwebungsperiode, und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Theorie!

1.3 (Zusatzaufgabe) Messen Sie das logarithmische Dekrement für unterschiedlich stark **gedämpfte Schwingkreise**! Untersuchen Sie den Einfluss des Dämpfungswiderstandes auf Dämpfungskonstante und Schwingungsfrequenz!

2. Grundlagen

Stichworte:
Schwingungsdifferentialgleichung, Amplituden- und Phasengang, Dämpfung, Bandbreite, Güte, Schwingkreiskopplung, Resonanzfrequenzaufspaltung

2.1 Der Schwingkreis

Schwingungsfähige Systeme begegnen uns an vielen Stellen, z.B. als Fadenpendel, Federschwinger, schwingende Saiten, als elektromagnetische Schwingungen, die Abstrahlung von Radiowellen oder Licht zur Folge haben, als Gitterschwingungen in Festkörpern usw. Allen Fällen ist gemeinsam, dass Energiezufuhr die Auslenkung aus einem Gleichgewichtszustand bewirkt und nachfolgend ein Wechselspiel zwischen einer Trägheits- und einer Rückstellkraft und damit eine periodische Energieumwandlung von z.B. potentieller in kinetische (und umgekehrt) beginnt. Durch Dämpfung klingt die Schwingung (bei nur einmaliger Energiezufuhr) nach mehr oder weniger langer Zeit wieder ab.

In unserem Versuch ist das schwingungsfähige System ein Parallelschwingkreis bestehend aus einer Spule (Induktivität L) und einem Kondensator (Kapazität C, Bild 1).

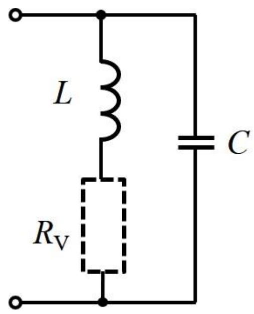


Bild 1: Parallelschwingkreis.

Zwischen Spule und Kondensator findet ein ständiger Austausch magnetischer bzw. elektrischer Feldenergie statt, der eine elektrische Schwingung mit im Idealfall konstanter Amplitude zur Folge hat. In der Praxis ist die Schwingung aufgrund unvermeidlicher Energieverluste gedämpft (ohmscher Widerstand der Spule, dielektrische Verluste des Kondensators, Streuverluste des Kreises). Die Verluste können durch einen ohmschen Widerstand R_V (Reihenverlustwiderstand) repräsentiert werden. Folgende Schwingungsgleichung lässt sich aufstellen (Gl. 16 im Anhang)

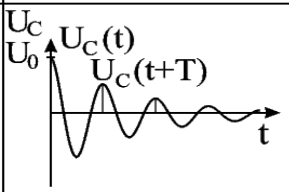
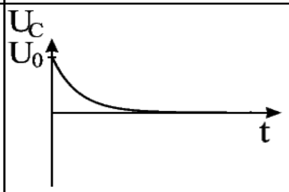
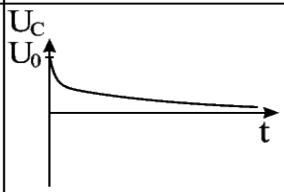
$$\ddot{U}_C + \frac{R}{L}\dot{U}_C + \frac{1}{LC}U_C = 0 \qquad (1).$$

Deren Lösung erfolgt über einen Exponentialansatz, der zu einer quadratischen Gleichung der Form:

$$\lambda^2 + 2\,\delta\,\lambda + \omega_0^2 = 0$$

führt. Mit folgender Lösung $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

ergeben sich drei Fälle:

<table>
<tr><th></th><th>Schwingfall</th><th>aperiodischer Grenzfall</th><th>Kriechfall</th></tr>
<tr><td>Dämpfung</td><td>$\delta < \omega_0$</td><td>$\delta = \omega_0;\ \omega = 0$</td><td>$\delta > \omega_0$</td></tr>
<tr><td>Zeitverlauf</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Die Lösung für den Schwingfall hat die Form

$$U_C = U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

mit der Dämpfungskonstanten

$$\delta = \frac{R}{2L} \qquad (3)$$

und der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad (4),$$

wobei ω_0 die Frequenz des ungedämpften Schwingkreises ist. Für diesen gilt die Thomsonsche Schwingungsgleichung:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{bzw.} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (5).$$

