114 - Drehpendel

1. Aufgaben

1.1 Ermitteln Sie die Trägheitsmomente eines Drehtisches und zweier Probekörper (Stab, Scheibe) durch das Ausmessen von Torsionsschwingungen!

1.2 Bestimmen Sie das Direktionsmoment des Drehtisches mit Hilfe
(a) einer dynamischen und
(b) einer statischen Methode!

1.3 Zusatzaufgabe (für Physik-Studenten): Überprüfen Sie die Gültigkeit des Steinerschen Satzes!

2. Grundlagen

Stichworte:
Dreh- oder Torsionspendel, Drehmoment, Trägheitsmoment, Direktionsmoment, Schwingungsgleichung, harmonische Schwingung, Steinerscher Satz

2.1 Das Drehpendel als schwingungsfähiges System

Ein Drehpendel besteht aus einer horizontalen, drehbar gelagerten Scheibe, deren Drehachse über eine Spiralfeder mit dem Gehäuse verbunden ist. Soll das Pendel um einen bestimmten Winkel φ gegen seine Ruhelage verdreht werden, muss man ein Drehmoment M (z.B. durch eine tangential im Abstand r von der Drehachse angreifenden Kraft F) anlegen: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Die Größe von M wird durch das rücktreibende Moment der Feder (Direktionsmoment D) bestimmt. Es gilt:

$$\vec{M} = -D \cdot \vec{\varphi} \qquad (1).$$

Wird das Pendel nach erfolgter Auslenkung losgelassen, so vollführt es Drehschwingungen, welche bei Vernachlässigung der Reibung durch die Differentialgleichung

$$I \cdot \ddot{\vec{\varphi}} = -D \cdot \vec{\varphi} \qquad (2)$$

beschrieben werden. I ist das Massenträgheitsmoment des Drehtisches, welches durch Aufsetzen von Zusatzkörpern verändert werden kann. Die Lösungen der Differentialgleichung sind harmonische Schwingungen mit der Schwingungsdauer.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{D}} \qquad (3)$$

2.2 Massenträgheitsmomente

Analog zur geradlinigen Bewegung, wo die Wirkung der Kraft $\vec{F}$ auf einen Körper der Masse m zur Beschleunigung a führt ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$), ergibt sich bei der Drehbewegung die Winkelbeschleunigung α (oder $\ddot{\varphi}$) aus der Wirkung des Drehmomentes $\vec{M}$ auf einen Körper mit dem Trägheitsmoment I (entsprechend $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$). Für den Massenpunkt gilt $I = m \cdot r^2$, wobei r der Abstand von der Drehachse ist. Eine kleine Masse weit außen angebracht kann somit das gleiche I besitzen wie eine große Masse in Achsennähe. Für beliebige Körper berechnet sich das Massenträgheitsmoment aus:

$$I = \int_{\text{Volumen}} r^2 \, \mathrm{d}m \tag{4}$$

Daraus ergibt sich in unserem speziellen Fall:

für einen langen, homogenen Stab (Masse m, Länge ℓ), Achse durch den Massenmittelpunkt:

$$I_{\text{Stab}} = \frac{m}{12} \ell^2 \tag{5}$$

und für eine homogene Scheibe (Masse m, Radius r), Achse ist Symmetrieachse:

$$I_{\text{Scheibe}} = \frac{m}{2} r^2 \tag{6}.$$

2.3 Messmethode

Zur Bestimmung von Trägheitsmomenten wird die Schwingungsdauer des Drehtisches mit bzw. ohne aufgesetzte Zusatzkörper gemessen. Für die Schwingungsdauer T_o des Tisches (mit Trägheitsmoment I_o) ohne Zusatzmasse gilt:

$$T_o^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I_o}{D} \tag{7}.$$

Zur Ermittlung von I_o und D (dynamische Methode) wird eine Zusatzmasse m im Abstand s von der Drehachse angebracht, wodurch sich die Schwingungsdauer auf

$$T_m^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I_o + ms^2}{D} \tag{8}$$

erhöht. Durch Kombination der Gleichungen 7 und 8 erhält man

$$I_o = \frac{ms^2}{\left(\frac{T_m}{T_o}\right)^2 - 1} \tag{9}$$

bzw.

$$D = \left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2 \cdot I_o \tag{10}.$$

Hinweis: Im Versuch realisieren wir den Massenpunkt m näherungsweise durch einen rotationssymmetrischen Körper, welcher „lose“, d.h. frei drehbar aufgesetzt wird.

Sind I_o und D bekannt, so kann das Massenträgheitsmoment I_K eines beliebigen Körpers ermittelt werden, indem er bei $s = 0$ fest aufgesetzt und die Schwingungsdauer des Systems „Drehtisch + Zusatzkörper" gemessen wird.

