211 – Viskosität von Luft

1. Aufgaben

1.1 Messen Sie die Viskosität η von Luft in Abhängigkeit vom Druck p. Stellen Sie η als Funktion von p grafisch dar!

1.2 Interpretieren Sie die Messkurve!

2. Grundlagen

Stichworte:
innere Reibung in Gasen, laminare Strömung, mittlere freie Weglänge, gaskinetischer Moleküldurchmesser, Drehschwingung

2.1 Innere Reibung in Gasen

Wenn Schichten eines Gases wirbelfrei aneinander gleiten (laminare Strömung) dann wirkt eine Reibungskraft F_R auf sie, die der Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet ist und vom Gradienten der Geschwindigkeit senkrecht zur Bewegungsrichtung abhängt. Für differentiell dünne Schichten gilt:

$$F_R = -\eta A \frac{dv}{dr}$$

(1),

η .. dynamische Viskosität (Einheit: $1\frac{Ns}{m^2} = 1\,Pa{\cdot}s$), $\frac{dv}{dr}$ radiales Geschwindigkeitsgefälle (-gradient) , A ... Fläche der gleitenden Schichten.

Die innere Reibung in Gasen kann mit Hilfe der kinetischen Gastheorie verstanden werden. Sie ist das Ergebnis der statistischen Stöße der Gasmoleküle untereinander und führt zu einem Impulstransport quer zur Bewegungsrichtung. Es gilt die Beziehung

$$\eta = \frac{1}{3}\,\bar{v}\cdot\Lambda\cdot\rho \qquad (2),$$

mit Λ .. mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle, ρ .. Dichte, μ .. Masse eines Moleküls,

$\bar{v}$ … mittlere Geschwindigkeit der Moleküle $$\bar{v} = \sqrt{\frac{8\cdot k\cdot T}{\pi\cdot\mu}} \qquad (3)$$

k … Boltzmann-Konstante, T …Temperatur.

Die mittlere freie Weglänge Λ der Gasmoleküle ist gegeben durch

$$\Lambda = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\mu}{D^2 \rho} \qquad (4).$$

Dabei ist D der gaskinetische Moleküldurchmesser.

2.2 Druckabhängigkeit der Viskosität

Bei der Betrachtung von Strömungsvorgängen im Vakuum (vgl. Versuch 206 und dort angegebene Literatur) spielt das Verhältnis von mittlerer freier Weglänge zur Dimension d des jeweiligen Gefäßes eine entscheidende Rolle. Ist $\Lambda \ll d$, so liegt eine (gewöhnliche) viskose Strömung vor. Für $\Lambda \gg d$ spricht man dagegen von einer sogenannten „Molekularströmung", deren besondere Eigenschaft darin besteht, dass die Teilchen untereinander keine Stöße mehr ausführen, sondern nur noch mit den Gefäßwänden wechselwirken. Dazwischen ($\Lambda \approx d$) existiert ein relativ breites Übergangsgebiet.
Bei höheren Drücken ($\Lambda \ll d$, viskose Strömung) ist wegen $\Lambda \sim 1/\rho$ (Gl.4) das Produkt $\Lambda \cdot \rho$ in Gl.2 konstant, d.h. die Viskosität unabhängig von der Dichte und damit auch vom Druck des Gases. **Dieses an sich unerwartete Ergebnis stellt einen der überzeugendsten Erfolge der kinetischen Gastheorie dar**. Sobald aber zu niedrigeren Drücken hin die freie Weglänge die Gefäßdimensionen überschreitet, wird die Bewegung der Moleküle durch die Wände begrenzt, und die mittlere freie Weglänge kann in Gl.2 als Konstante angesehen werden. Für kleine Drücke nimmt also die Zähigkeit proportional zur Dichte bzw. zum Druck ab.

2.3 Messmethode (Rotationsviskosimeter)

Unter einer evakuierbaren Glasglocke befinden sich zwei konzentrisch angeordnete Zylinder. Der innere Zylinder mit dem Außenradius r_1 wird durch einen Motor mit der Umlauffrequenz f_u gedreht. Der äußere Zylinder mit dem Innenradius r_2 hängt frei schwingend an einem Torsionsfaden. Infolge der inneren Reibung wird durch Vermittlung der dazwischen liegenden Luft der äußere Zylinder aus seiner Gleichgewichtslage verdreht.
Bei rotierendem innerem Zylinder befindet sich der äußere Zylinder dann in Ruhe, wenn sich das durch die innere Reibung bedingte Drehmoment M_R und das durch die Verdrillung des Torsionsfadens hervorgerufene Drehmoment M_T aufheben.

