124 - Longitudinal schwingende Zylinderstäbe

1. Aufgaben

1.1 Nehmen Sie die Resonanzkurven von zwei dünnen Stäben (Aluminium, Messing) in der 1. Ordnung auf. Bestimmen Sie aus der Periodendauer T_1 die Schallgeschwindigkeit c und den Elastizitätsmodul E sowie aus der Breite der Resonanzkurve die Güte Q der Stabschwingung und die dynamische Viskosität η des Materials.

1.2 Messen Sie die Resonanzperiodendauern T_n' eines dicken Stahlstabes in den Ordnungen n = 1, 2, 3, …, 10 (…20). Ermitteln Sie daraus die Schallgeschwindigkeit c, den Elastizitätsmodul E und den Torsionsmodul G.

2. Grundlagen

<u>Stichworte:</u>
Schwingungsgleichung, Schallwelle, Resonanz, Bandbreite, Güte, Elastizitätsmodul, Poissonzahl

2.1 Dünne Stäbe

Longitudinale Deformationswellen pflanzen sich in einem dünnen elastischen Stab mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (1).$$

fort. Dabei ist E der Elastizitätsmodul und ρ die Dichte des Stabmaterials. Die Herleitung dieser Beziehung finden Sie im Anhang. Die Wellenlänge der Deformationswelle beträgt:

$$\lambda = c \cdot T \qquad (2),$$

wobei T die Periodendauer der Schwingung ist. Der Stab gerät in Resonanz, d.h. es bilden sich genau dann stehende Wellen im Stab, wenn die Stablänge l ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge λ ist (siehe Bild 1):

$$l = n\,\frac{\lambda}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3).$$

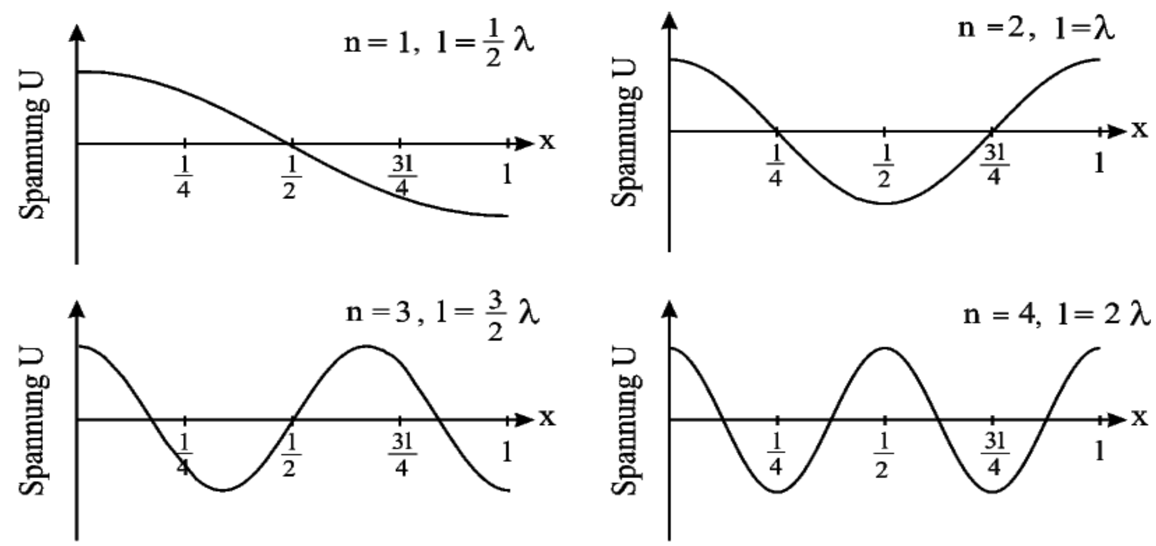


Bild 1: Stehende Wellen in einem longitudinal schwingenden Stab (Enden nicht eingespannt).

An den **freien** Stabenden ergeben sich Schwingungsbäuche. Aus den Gleichungen (2) und (3) lässt sich die Resonanzperiodendauer T_n der Stabschwingung in Abhängigkeit der Ordnung n berechnen

$$T_{\mathrm{n}} = \frac{\lambda}{c} = \frac{2\,l}{n\,c} = \frac{T_1}{n} \qquad (4).$$

Aus den Messwerten der Resonanzperiodendauern kann man mit Hilfe der Gleichung (1) und (4) den Elastizitätsmodul bestimmen:

$$T_{\mathrm{n}} = \frac{2\,l}{n}\sqrt{\frac{\rho}{E}} \qquad (5)$$

und daraus

$$E = \left(\frac{2\cdot l}{n\cdot T_{\mathrm{n}}}\right)^2 \cdot \rho \qquad (6).$$

Wird ρ durch die Masse m und das Volumen des Stabes ausgedrückt, so ergibt sich:

$$E = \frac{16\,ml}{\pi\, d^2\,(n\,T_{\mathrm{n}})^2} \qquad (7).$$

Dabei ist d der Durchmesser des Stabes.

