

# 121 – Akustische Hohlraumschwingungen

## Versuchsziel:

Mit dem Versuch sollen 3 unterschiedliche Lehrinhalte vermittelt werden:

- 1) Sie lernen etwas über akustische Hohlraumresonatoren (sog. Helmholtz-Resonatoren). Diese haben nur eine durch ihr Volumen bestimmte Resonanzfrequenz. Sie messen den Schall im Inneren dieser Hohlraumresonatoren und analysieren das Schallspektrum.
- 2) Sie lernen etwas über die digitale Abtastung von Analogsignalen. Insbesondere erfahren Sie experimentell die Bedeutung des Abtasttheorems;
- 3) sowohl durch Simulationsrechnungen als auch durch Ihre Messungen wird Ihnen der Zusammenhang zwischen dem Zeitverlauf eines Signals und seinem Frequenzspektrum (mathematisch: Fouriertransformation des Zeitverlaufs) anschaulich gemacht.

## 1. Aufgaben

- 1.1 Geben Sie am PC verschiedene periodische Funktionen ein und lassen Sie deren Frequenzspektrum berechnen. Beobachten Sie, wie das angezeigte Frequenzspektrum mit der Größe der Fourieramplituden zusammenhängt.
- 1.2 Registrieren Sie die Hohlraumschwingungen in einem leeren Rundkolbenglas und bestimmen Sie das Frequenzspektrum bei unterschiedlichen Abtastfrequenzen. Stellen Sie die Ergebnisse grafisch dar und diskutieren Sie die Erfüllung des Sampling-Theorems.
- 1.3 Verändern Sie die akustische Dämpfung im Hals des Rundkolbenglases und beobachten Sie die dadurch hervorgerufenen Veränderungen im Frequenzspektrum. Schätzen Sie die Resonatorgüte des Rundkolbens für den ungedämpften sowie den unterschiedlich gedämpften Resonator ab und diskutieren Sie qualitativ Ihre Messergebnisse.
- 1.4 Messen Sie die Hohlraumresonanzfrequenz für unterschiedliche Hohlraumvolumina. Stellen Sie die Ergebnisse grafisch dar und vergleichen Sie diese mit der abgeleiteten für die Resonanzfrequenz. Welche Näherungsformel halten Sie für zulässig?

## 2. Grundlagen

### Stichworte:

Schallwellen, Schallmessung, Schallpegel, Dezibel, Kondensatormikrofon, Helmholtzresonator, Resonanzfrequenz, Resonatorgüte, Frequenzspektrum, Fourieranalyse, Sampling-Theorem, akustisches Rauschen, Aliasing

## 2.1 Einige Grundlagen zur Akustik

Schallwellen in Luft sind sich ausbreitende hochfrequente Longitudinalschwingungen der Gaspartikel. Für die Schallgeschwindigkeit  $c$  gilt hierbei:

$$c_{\text{Schall}} = \sqrt{\frac{1}{\gamma \cdot \rho_0}} \quad (1),$$

wobei  $\gamma$  die Kompressibilität und  $\rho_0$  die mittlere Gasdichte sind. Wegen  $\gamma = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}$  folgt für adiabatische Prozesse mit dem Adiabatenexponenten  $\kappa = c_p/c_v$

$$\gamma = \frac{1}{\kappa \cdot p_0} \quad (2).$$

Jetzt betrachten wir ein Gasteilchen, das in der Schallwelle mitschwingt. Seine oszillatorische Bewegung  $u(t)$  werde im eindimensionalen Fall durch eine Schwingung der Gestalt

$$u(t) = u_0 \cdot \sin 2\pi \left( f \cdot t - \frac{x}{\Lambda} \right) \quad (3)$$

beschrieben. Seine momentane Geschwindigkeit beträgt infolgedessen

$$\dot{u}(t) = 2\pi \cdot f \cdot u_0 \cdot \cos 2\pi \left( f \cdot t - \frac{x}{\Lambda} \right) \quad (4).$$