In Abhängigkeit von der Viskosität der Luft im Spalt zwischen den beiden Zylindern ändert sich also der Verdrillungswinkel bei rotierendem innerem Zylinder φ_{rot} gegenüber der Ausgangslage φ_{still}. Die Differenz $\Delta\varphi = \varphi_{rot} - \varphi_{still}$ ist auf einer Skala leicht ablesbar.
Da im praktischen Fall der äußere Zylinder durch die Bewegung des inneren in Schwingungen versetzt wird, die aufgrund der geringen Dämpfung nur sehr langsam abklingen, ist der Ruhezustand nur schwer erreichbar. Deshalb wird die Messung im dynamischen Betrieb durchgeführt, d.h. anstatt der Ruhelage ermittelt man den Schwingungsmittelpunkt, welcher mit φ_{rot} bzw. φ_{still} übereinstimmt.

Die Gleichung zur Berechnung der Viskosität η lautet (Herleitung im Anhang):

$$\eta = K \cdot \frac{\Delta\varphi}{T^2 \, f_u} \qquad (5),$$

wobei T die Schwingungsdauer des äußeren Zylinders, f_u die Umdrehungsfrequenz des inneren Zylinders und K die sogenannte Viskosimeterkonstante ist, welche für den jeweiligen Aufbau bekannt sein muss.

3. Versuchsdurchführung

3.1 Messung

Der Versuchsaufbau ist am Beginn des Abschnittes 2.3 beschrieben. Zur Messung der Druckabhängigkeit wird der Rezipient mit einer Drehschieberpumpe so weit wie möglich ausgepumpt und daraufhin durch ein Nadelventil schrittweise Luft eingelassen. Die Druckmessung erfolgt mit einem Wärmeleitungsvakuummeter (< 100 Pa) bzw. einem Membranmanometer (≥ 1 Torr; 1 Torr = 133 Pa). Als Messpunkte werden vorgeschlagen: 1, 2, 4, 6, 8, 10, 20, 50 Pa, 1, 10, 100 Torr und Luftdruck. Falls 1 Pa nicht erreicht wird, sind zusätzliche Messwerte z.B. für 3 und 5 Pa erforderlich (vgl. dazu auch Hinweise am Platz).

Achtung! Vakuumpumpe nur nach Einweisung durch den Assistenten in Betrieb nehmen und ausschalten !
Rezipient nicht ohne Splitterschutz evakuieren !

Mit dem vorhandenen Motor können zwei verschiedene Umlauffrequenzen des inneren Zylinders eingestellt werden. Aus Gründen der Messgenauigkeit ist die größere der beiden zu wählen. Die Messung bei Atmosphärendruck sollte zum Vergleich noch einmal mit der anderen Frequenz wiederholt werden. Zur Änderung der Umlauffrequenz wird der Treibriemen auf das andere Scheibenpaar gelegt. Die Größe von f_u kann man in einfacher Weise mit der Stoppuhr selber messen.

Zur Winkelmessung ist am äußeren Zylinder eine Gradeinteilung angebracht. Der Strichabstand beträgt 2° ; eine Schätzung auf 0.2° (Zehntel-Skalenteile) ist möglich.
Die Änderung der Gleichgewichtslage Δφ ergibt sich aus der Differenz der beiden Schwingungsmittelpunkte bei stillstehendem bzw. rotierendem inneren Zylinder:

$$\Delta\varphi = \bar{\varphi}_{\text{still}} - \bar{\varphi}_{\text{rot}} \qquad (6).$$

Die Schwingungsdauer T kann aus der Zeitdifferenz zwischen mehreren Durchgängen durch die Gleichgewichtslage ermittelt werden. Der Wert für K ist am Versuchsplatz angegeben. Die Viskosität η ergibt sich aus Gl.5 (Δφ vorher in Bogenmaß umrechnen!).

3.2 Hinweise zur Auswertung

Da der auszumessende Druckbereich viele Größenordnungen überstreicht, ist bei der grafischen Darstellung der Druck sinnvollerweise logarithmisch aufzutragen. Fertigen Sie darüber hinaus eine zweite grafische Darstellung für den Bereich niedriger Drücke (bis 20 Pa) mit linearer Druckskala an.
Analysieren Sie die Messkurve in Hinblick auf die von der Theorie gemachten Voraussagen (η = const. bei höheren Drücken, η ~ p bei niedrigen Drücken, Übergangsgebiet bei Λ ≈ Zylinderabstand, Λ-p-Tabelle im Anhang). Was passiert bei sehr niedrigem Druck? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für die Viskosität bei Atmosphärendruck mit dem Tabellenwert!