Die Dämpfungskonstante δ kann bestimmt werden, indem man das Verhältnis zweier, nach der Periode T aufeinanderfolgender Amplituden betrachtet. Dessen Logarithmus wird als „logarithmisches Dekrement" D bezeichnet

$$D = \delta T = \ln\left(\frac{U_{\mathrm{C}}(t)}{U_{\mathrm{C}}(t+T)}\right) \qquad (6).$$

Aus der Dämpfungskonstanten δ lässt sich über Gl. 3 der Reihenverlustwiderstand R_{V} berechnen. Im Experiment kann die Dämpfung des Schwingkreises zusätzlich durch einen Widerstand R_{D} erhöht werden.

2.2 Erzeugung freier Schwingungen

Um in einem Schwingkreis freie Schwingungen anzuregen, muss ihm von außen Energie durch einen kurzzeitigen Spannungsimpuls (z.B. Rechtecksignal mit nachgeschaltetem Kondensator) zugeführt werden (vgl. Bild 2).

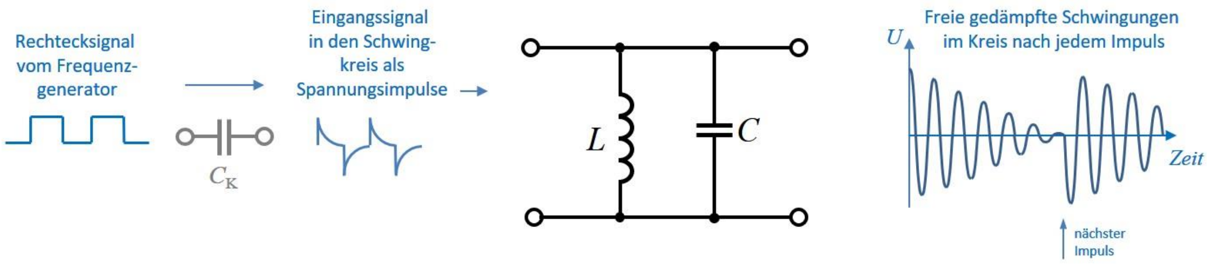


Bild 2: Eingangs- und Ausgangssignale am Schwingkreis mit freien Schwingungen.

Dadurch wird der Kondensator C im Schwingkreis aufgeladen, und es kommt in der Folge zur periodischen Umwandlung von elektrischer Feldenergie in magnetische Feldenergie und umgekehrt. Dieser Vorgang erfolgt solange, bis die Energie infolge der oben genannten Prozesse wesentlich vermindert ist (gedämpfte Schwingung).

2.3 Erzeugung erzwungener Schwingungen, Resonanz

Einem Schwingkreis können durch periodische Energiezufuhr auch Schwingungen aufgezwungen werden, deren Frequenz nicht unbedingt mit der Eigenfrequenz des Kreises übereinstimmen muss. Das tritt ein, wenn der Parallelschwingkreis mit einer Sinusspannung $U_{\sim}$ vorgegebener Frequenz f erregt wird (vgl. Bild 3).

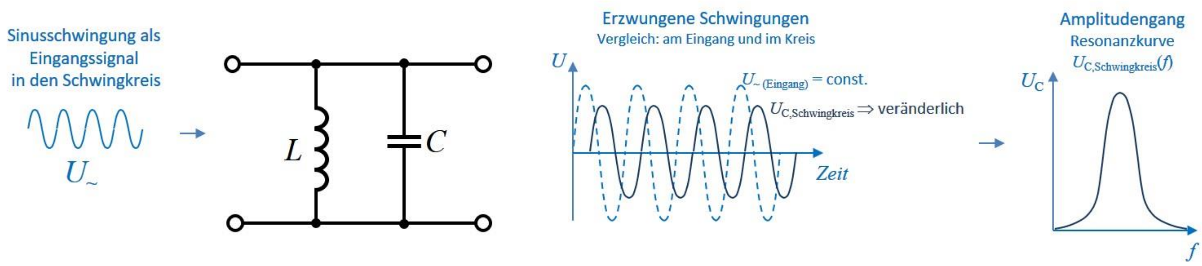


Bild 3: Eingangs- und Ausgangssignale am Schwingkreis mit erzwungenen Schwingungen.