Der Ausdruck  $2\pi \cdot u_0 \cdot f = \mu_0$  wird als **Schallschnelle** bezeichnet. Er ist proportional zum Schalldruck (genauer: Schallwechseldruckamplitude)

$$p = c \cdot \rho_0 \cdot \mu_0 \quad (5).$$

Das Verhältnis von Schalldruck zu Schallschnelle ist die **akustische Impedanz** des Schallausbreitungsmediums

$$Z_{\text{akust}} = \frac{p}{\mu_0} = c_{\text{Schall}} \cdot \rho_0 \quad (6).$$

Trifft die Schallwelle auf Impedanzunterschiede im Ausbreitungsmedium (z.B. an der Grenze zweier Medien), so treten Schallreflexionen auf.

Der akustischen Reflexionskoeffizient  $R_{\text{akust}}$  ist:

$$R_{\text{akust}} = \frac{[Z_{\text{akust},1} - Z_{\text{akust},2}]^2}{[Z_{\text{akust},1} + Z_{\text{akust},2}]^2} \quad (7).$$

## 2.2 Hohlraumschwingungen

Wenn man eine leere Bierflasche anbläst, so entsteht ein ziemlich tiefer Ton, dessen Frequenz  $f$  (bzw. dessen Wellenlänge  $\Lambda$ ) offensichtlich nicht durch die Lineardimensionen des Resonanzkörpers bestimmt wird.

Beispiel:  $L_{\text{Bierflasche}} = 0.25 \text{ m}$

gehört :  $f_{\text{Ton}} = 300 \text{ Hz}$  aber erwartet (?):  $\Lambda = \frac{c_{\text{Schall}}}{f} = 1 \text{ m}$ .

Beliebig geformte gasgefüllte Hohlräume lassen sich zu Resonanzschwingungen anregen. Diese Tatsache wurde bereits von *Helmholtz* zur Klanganalyse ausgenutzt, weshalb man solche Resonatoren gewöhnlich als Helmholtz-Resonatoren bezeichnet. Die Schwingung erfolgt analog der Schwingung einer Masse  $m$ , die an einer Feder mit der Federkonstanten  $k$  befestigt ist. Für die Eigenfrequenz dieses Systems gilt:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8).$$

Beim Resonator (Bild 1) wirkt das kompressible Gasvolumen  $V_H$  des Hohlräumens wie eine Feder, während die Gasmasse  $\rho \cdot A \cdot l$  des Resonatorhalses von der Länge  $l$  und der Querschnittsfläche  $A$  die schwingende Masse bildet. Für die Eigenfrequenz des Resonators erwarten wir einen ähnlichen Ausdruck wie in Gl.(8); doch muss noch eine Konstante eingehen, die das im Hohlraum enthaltene Gas charakterisiert.

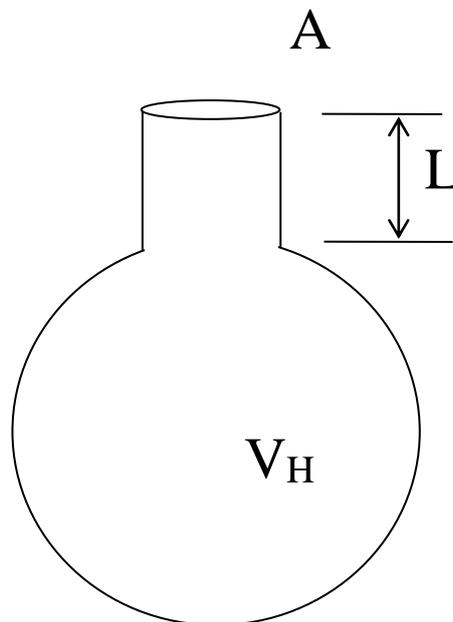


Bild 1: Rundkolben als akustischer Hohlraumresonator.

Wir berechnen zunächst die „Federkonstante“ des Gasvolumens  $V$ :

Unter der Annahme, dass die Druckänderungen so schnell erfolgen, dass kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfinden kann (also adiabatisch!), gilt für die adiabatische Kom-

pressibilität  $\gamma$  eines Gases die Gl.(2). (Der Ruhedruck des Gases wird jetzt zur Unterscheidung vom Schalldruck mit dem Index „0“ versehen und als  $p_0$  bezeichnet.)