Durch Einsetzen von (3) und (4) in (2) erhält man für die Viskosität unter Benutzung der Zustandsgleichung für ideale Gase

$$\eta = \sqrt{\frac{4}{9\,\pi^3}}\;\frac{\sqrt{RT\cdot M}}{D^2\cdot N_A} \tag{7}$$

(molare Gaskonstante R = 8.314 J K^{-1} mol^{-1}, Avogadrokonstante $N_A = 6.023 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}, molare Masse M , absolute Temperatur T).

Berechnen Sie mit Hilfe von Gl.7 aus der Viskosität η bei Atmosphärendruck den effektiven gaskinetischen Moleküldurchmesser D von Luft und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem zu erwartenden Wert!

Nach Gl.7 ist $\eta \sim \sqrt{T}$. Schätzen Sie unter Berücksichtigung der Messfehler ab, ob für η eine Angabe der Temperatur, bei der gemessen wurde, erforderlich ist!

Beachten Sie bei der Fehlerbetrachtung, dass bestimmte Fehleranteile aus Gl.5 (ΔK, ΔT, Δf_u) zwar die Genauigkeit des Absolutwertes η beeinflussen (hier also als zufällige Fehler in Erscheinung treten) jedoch auf die Form der Messkurve (z. B. die Streuung der Messwerte bzgl. einer idealen Geraden) keinen Einfluss haben.

Anhang

Anhang 1: Herleitung von Gl.5 für den statischen Fall

Im Gleichgewicht heben sich die beiden Drehmomente M_R und M_T gegenseitig auf

$$M_R + M_T = 0 \tag{8}$$

Mit der Annahme, dass der Luftspalt zwischen beiden Zylindern so klein ist, dass das Geschwindigkeitsgefälle dv/dr konstant bleibt, erhalten wir mit Hilfe von Gl.1 für M_R

$$M_R = \eta\, A\, \frac{2\pi\; r_1\; f_u\; r_2}{d} \tag{9}$$

(f_u ... Umdrehungsfrequenz des inneren Zylinders ; $d = r_2 - r_1$) und für M_T

$$M_T = -D_\varphi \cdot \Delta\varphi \tag{10}$$

Die Reibungsfläche A ist durch die Höhe h und den Radius r_2 des äußeren Zylinders gegeben

$$A = 2\pi \cdot r_2 h \tag{11}$$

Die Winkelrichtgröße D_φ kann aus der Schwingungsdauer T und dem Trägheitsmoment I des äußeren Zylinders bestimmt werden:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D_\varphi}} \tag{12}$$

Wenn man mit den Gleichungen (9) bis (12) in Gl.8 eingeht, erhält man für die Zähigkeit:

$$\eta = \frac{I\,d}{r_2^2\,r_1\,h}\;\frac{\Delta\varphi}{T^2 f_u} \qquad (13).$$

Anhang 2: Herleitung für den dynamischen Fall

Wir können die Schwingungen des äußeren Zylinders als eine gedämpfte Drehschwingung behandeln. Zur Berücksichtigung der Dämpfung ist im Dämpfungsglied der Schwingungs-differentialgleichung für die Winkelgeschwindigkeit die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen äußerem und innerem Zylinder einzusetzen. Wir erhalten folgende Schwingungsgleichung für den äußeren Zylinder

$$I\,\ddot{\varphi} + R\left(\dot{\varphi} - 2\pi\cdot f_u\right) + D_\varphi\,\varphi = 0 \qquad (14).$$

Die Reibungskonstante R ist entsprechend Gl.9 gegeben durch

$$R = \eta\,A\,\frac{2\pi\,r_1\,r_2}{d} \qquad (15).$$

Die Gleichung (14) beschreibt eine gedämpfte Drehschwingung mit dem logarithmischen Dekrement

$$\delta = \frac{R}{2I}\,T$$

wobei der äußere Zylinder um eine neue Gleichgewichtslage schwingt, die um den Winkel

$$\Delta\varphi = \frac{R}{D_\varphi}\,f_u \qquad (16)$$

gegenüber der Gleichgewichtslage des nicht rotierenden inneren Zylinder zugeordneten verschoben ist.
Durch Einsetzen von (12) und (15) in (16) erhält man schließlich den gleichen Wert für die Verschiebung des Gleichgewichtes durch den rotierenden inneren Zylinder wie entsprechend Gl.13 im statischen Fall.
Ersetzt man dort den ersten Faktor durch die Viskosimeterkonstante K, so entsteht Gl.5.

Anhang 3: Tabelle der mittleren freien Weglänge von Luft bei unterschiedlichen Drücken.

p / Pa	100	10	6	1	10^{-1}
Λ	60 µm	0.6 mm	1 mm	6 mm	6 cm