Im eingeschwungenen Zustand entsteht dann im Schwingkreis eine Wechselspannung mit einer anderen Amplitude als die der Generatorspannung und mit einer bestimmten Phasendifferenz. Für das Amplitudenverhältnis Schwingkreis- zu Generatorspannung sowie die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ zwischen U_C und $U_\sim$ erhält man mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung die folgenden Verläufe (Amplituden- bzw. Phasengang, Bild 4). Die zugehörigen Gleichungen finden Sie im Anhang.

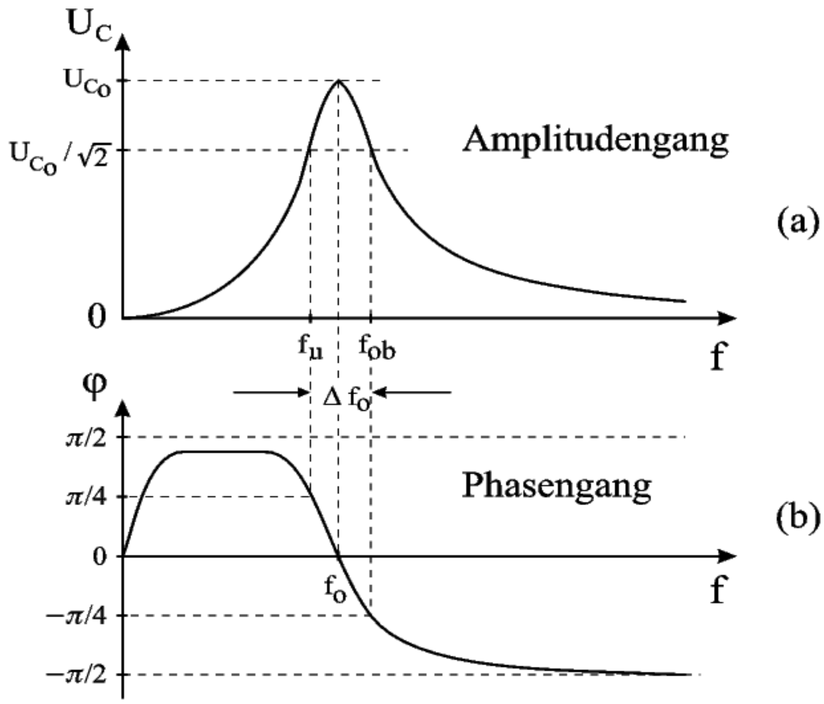


Bild 4: (a) Amplituden- und (b) Phasengang des Parallelschwingkreises.

Die Frequenzen, bei denen die Schwingkreisspannung gegenüber dem Resonanzfall auf den $1/\sqrt{2}$ -fachen Wert abgesunken ist, werden untere Grenzfrequenz f_u und obere Grenzfrequenz f_{ob} genannt. Bei diesen Frequenzen beträgt die Phasendifferenz $|\Delta\varphi| = 45°$. Als Bandbreite Δf_0 bezeichnet man die Differenz $\Delta f_0 = f_{ob} - f_u$ und als Güte Q den Quotient

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f_0} \qquad (7).$$

2.4 Fourierspektrum

Zwischen der Zeitfunktion einer freien Schwingung und der Resonanzkurve (Amplitudengang) bei der erzwungenen Schwingung besteht ein mathematischer Zusammenhang, welcher durch eine *Fouriertransformation* (vgl. Versuch 322) gegeben ist (Zeitbereich ↔ Frequenzbereich).
Der reinen, ungedämpften Sinusschwingung entspricht im Frequenzraum eine einzelne Frequenz f_0. Ist die Schwingung gedämpft, so zeigt die Fourieranalyse ein Spektrum, welches ein Maximum bei f_0 hat und nach hohen und tiefen Frequenzen hin abfällt (Bild 5). Es ist uns bereits aus dem vorhergehenden Abschnitt als Resonanzkurve bekannt. Die Bandbreite Δf_0 wird in diesem Zusammenhang als spektrale Halbwertsbreite bezeichnet. Sie ist mit dem logarithmischen Dekrement über

$$D = \frac{\pi \, \Delta f_0}{f_0} \tag{8}$$

verbunden. Aus Gl.7 und Gl.8 folgt: Q proportional $1/D$, d.h. je stärker die Dämpfung desto kleiner die Güte und desto breiter die Resonanzkurve. Die zeitliche Dämpfung einer Schwingung ist also gleichbedeutend mit einer spektralen Verbreiterung der Resonanz- oder Eigenfrequenz.