2.2 Der gedämpfte Oszillator

Eine periodische Kraft $F(t) = F \cdot e^{i\omega t}$ wirke auf das Stabende ein. Das zeitliche Verhalten der Auslenkung $u(x_0, t)$ der longitudinalen Stabschwingung lässt sich an einem festen Ort x_0 (z.B. an einem der Stabenden) durch die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators

$$\ddot{u}(t) + \beta \cdot \dot{u}(t) + \omega_o^2 \cdot u(t) = F(t) \tag{8}$$

beschreiben. Dabei sind β die Dämpfungskonstante des Oszillators, $F(t)$ die äußere Erregung und ω_0 die Resonanzfrequenz, die von der Schallgeschwindigkeit c und der Stablänge l abhängt:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_n} = \frac{\pi n c}{l} \tag{9}$$

Die Differentialgleichung (8) lässt sich mit dem Ansatz

$$u(t) = U(\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

lösen, wobei $U(\omega)$ komplexwertig ist. $|U(\omega)|$ ist die Amplitude der Schwingung und $\arg\{U(\omega)\}$ ihre Phase. Durch Einsetzen von $u(t)$ und $F(t)$ in Gl.(8) ergibt sich:

$$-\omega^2\, U(\omega) + i\beta\omega\, U(\omega) + \omega_0^2\, U(\omega) = F$$

bzw.:

$$U(\omega) = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\beta} = \frac{F}{(\omega+\omega_o)(\omega-\omega_o) + i\omega\beta} \tag{10}$$

In der Nähe der Resonanzfrequanz ($\omega \approx \omega_0$) gilt

$$U(\omega) = \frac{F}{\omega_0[2(\omega-\omega_o) + i\beta]} \tag{11}$$

und

$$|U(\omega)| = \frac{F}{\omega_0\sqrt{4(\omega-\omega_o)^2 + \beta^2}}.$$

Die Abhängigkeit der Amplitude der Stabschwingung $|U(\omega)|$ von der Erregerfrequenz ω ist in Bild 2 dargestellt.

An den Stellen

$$\omega_1 = \left(\omega_0 - \frac{\beta}{2}\right) \text{ und } \omega_2 = \left(\omega_0 + \frac{\beta}{2}\right)$$

ist die Amplitude auf das $\frac{1}{\sqrt{2}}$-fache ihres Maximalwertes abgefallen. Den Frequenzabstand

$$\omega_2 - \omega_1 = \beta \tag{12}$$

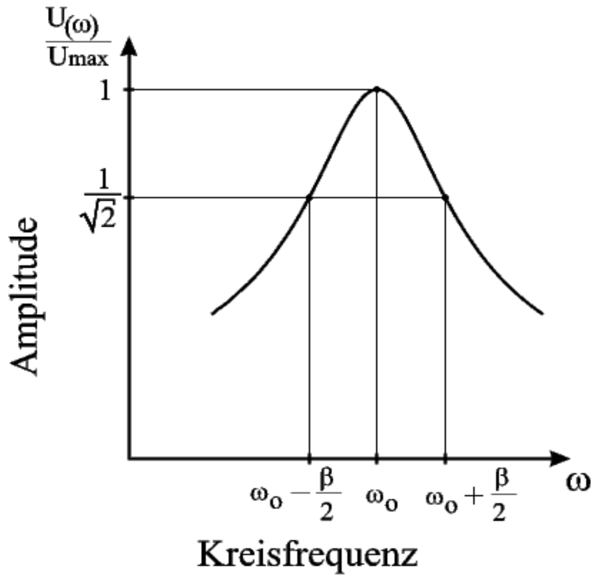


Bild 2: Amplitude des gedämpften Oszillators in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz.

nennt man die **Bandbreite** des schwingungsfähigen Systems. Die **Güte** Q (oder Finesse) des Resonanzsystems wird durch

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} \tag{13}$$

definiert. Für den Fall geringer Dämpfung $\beta \ll \omega_0$ bzw. $Q \gg 1$ kann man Q von Gl.(13) auch unter Verwendung der Periodendauern ausdrücken

$$Q = \frac{T_n}{T_n^{(1)} - T_n^{(2)}} \quad (14).$$

Dabei sind

$$T_n^{(1)} = \frac{2\,\pi}{\omega_1} \quad \text{und} \quad T_n^{(2)} = \frac{2\,\pi}{\omega_2}$$

diejenigen Periodendauern, bei denen die Amplitude auf das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fache ihres Maximalwertes abgefallen ist (siehe Bild 3).