Es gilt
$$T_K^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I_o + I_K}{D} \qquad (11)$$

woraus folgt

$$I_K = \left(\frac{T_K}{2\pi}\right)^2 \cdot D - I_o \qquad (12).$$

Für eine genauere Bestimmung von I_o und D wird die dynamische Methode derart modifiziert, dass die Zusatzmasse (Scheibe oder Stab) lose in verschiedenen Abständen s von der Drehachse angebracht und jeweils T_m bestimmt wird. Die Messpunkte ergeben eine Gerade der Form

$$T_m^2 = \mathrm{B} \cdot s^2 + \mathrm{A}$$

mit dem Anstieg $\mathrm{B} = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{D}$ und dem Absolutglied $\mathrm{A} = 4\pi^2 \cdot \frac{I_o}{D}$.

Zur Bestimmung von D und I_o erhält man daraus die Gleichungen:

$$D = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{B} \qquad (13)$$

und
$$I_o = \frac{D \cdot A}{4\pi^2} = m \cdot \frac{A}{\mathrm{B}} \qquad (14).$$

Die statische Methode zur Bestimmung des Direktionsmomentes nutzt unmittelbar die Gültigkeit von Gl. 1 aus. Die Gewichtskraft von Massestücken ($\vec{F} = \mathrm{m} \cdot \vec{g}$), greift über einen Faden mit Umlenkrolle tangential am Rande des kreisförmigen Drehtisches an und steht damit senkrecht zum Radius r. Das Drehmoment hat somit den Betrag $M = m \cdot g \cdot r$. Nach Messung des Auslenkwinkels φ gegenüber der Ruhelage kann das Direktionsmoment aus:

$$D = \frac{m \cdot g \cdot r}{|\varphi|} \qquad (15)$$

berechnet werden.

2.4. Steinerscher Satz

Um die Gültigkeit des Steinerschen Satzes $I_s = I_{s=0} + \mathrm{m}s^2$ zu prüfen, wird die Zusatzmasse (Scheibe bzw. Stab) fest in verschiedenen Abständen s von der Drehachse angebracht und jeweils T_m bestimmt wird. Die Schwingungsdauer hat ebenfalls die Form $T_m^2 = \mathrm{B} \cdot s^2 + \mathrm{A}$, wobei der Parameter A die Trägheitsmomente aller beteiligten Körper bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt enthält und B die Gesamtmasse der bei s aufgesetzten Körper.

3. Versuchsdurchführung

Die Schwingungsdauer des Drehpendels ist mit der Stoppuhr jeweils für folgende Anordnungen zu messen:

- Drehtisch alleine
- Drehtisch mit lose aufgesetztem Körper im Abstand *s* von der Drehachse
- Drehtisch mit fest aufgesetztem Körper im Abstand *s* von der Drehachse
- Drehtisch mit bei $s = 0$ fest aufgesetztem Körper.

Als Zusatzkörper finden ein Stab und eine Scheibe Verwendung. Es ist sinnvoll, den Abstand *s* so groß wie möglich zu wählen. Denkbar ist auch die Aufnahme einer Messreihe mit verschiedenen Abständen (vgl. Zusatzaufgabe). Grundsätzlich sollte man immer über eine möglichst große Zahl von Schwingungen mitteln, um den Messfehler zu verringern. Die Werte für die Massen der Körper liegen am Versuchsplatz aus. Berechnen Sie die Trägheitsmomente des Drehtisches und der beiden Zusatzkörper sowie das Direktionsmoment des Tisches. Nutzen Sie a) die Gleichungen (7-12) sowie b) eine lineare Regression der Beziehung von $T_\mathrm{m}^2(s^2)$ und stellen Sie letztere grafisch dar.
Vergleichen Sie die erhaltenen Ergebnisse für den Stab und die Scheibe mit der Theorie (Gl. 5 und 6).

Zur statischen Bestimmung des Direktionsmomentes werden ca. zehn Messungen bei verschiedenen Drehmomenten durchgeführt (Auslenkung φ bis etwa 90°). Das Anlegen der Drehmomente erfolgt durch Anhängen von Gewichtsstücken. Man trägt die Messwerte in ein $\varphi(m)$-Diagramm ein und bestimmt den Anstieg $\Delta\varphi/\Delta m$ der entstehenden Geraden. Aus Gl. 13 folgt dann:

$$\mathrm{D} = g \cdot r \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta m}\right)^{-1} \quad .$$

Vergleichen Sie den so gewonnenen Wert mit dem Ergebnis der dynamischen Methode!

Für den Nachweis des Satzes von Steiner wird ebenfalls T_m^2 über s^2 grafisch aufgetragen. Die Messpunkte ergeben eine Gerade, deren Parameter $\mathrm{A} = 4\pi^2 I/D$ und $\mathrm{B} = 4\pi^2 m/D$ durch lineare Regression bestimmt werden können. Die bei s aufgesetzte Gesamtmasse ergibt sich jeweils aus $m = m_\mathrm{Achse} + m_\mathrm{Körper}$. Aus den Regressionsparametern A und B lassen sich dann *D* und *I* bzgl. des Schwerpunktes berechnen. Bei Gültigkeit des Steinerschen Satzes stimmen dieses Werte mit denen aus der dynamischen Methode überein.