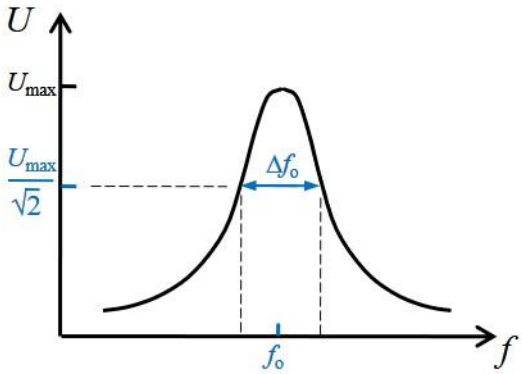


Bild 5: Fourierspektrum.

2.5 Gekoppelte Schwingkreise

Werden in der Mechanik (vgl. Versuch 120) zwei Pendel durch eine Feder verbunden, so beeinflussen sie sich gegenseitig in ihrem Schwingungsverhalten. Dasselbe passiert, wenn man zwei (nach Möglichkeit identische) Schwingkreise induktiv, d.h. über die Magnetfelder ihrer Spulen koppelt. (Auch eine kapazitive oder galvanische Kopplung wäre denkbar.) Die durch die Kopplung entstehenden Veränderungen im Verhalten der Schwingkreise sind mit denen der gekoppelten Pendel vergleichbar.
Bei freier Schwingung beobachtet man als Folge des wechselseitigen Energieaustausches zwischen beiden Kreisen eine Schwebung (Schwebungsfrequenz f_s), welche der abklingenden Sinuskurve (Grundfrequenz f_G) überlagert ist (Bild 6).

Bei der Anregung erzwungener Schwingungen zeigen sich zwei Maxima der Amplitude bei je einer Frequenz unterhalb (f_1) sowie oberhalb (f_2) der ursprünglichen Resonanzfrequenz (Bild 7). Die Stärke dieser sogenannten Resonanzfrequenzaufspaltung Δf hängt vom Kopplungsgrad k der beiden Spulen ab

$$f_{1/2} = \frac{f_0}{\sqrt{1 \pm k}} \qquad \text{und} \qquad \Delta f = f_2 - f_1 \tag{9}$$

($k = M/L$ bei induktiver Kopplung, M ist die Gegeninduktivität der Spulenanordnung).
Ist die Kopplung nur schwach, so gilt $\Delta f \approx k \cdot f_0$, und die Aufspaltung erfolgt symmetrisch zu f_0.

Mittels Fouriertransformation kann auch hier aus dem Zeitverlauf (Bild 6) das Fourierspektrum (Bild 7) berechnet werden. Umgekehrt lässt sich das Entstehen einer Schwebung aus der Überlagerung der beiden Schwingkreisfrequenzen (*Fundamentalschwingungen*) f_1 und f_2 des gekoppelten Systems erklären. Für die Schwebungsfrequenz f_S sowie die Grundschwingung unter der Einhüllenden f_G gilt

$$f_S = \frac{(f_2 - f_1)}{2} \quad \text{und} \quad f_G = \frac{(f_1 + f_2)}{2} \qquad (10).$$

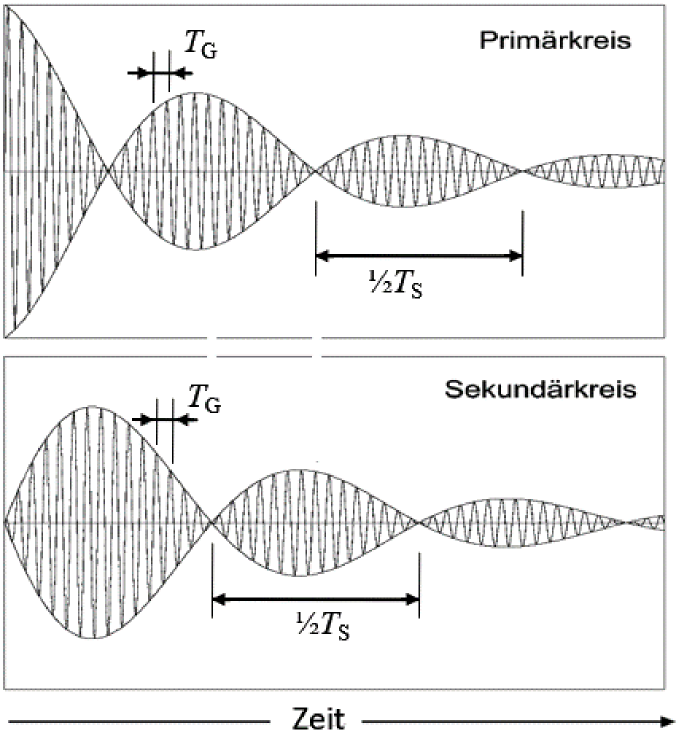


Bild 6: Freie Schwingungen gekoppelter Schwingkreise.