In jedem elastischen Material wird bei periodischer Anregung ein Bruchteil der Schwingungsenergie in Wärme umgewandelt. Dadurch entsteht eine gedämpfte Schwingung, wobei entsprechend Gl.(12) die Bandbreite durch die Dämpfung bestimmt wird. Bei gegebener Schwingungsamplitude ist die Schwingungsenergie proportional zum Elastizitätsmodul E und die, in Wärme umgewandelte, Energie proportional zu E/Q. Die Güte Q hängt entsprechend Gl.(13) mit der Bandbreite zusammen.

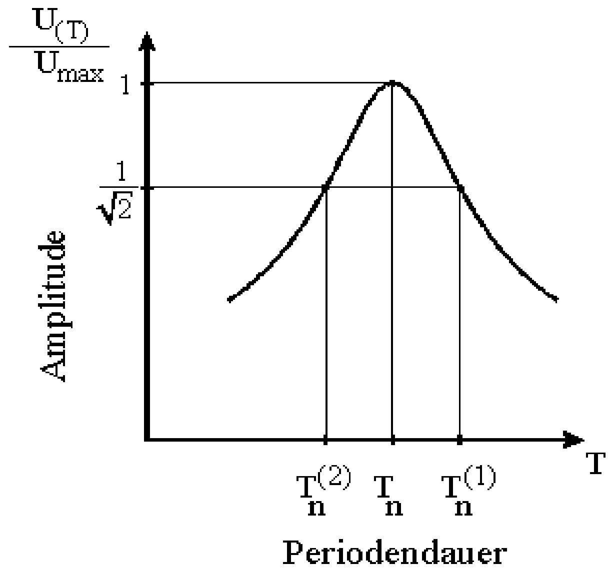


Bild 3: Amplitude des gedämpften Oszillators in Abhängigkeit von der Periodendauer.

In strömenden Flüssigkeiten wird die Reibungsenergie durch die **dynamische Viskosität η** bedingt. In Analogie zu den Fluiden definiert man auch in Festkörpern eine Viskosität η

$$\eta = \frac{E}{Q \cdot \omega_0} \qquad (15).$$

Die Viskosität η hat die Einheit Pa·s. Unter Benutzung von Gl.(14) findet man

$$\eta = \frac{E\left(T_n^{(1)} - T_n^{(2)}\right)}{2\pi}$$

Dabei ist E der in Aufgabe 1.1 bestimmte Elastizitätsmodul. Beachten Sie, dass sich bei statischer Belastung die Zähigkeit *nicht* bemerkbar macht!

2.3 Dicke Stäbe

In dicken Stäben macht sich die Querkontraktion des Materials bemerkbar. Dadurch verlängert sich die Resonanzperiode T_n' eines dicken Stabes vom Durchmesser d gegenüber derjenigen des dünnen Stabes T_n um den Faktor

$$\frac{T_n'}{T_n} = 1 + \left(\frac{\mu\, \pi\, n\, d}{4\, l}\right)^2 \qquad (16),$$

wobei μ die Querkontraktionszahl (Poissonzahl) des Stabmaterials ist. Aus der Messung der Resonanzperioden des dicken Stabes in verschiedenen Ordnungen lassen sich der Elastizitätsmodul und die Poissonzahl μ bestimmen.

Setzt man (4) in (16) ein, so ergibt sich

$$n\,T_n' = n\,T_n + n\,T_n \left(\frac{\mu\,\pi\,d}{4\,l}\right)^2 n^2$$

$$n\,T_n' = T_1 + T_1 \left(\frac{\mu\,\pi\,d}{4\,l}\right)^2 n^2 \qquad (17).$$

Es besteht also ein linearer Zusammenhang zwischen $n{\cdot}T_n'$ und n^2. In der grafischen Darstellung von $n{\cdot}T_n'$ über n^2 ergibt sich daher eine Gerade mit dem Ordinatenabschnitt T_1 und dem Anstieg