Die Druckänderung  $\Delta p$  folgt daraus als

$$\Delta p = - \frac{\kappa \cdot p_0 \cdot \Delta V}{V_H} \quad (9).$$

Für die Volumenänderung  $\Delta V$  bei Verschiebung der Gasmasse im Resonatorhals um die Strecke  $\Delta l$  gilt, da sich  $V$  und  $l$  gegensinnig verhalten:

$$\Delta V = - A \cdot \Delta l \quad (10).$$

Der Ausdruck  $\Delta F/\Delta l$ , d.h. die Kraft, die zur Verschiebung um die Strecke  $\Delta l$  nötig ist, stellt die gesuchte Federkonstante dar.

Mit  $\Delta F = \Delta p \cdot A$  und Gl.(9) erhält man somit

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = k = \frac{p_0 \cdot \kappa \cdot A^2}{V_H} \quad (11).$$

Die Masse des Gasvolumens im Resonatorhals beträgt  $m = A \cdot L \cdot \rho_0$ , wobei  $\rho_0$  die Gasdichte bedeutet. Mit Kenntnis der Ausdrücke für die Masse und die Federkonstante ergibt sich somit aus Gl.(8):

$$\omega = \sqrt{\frac{A \cdot p_0 \cdot \kappa}{V_H \cdot L \cdot \rho_0}} \quad (12).$$

Beachten wir nun noch, dass der Ausdruck  $p_0 \cdot \kappa / \rho_0$  gerade das Quadrat der Schallgeschwindigkeit  $c$  darstellt, und addieren wir zur Länge  $l$  die Mündungskorrektur  $\frac{\pi R}{4}$  (auf jeder Seite des Resonatorhalses!), so erhalten wir für die Eigenfrequenz des Helmholtzresonators schließlich:

$$f = \frac{1}{2\pi} c \cdot \sqrt{\frac{A}{V_H \cdot \left( L + \frac{\pi R}{2} \right)}} \quad (13).$$

Diese Gleichung gilt, wie das Experiment zeigt, auch für  $L = 0$ , d.h. für einen Hohlraum, der anstelle eines Halses nur eine einfache Öffnung besitzt. Es existiert also nur eine **einzige Resonanzfrequenz**, solange die größte Abmessung des Hohlraumes klein gegen die Wellenlänge ist. *Helmholtz* führte mit Hilfe dieser Eigenschaft des Hohlraumes die erste Klanganalyse durch und gelangte damit zu erstaunlich genauen Ergebnissen. („Helmholtz-kugeln“ wurden zu Instrumenten des Ohrenarztes bei der Beurteilung des Hörvermögens).

### 2.3 Schallmessung

Die Energiedichte des Schallfeldes kann aus der gemittelten mechanischen Energie der harmonisch schwingenden Gaspartikel abgeleitet werden und beträgt  $\frac{p^2}{2 c_{\text{Schall}}^2 \rho_0}$ .

Daraus ergibt sich die **Schallbestrahlungsstärke  $B$**  zu

$$B = \frac{p^2}{2 c_{\text{Schall}}^2 \rho_0} \quad (14).$$

Die Schallbestrahlungsstärke ist also proportional zum Quadrat des Schalldrucks. Dieser ist einer Schallmessung unmittelbar zugänglich.

Hochempfindliche technische Detektoren für den Schalldruck sind die **Kondensatormikrofone**, in denen die akustisch angeregten Schwingungen einer sehr dünnen Membran die Kapazität eines Messkondensators modulieren. Mittels eines rauscharmen elektronischen Verstärkers mit nachfolgendem Impedanzwandler werden diese Kapazitätsänderungen in Wechsellspannungssignale umgesetzt.