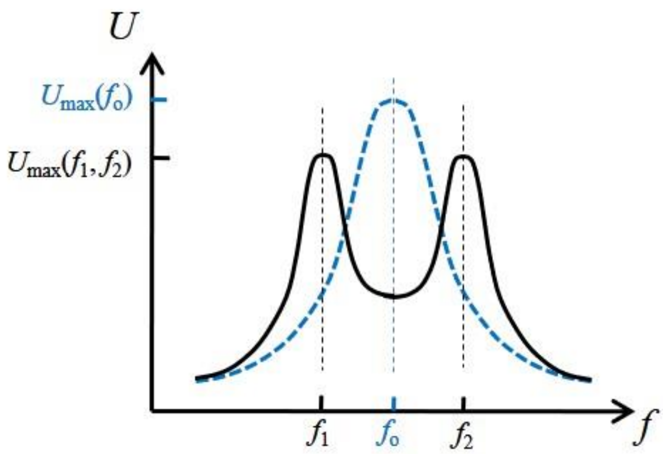


Bild 7: Resonanzfrequenzaufspaltung.

Die Resonanzfrequenzaufspaltung gekoppelter gleichartiger Schwingungssysteme ist eine fundamentale physikalische Erscheinung, die auch für mechanische und optische Oszillatoren gilt. Sie führt auch dazu, dass bei dicht gepackten atomaren Bausteinen (Gitteratome im Festkörper) sich die scharfen Energieniveaus (Eigenfrequenz) durch Vielfachaufspaltung zu Energiebändern verbreitern.

3. Versuchsdurchführung

3.1 Messplatzbeschreibung

Im Versuch verwenden Sie ein digitales Oszilloskop. Hinweise zur Bedienung liegen am Versuchsplatz aus.

Weiterhin finden Sie ein Steckbrett mit jeweils zwei Kondensatoren (10nF) und zwei einzelne Spulen á 20mH am Versuchsplatz vor. Die Spulen und die Kondensatoren sind mit (A), (B), (C) und (D) gekennzeichnet und dienen als Hinweis, welche Bauelemente für einen gemeinsamen Schwingkreis zu nutzen sind.

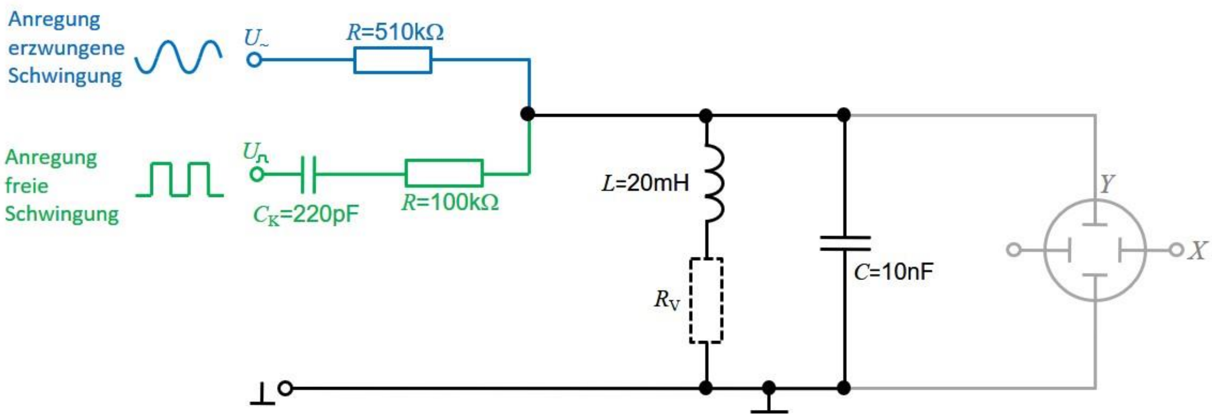


Bild 8: Schaltung.