$$B = T_1 \left(\frac{\mu\,\pi\,d}{4\,l}\right)^2 \qquad (18).$$

Beide Größen können aus der grafischen Darstellung bzw. durch Ausgleichsrechnung ermittelt werden. Aus T_1 und B lassen sich unter Verwendung der Gleichungen (7) und (18) der Elastizitätsmodul E und die Poissonzahl μ bestimmen:

$$E = \frac{16\,m\,l}{\pi\,d^2\,T_1^2} \qquad (19)$$

$$\mu = \frac{4 \cdot l}{\pi \cdot d} \cdot \sqrt{\frac{B}{T_1}} \qquad (20).$$

Die Kenntnis von zwei der vier die elastischen Eigenschaften eines Materials bestimmenden Kennzahlen (Elastizitätsmodul E, Querkontraktionszahl (oder Poissonzahl) μ, Torsionsmodul G und Kompressionsmodul K) reicht aus, um die anderen Kennzahlen zu bestimmen. Es gilt nämlich:

$$G = \frac{E}{2\,(\mu + 1)} \qquad (21)$$

und

$$K = \frac{E}{3\,(1 - 2\,\mu)} \qquad (22).$$

3. Versuchsdurchführung

3.1 Messplatz

Der experimentelle Aufbau ist in Bild 4 dargestellt.

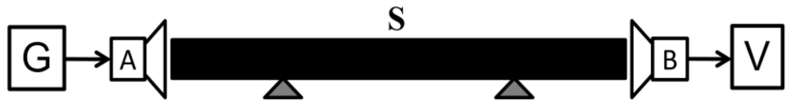


Bild 4: Experimenteller Aufbau: G … Frequenzgenerator; S … Stab; A, B … Kopfhörer; V … Voltmeter.

Der Frequenzgenerator (INSTEK SFG-2004) erzeugt eine sinusförmige Ausgangsspannung (Taste „WAVE“ auf Sinus). Die Kopfhörermembran des Kopfhörers A erregt im Stab longitudinale Schwingungen. Die im Kopfhörer B induzierte Spannung ist proportional zur Schwingungsamplitude des Stabes und wird mit einem Voltmeter V gemessen.

Zu Beginn des Versuches werden alle Geräte eingeschaltet, um sie warmlaufen zu lassen. Der zu untersuchende Stab wird so auf die Halterung aufgelegt, dass die Auflagepunkte um je 1/4 der Stablänge von den Stabenden entfernt sind (Besselsche Punkte). Damit wird erreicht, dass sich die Durchbiegung auf ein Minimum reduziert (Warum?).

Auf einem Hinweiszettel am Versuchsplatz finden Sie die Werte für Durchmesser d, Masse m und Länge l der Stäbe sowie für jeden Stab die Periodendauer T_1 für die Resonanz 1. Ordnung.

Für die Untersuchung nicht-magnetischer Materialien (Aufgabe 1.1) werden die Membranen mit Stößel in die Kopfhörer eingesetzt. Die Kopfhörer werden so justiert, dass die Stößel die Mitten der Stirnflächen des Stabes gerade berühren. Für die Untersuchung magnetischer Materialien (Aufgabe 1.2) werden Kunststoffmembranen verwendet.

3.2 Messung und Auswertung

3.2.1 Resonanzkurven

Zur Aufnahme der Resonanzkurven der dünnen Stäbe (Aluminium, Messing) geben Sie eine Frequenz ein, die ungefähr der am Platz ausliegenden Resonanzperiodendauer 1.Ordnung entspricht und suchen in deren Nähe das Maximum der Intensität. Dabei ist die Generatorspannung so niedrig wie möglich zu wählen. Vom Maximum ausgehend nehmen Sie nach beiden Seiten mindestens zehn Messpunkte bis herab zu etwa 30% der Maximalintensität auf.
Das Messgerät (Analog-Multimeter) kann sowohl als Strom- als auch als Spannungsmesser geschaltet werden. Geeignete Messbereiche sind 5 mA und 10 V (jeweils Wechselstrom bzw. -spannung).
Stellen Sie die Resonanzkurven der beiden Stäbe grafisch dar und bestimmen Sie die nach Aufgabenstellung 1.1 zu berechnenden Größen: c, E, Q und η. Hinweis: Sie können das Programm *Origin* im Praktikum benutzen, um die Resonanzkurven anzupassen.