Auch das **Ohr** ist ein exzellenter Schalldetektor für den Frequenzbereich von 20 Hz bis etwa 20 kHz, wobei seine Empfindlichkeit allerdings stark frequenzabhängig ist. Während im Empfindlichkeitsmaximum von 4 kHz die gerade noch wahrnehmbare Schalleistungsdichte (Hörschwelle) bei etwa  $2 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$  liegt, ist das Ohr bei 100 Hz um fast vier Größenordnungen unempfindlicher. Im Empfindlichkeitsmaximum wird vom Ohr eine Druckamplitude von nur  $20 \mu\text{Pa}$  wahrgenommen, bei der das Trommelfell mit einer Amplitude von etwa  $10^{-11} \text{ m}$  schwingt. Das ist etwa der 20-fache Wert des durch die statistische Wärmebewegung der Gasmoleküle verursachten Brownschen Rauschens des Trommelfells und ist sogar eine Größenordnung kleiner als ein Atomdurchmesser! In der technischen Literatur gibt man die Schallbestrahlungsstärke oder den Schalldruck oft nicht absolut an, sondern vergleicht diese Werte mit Bezugsgrößen  $B_0$  bzw.  $p_0$ . So erhält man die in **Dezibel** (dB) anzugebenden Größen

$$\begin{aligned} \text{relative Schalleistungsdichte} & \quad B_{\text{rel}} [\text{dB}] = 10 \cdot \log (B/B_0) = 20 \cdot \log (p/p_0) \\ \text{relativer Schalldruck} & \quad p_{\text{rel}} [\text{dB}] = 10 \cdot \log (p/p_0). \end{aligned}$$

### 2.4 Fourieranalyse

In Verallgemeinerung der bekannten Tatsache, dass sich eine periodische Funktion als Summe von Kosinus- und Sinusfunktionen aufschreiben lässt, kann jede beliebige physikalisch sinnvolle Funktion  $A(t)$  als Überlagerung von unendlich vielen Kosinus- und Sinusfunktionen dargestellt werden. Dieser Sachverhalt wird als **Fourieranalyse** bezeichnet und kann mathematisch wie folgt dargestellt werden:

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(f) e^{-i(2\pi f t)} df \quad (15)$$

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{+i(2\pi f t)} dt \quad (16).$$

Da  $A(f)$  eine komplexwertige Funktion der Frequenz ist, gibt man oft die Größe  $|A(f)|^2$ , das Leistungsspektrum von  $A(t)$  [genauer: die **spektrale Leistungsdichteverteilung**] an, um den Frequenzinhalt von  $A(t)$  zu charakterisieren.

Im Experiment wird der zeitabhängige Signalspannungsverlauf  $A(t)$  in einem festgelegten Zeitintervall  $T$  an  $n$  äquidistanten Zeitpunkten mit der Abtastfrequenz  $f_T = n/T$  abgefragt. Die Abtastfrequenz  $f_T$  muss dabei so gewählt werden, dass sie das **Sampling-Theorem** erfüllt:

$$f_T \geq 2 \cdot f_{\text{mess}} \quad (17).$$

Bei Verletzung dieser Bedingung werden wegen des **Aliasing-Effekts** (Bild 2) falsche Frequenzspektren berechnet.

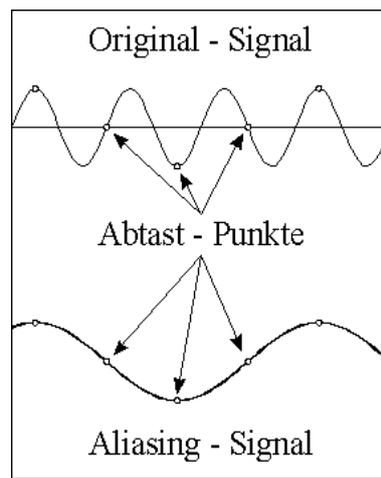


Bild 2: Die Abbildung zeigt, dass beim Abtasten einer 300 Hz-Schwingung mit 400 Hz bei der Rekonstruktion eine (falsche) 100 Hz-Schwingung entsteht.