Bauen Sie die Schaltung nach Bild 8 auf, und schließen Sie einen Sinus- bzw. Rechteckgenerator an. Die Schwingkreisspannung wird an den *Y*-Eingang „1“ des Oszilloskops gelegt. An den zweiten Eingang „2“ kann wahlweise (je nach Aufgabenstellung) das Generatorsignal oder z.B. das Signal vom zweiten Schwingkreis gelegt werden. Bei Anregung freier Schwingungen wird das Rechtecksignal an den *X*-Eingang gelegt und auf externe Triggerung geschaltet.

3.2 Freie Schwingungen (Zeitbereich)

Legen Sie ein Rechtecksignal 100 Hz an den Eingang, und optimieren Sie die Oszi-Einstellungen, so dass das Bild einer gedämpften Schwingung formatfüllend sichtbar wird. Dokumentieren Sie dieses (Abspeichern auf USB-Stick, Hinweise dazu am Platz)! Messen Sie (Cursor nutzen) die Periodendauer und berechnen Sie daraus die Resonanzfrequenz!

3.3 Erzwungene Schwingungen (Frequenzbereich)

Legen Sie das Signal eines Sinusgenerators (zuerst analog) mit einer Frequenz im Bereich der Resonanzfrequenz an den Eingang und parallel dazu an Kanal „2“ des Oszis. Schalten Sie auf DUAL-Betrieb (triggern auf Kanal 2) und beobachten Sie die Schwingkreisresonanz. Nutzen Sie nachfolgend den digitalen Frequenzgenerator, um die Resonanzfrequenz so genau wie möglich zu bestimmen. Vergleichen Sie diese mit dem theoretischen Wert. Nehmen Sie danach die Resonanzkurve auf (je 5 Messpunkte in geeigneten Abständen auf beiden Seiten).

Berechnen Sie Bandbreite, Güte und Reihenverlustwiderstand (Gl.7 und Gl. 21). Vergleichen Sie die Güte mit der anderer Schwingungen (z.B. Quarz, mechanische Pendel, Laser, …)

Beobachten Sie die Phasenverschiebung sowohl im DUAL- als auch im XY-Betrieb (Lissajous-Figur). Gilt für den Resonanzfall $\Delta\varphi = 0$? Wie verhalten sich Eingangs- und Schwingkreissignal für $f >/< f_0$ (welches läuft voraus, welches hinterher)?

3.4 Gekoppelte Schwingkreise

Ersetzen Sie Spule und Kondensator in der Schaltung durch die jeweiligen Bauelemente des Sekundärkreises. Messen Sie die Resonanzfrequenz (mit Primärkreis vergleichen). Koppeln Sie beide Schwingkreise induktiv (mit maximalem Kopplungsgrad). Bestimmen Sie die neuen Resonanzfrequenzen (Eigenfrequenzen des gekoppelten Systems). Regen Sie danach freie Schwingungen im gekoppelten System an. Optimieren Sie die Einstellungen am Oszi, so dass eine ähnliche Abbildung wie Bild 6 zu sehen ist, und dokumentieren Sie diese. Ändern Sie dabei auch den Spulenabstand und damit den Kopplungsgrad.
Messen Sie die Periodendauer der Grundschwingung f_G sowie der Schwebung f_S in beiden Kreisen (Sind sie gleich?). Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Theorie (Gl. 10).

In einem Zusatzexperiment kann man auch den Sekundärkreis (parallel zum Primärkreis) an den Generator anschließen. Messen Sie die Periodendauer der Schwingung möglichst sehr genau. Ändern Sie dann die Stromrichtung an der Sekundärspule und messen Sie die Periodendauer wieder. Es sollte sich eine deutliche Änderung ergeben, da jetzt die beiden Fundamentalfrequenzen direkt angeregt werden.

3.5 Logarithmisches Dekrement (Zusatzaufgabe)

Erzeugen Sie gedämpfte Schwingungen mit zusätzlichen Dämpfungswiderständen: $R_D = 0$, 100, 300 und 500 Ω. Dokumentieren Sie die jeweiligen Bilder. Bestimmen Sie in allen vier Fällen das logarithmische Dekrement (über mehrere Perioden mitteln) und daraus die Dämpfungskonstante δ (Gl. 6) sowie die Schwingungsfrequenz ω (Gl.4). Wie stark hat sich ω im Vergleich zu ω_0 prozentual geändert?