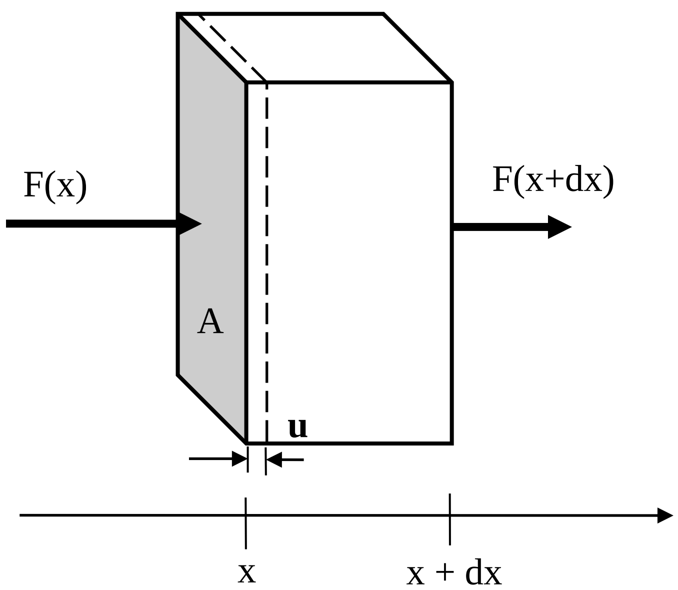
3.2.2 Resonanzperiodendauern

Die ungefähre Lage der ersten Resonanz des dicken Stahlstabes ist vorgegeben. Höhere Resonanzen erhält man durch Vervielfachung der Frequenz, wobei zu beachten ist, dass für $n \geq 2$ gilt: $T'_n > T'_1/n$ (vgl. Gl.16).
Die Eingangsspannung soll auch hier so niedrig wie möglich gewählt werden, idealerweise so, dass im Messbereich 5 mA stets in der Nähe des Skalenendwertes gemessen werden kann.
Zur Auswertung werden die Frequenzen in Periodendauern umgerechnet und $n \cdot T'_n$ über n^2 aufgetragen. Bei der Bestimmung des Anstieges ist es möglicherweise angebracht, einzelne Punkte (z.B. für n = 1 und 2) auszuschließen, da interessanterweise die höheren Resonanzen schärfer sind als die niedrigen und die Frequenzen besser reproduzierbar. Insofern ist es auch günstig, möglichst viele Resonanzen aufzunehmen: Richtwert 10 (nach oben offen).
Berechnen Sie (Aufgabe 1.2) die Größen: c, E, μ und G.

Anhang

Herleitung der longitudinalen Schallgeschwindigkeit

Wir behandeln die Ausbreitung longitudinaler Dichtewellen in einem langen dünnen Stab entlang der Stabachse x. Dazu greifen wir ein Volumenelement vom Querschnitt A und der Dicke dx heraus. Es soll eine Druckkraft $F(x)$ von links auf die Querschnittsfläche wirken. Dadurch wird das Volumenelement in x-Richtung um die Strecke u zusammengedrückt (dx wird zu d$x-u$) und die etwas verringerte Kraft F(x+dx) nach rechts weitergegeben.



Es gilt das Hookesche Gesetz: $\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

mit der wirksamen Kraft $F = F(x) - F(x + \mathrm{d}x) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial x}\left(A \cdot E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \mathrm{d}x\,.$

Diese Kraft führt zur Beschleunigung des Masseelements $m = \rho \cdot A \cdot \mathrm{d}x$:

$$F = m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,.$$

Die beiden letzten Gleichungen kann man zusammenführen und erhält, falls A (**keine Querkontraktion!**) und E konstant sind,

$$m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \cdot \mathrm{d}x \cdot E \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Mit der Dichte ρ erhält man schließlich:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2{}_{\mathrm{long}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

mit der longitudinalen Schallgeschwindigkeit $\boxed{c_{\mathrm{long}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,.}$

Wir erinnern uns, dass bei dieser Betrachtung die Querkontraktion vernachlässigt wurde. Das ist erlaubt, so lange die **Schallwellenlänge groß gegen die Dicke des Stabs** ist. Ist das nicht der Fall, so muss man die Querkontraktion (Poissonzahl μ) berücksichtigen. Da μ typischerweise bei 0,3 liegt, erhält man dann die etwas größere Schallgeschwindigkeit

$$c'_{\mathrm{long}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)\cdot(1-2\mu)}}\,.$$

Die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von den Festkörperabmessungen wird als **geometrische Dispersion** bezeichnet.

Literatur

Handbuch der Physik, Hrg. Geiger-Scheel, Bd. VI, „Mechanik I der elastischen Körper“, Springer-Verlag 1928, S. 356 ff.

V. Sutilov, Physik des Ultraschalls, Akademie-Verlag 1984, S. 234 ff.