## 2.5 Labview-Programm „Hohlraumschwingungen“

Beim Aufrufen des Programms „Hohlraumschwingungen“ erscheint das Menü entsprechend Bild 3. In der oberen Task-Leiste erfolgt die Auswahl der Programme „Messung“ oder „Simulation“.

Im oberen Fenster wird das gemessene Signal oder die berechnete Funktion im Zeitbild dargestellt. Mit Hilfe des Cursors kann ein Zeitbereich ausgewählt werden. Im unteren Fenster erscheint das dazugehörige Frequenzspektrum (genauer: die Frequenzverteilung des Amplitudenbetrags). Mit dem Button „Cursor Reset“ kann wieder das volle Zeitbild dargestellt werden. Die dargestellten Verläufe können entweder als txt-Datei auf Laufwerk „D“ oder durch Anklicken mit der rechten Maustaste markiert und als „vereinfachtes Bild“ gespeichert werden.

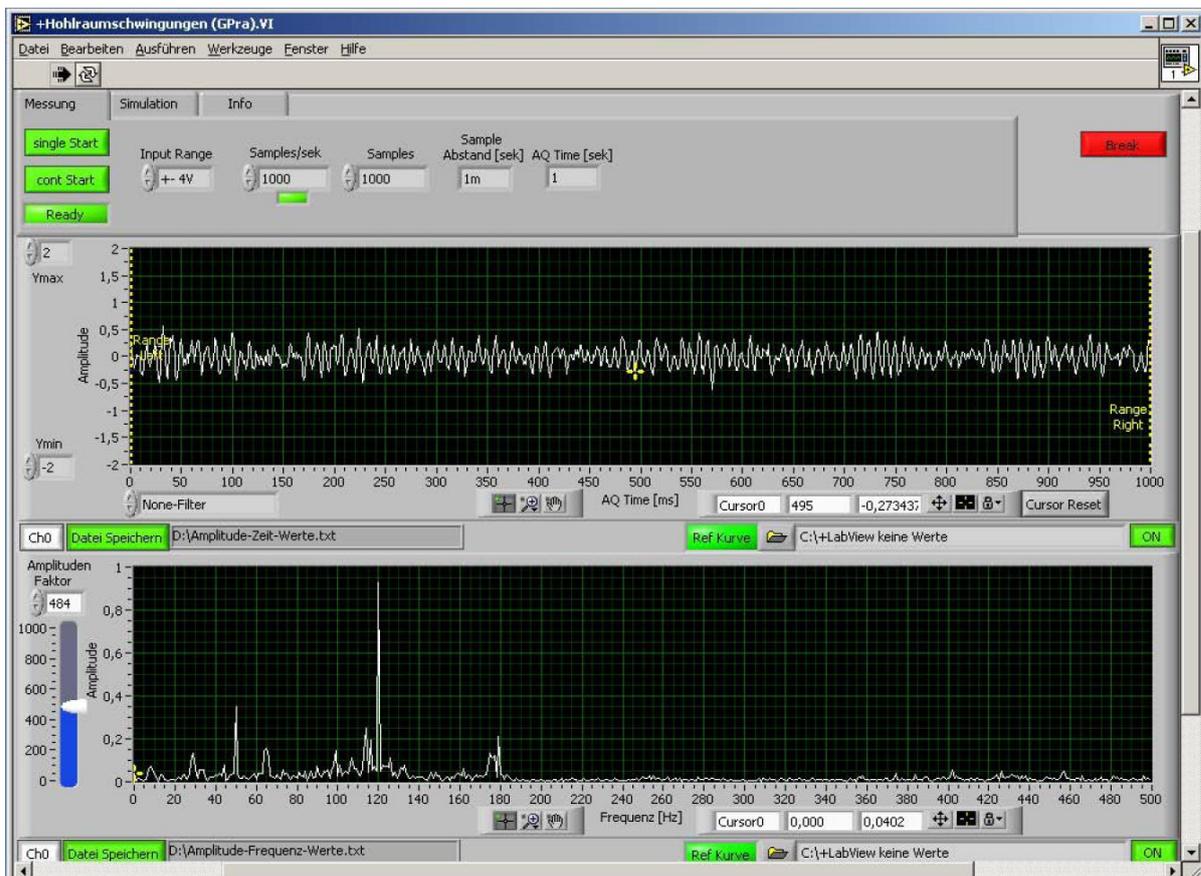


Bild 3: Menü des Messprogramms „Hohlraumschwingungen“.