Nach Gl.23 (Anhang) sollte die Bandbreite $\Delta\omega_0$ der Resonanzkurve etwa doppelt so groß sein wie die Dämpfungskonstante δ. Gilt dieser Zusammenhang für $R_D = 0$? Gilt er auch für stärkere Dämpfung (dazu Resonanzkurven mit Zusatz-Dämpfungswiderstand aufnehmen)?

Anhang

Anhang 1: Schwingungsdifferentialgleichung

Zur Herleitung der Schwingungsdifferentialgleichung wird Bild 9 betrachtet.

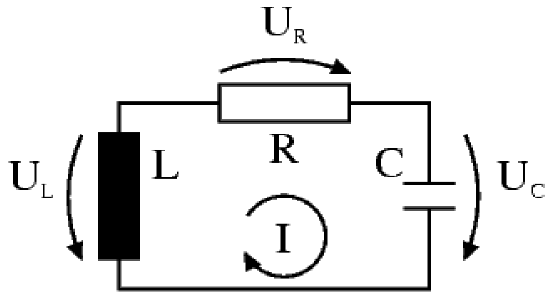


Bild 9: *L*-*C*-Parallelschwingkreis mit Reihenverlustwiderstand R_V.

Nach der 1. Kirchhoffschen Regel sind im Bild 9 die Ströme durch alle drei Bauelemente gleich

$$I_L = I_R = I_C = I = \frac{dQ}{dt} \qquad (Q \ldots \text{elektische Ladung}) \qquad (11).$$

Die 2. Kirchhoffsche Regel ergibt die Beziehung

$$U_L = U_R + U_C \qquad (12).$$

An der Spule gilt

$$U_L = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d^2Q}{dt^2} \qquad (13),$$

entsprechend am Widerstand

$$U_R = RI = R\frac{dQ}{dt} \qquad (14)$$

und am Kondensator

$$U_C = \frac{Q}{C} \qquad (15).$$

Setzt man die Beziehungen (13) bis (15) in Gl.12 ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC}U_C = 0 \qquad (16).$$

Anhang 2: Erzwungene Schwingungen, komplexe Wechselstromrechnung

Für das Spannungsverhältnis zwischen Schwingkreis- und Eingangsspannung gilt nach der Spannungsteilerregel

$$\frac{U_\mathrm{C}}{U_\sim} = \frac{Z}{Z + R_\mathrm{K}} \qquad (Z \dots \text{ Scheinwiderstand des Kreises}) \tag{17}$$

Mit $Z_\mathrm{L} = i\omega L$ (Scheinwiderstand der Spule) und $Z_\mathrm{C} = 1/(i\omega C))$ (Scheinwiderstand des Kondensators) ergibt sich für den Amplitudengang (Bild 4a)

$$\left|\frac{U_\mathrm{C}}{U_\sim}\right| = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{\left[R + R_\mathrm{K}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\right]^2 + \omega^2 \left(L + C \times R \times R_\mathrm{K}\right)^2}} \tag{18}$$

und für den Phasengang (Bild 4b)

$$\tan \Delta\varphi = \frac{\omega \times R_\mathrm{K}\left(L - L\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - C \times R^2\right)}{R^2 + R\,R_\mathrm{K} + \omega^2 \times L^2} \tag{19}$$

mit $\omega = 2\,\pi f$ und $R = R_\mathrm{D} + R_\mathrm{V}$.

Anhang 3: Bandbreite, Güte, Reihenverlustwiderstand, Impedanz, log. Dekrement, Dämpfungskonstante (kleine Formelsammlung)

Bandbreite: $B = \Delta f_0 = f_\mathrm{ob} - f_\mathrm{u}$ (20)

Güte Q

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \qquad \text{bzw.} \qquad Q = \frac{Z_0}{R_\mathrm{V}} = \frac{\omega_0 L}{R_\mathrm{V}} = \frac{1}{\omega_0 C R} \tag{21}$$

mit $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (Impedanz, Kreiswiderstand, im Resonanzfall reell).

Aus Gl. 8 folgt $Q = \frac{\pi}{D}$ oder $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$ (22)

und daraus $\delta = \frac{1}{2}\Delta\omega_0$. (23)