Im Programm „**Messung**“ erfolgt die Einstellung von:

- *Input Range* (=max. Eingangsspannung am AD-Wandler)
- *Samples/s* (= Abtastrate)
- *Samples* (= Zahl der Abtastpunkte während einer Messung).

Daraus wird berechnet und angezeigt:

- *Sample Abstand* (= Zeit zwischen zwei Abtastpunkten)
- *AQ Time* (= Messzeit = Zahl der Abtastpunkte / Abtastrate ).

Für den Start der Messung gibt es die Optionen „*Single Start*“ (= einmalige Messung mit anschließender Darstellung des Mikrofonspannungsverlaufs) oder „*Cont. Start*“ (= wiederholtes Ausführen der Messung).

Durch Drücken von „*Break*“ wird das Messprogramm abgebrochen.

Im Programm „**Simulation**“ erfolgt die Einstellung von:

- *Samples/s* (= Abtastrate)
- *Samples* (= Zahl der Abtastpunkte während einer Aufnahme)
- *a* (= Amplitudenfaktor)
- *f* (= Frequenz).

Es wird die Kreisfrequenz  $w$  berechnet:  $w=2\pi*f$

Es können entweder vorgegebene periodische Funktionen mit einstellbaren Parametern  $a$  und  $f$  ausgewählt oder selbst definiert werden (Achtung! Multiplikation mit \*).

### 3. Versuchsdurchführung

#### 3.1 Messaufbau

Das Blockschaltbild des Versuchsaufbaus ist in Bild 3 dargestellt. Das Messmikrofon mit unmittelbar aufgesetztem Vorverstärker ist über die zugehörige Anschlußleitung mit dem Eingang  $\begin{matrix} A-In \\ Ch O \end{matrix}$  des Interfacesystem USB 1208FS zur AD-Wandlung und weiter mit dem PC

verbunden. Der Rundkolben (oder andere zu untersuchende akustische Hohlraumresonatoren) und das Messmikrofon sind mit Stativmaterial geeignet zu befestigen. Das Sondenende des Mikrofons sollte sich im oberen Drittel des kugelförmigen Teils des Rundkolbens befinden. Werden Kugelresonatoren untersucht, so ist das Mikrofon möglichst dicht an die Kugelöffnung heranzuführen.

Nach Einschalten der Batteriespannung am Mikrofon bleibt dieses etwa 45min betriebsbereit. Danach erfolgt eine automatische Abschaltung. Ein erneutes Einschalten der Batterie ist erforderlich!

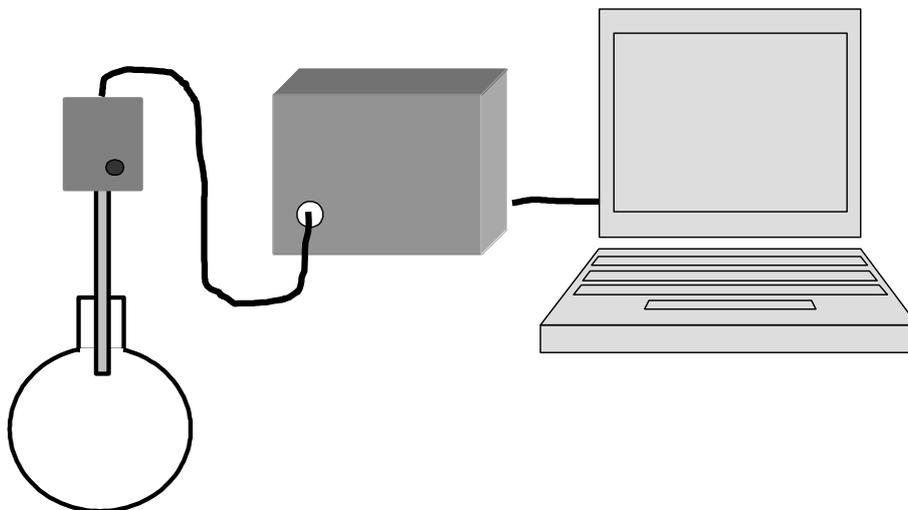


Bild 4: Prinzipaufbau: Rundkolben mit Messmikrofon und Vorverstärker, nachgeschaltet sind Interfacesystem und PC.

#### 3.2 Simulation von periodischen Signalen

Im Programm „Hohlraumschwingungen“ ist das Unterprogramm „Simulation“ aufzurufen. Für einige überschaubare Fälle sind Zeitfunktionen auszuwählen oder zu definieren und mit dem dazugehörigen Frequenzspektrum zu vergleichen. (Vorschlag: Untersuchen Sie typische Signalvarianten eines Funktionsgenerators: Sinus, Dreieck, Rechteck.)

#### 3.3 Resonanz im Rundkolben

Zu 1.2: Im Programm „Hohlraumschwingungen“ ist das Unterprogramm „Messung“ aufzurufen, die Abtastparameter (Samplezahl und Sample/Sekunde) einzustellen und die Messung zu starten. Sollte der gemessenen Zeitverlauf Schwebungseffekte zeigen (die Signalamplitude besitzt Nulldurchgänge), so wählen Sie mit den beiden Cursors einen schwe-

bungsfreien Zeitbereich aus und sehen sich dessen Frequenzspektrum an. Im Regelfall beobachten Sie für Helmholtzresonatoren eine einzige ausgeprägte Resonanzfrequenz. Mit dem Cursor können Sie das Frequenzspektrum abfahren und Punkte anwählen, deren Frequenz und Amplitude dann angezeigt werden. Da der Zeitverlauf des Mikrofonsignals an „Samples“-Punkten abgetastet wird, ist die zulässige Abtastfrequenz  $f_T$  bezüglich der Messfrequenzen  $f_M$  durch die Bedingungen (Abtasttheorem) eingeschränkt

$$\frac{f_T}{2} \geq f_M > \frac{f_T}{\text{Samples}} \quad (18).$$

Notieren Sie Ihre Ergebnisse in einer Messwerttabelle!

Zu 1.3: Eine Vergrößerung der Dämpfung des Resonators erreichen Sie beispielsweise durch Auskleiden des Gefäßhalses mit einem möglichst rauhen Material (Sandpapier, Krepppapier, ...) oder durch leichtes Abdecken mit Watte. Wählen Sie die Parameter des Abtastens zu dieser Aufgabe so, dass Sie bestmöglich aus Ihren Daten die Veränderung der Resonanzfrequenz und die Änderung der Güte der Resonanzkurve ableiten können. Um den Trend herauszufinden, sollten Sie mindesten drei Dämpfungen untersuchen. Erstellen Sie eine geeignete Messwerttabelle!

### 3.4 Volumenabhängigkeit der Resonanzfrequenz

(A) Die Verringerung des Hohlraumvolumens  $V_H$  erreichen Sie beispielsweise durch kontrolliertes Einfüllen von Wasser in den Rundkolben (Achtung: dabei ist das Mikrofon zu entfernen!).

(B) Am Versuchsplatz stehen weiterhin unterschiedlich große Helmholtz-Kugeln zur Verfügung. Die Messergebnisse sollten zweckmäßigerweise im doppeltlogarithmischen Maßstab dargestellt werden, um die funktionale Abhängigkeit  $f_{\text{res}}(V_H)$  leicht erkennen zu können.

Hinweis: Auch wenn Sie begleitend zu Ihrem Protokoll Bildschirmausdrucke für die einzelnen Messaufgaben erstellen können, unterschreibt Ihr Assistent jeweils eine Messwerttabelle zu 1.2, 1.3 und 1.4!

### Literatur :

Weiterführende Literatur: H. Borucki, „Einführung in die Akustik“, Mannheim 1989