112 - Reversionspendel

1. Aufgaben

1.1 Messen Sie die Schwingungsdauer eines Reversionspendels für zwei Achsen in Abhängigkeit von der Stellung eines Laufgewichtes und stellen Sie diese graphisch dar!

1.2 Bestimmen Sie daraus die Schwerebeschleunigung in Jena!

2. Grundlagen

Stichworte:
mathematisches Pendel, physikalisches Pendel, Schwingungsgleichung, geografische Abhängigkeit der Schwerebeschleunigung

2.1 Schwerebeschleunigung

Das Schwerefeld eines Himmelskörpers entsteht durch die Gravitation. Eine Masse wird in diesem Feld senkrecht nach unten beschleunigt (Fallbeschleunigung, Einheit m/s^2). Die Größe der Fallbeschleunigung wird durch die Zentrifugalkraft, sowie auf der Erdoberfläche durch Abplattung und Höhe über NN, Dichteunterschiede im Boden und die Gezeitenwirkung beeinflusst. Sie beträgt an den Polen $g = 9.83\ m/s^2$, am Äquator 9.78, auf 45° nördlicher bzw. südlicher Breite 9.80665 (Normfallbeschleunigung) und in Jena ca. $9.811\ m/s^2$.

Im Erdinneren steigt g von Null am Erdmittelpunkt bis zu einem Maximum an der Erdoberfläche. Aufgrund des komplizierten Aufbaus von Erdkern, -mantel und -kruste aus Schichten mit sehr unterschiedlichen Dichten verläuft der Anstieg nicht linear. Außerhalb der Erde nimmt das Gravitationsfeld proportional zum Quadrat des Abstandes vom Erdmittelpunkt ab, während die Zentrifugalbeschleunigung proportional mit diesem Abstand zunimmt. In einer Höhe von knapp 36.000 km heben sich beide Einflüsse auf. Dort bewegt sich ein Satellit genau synchron mit der Erddrehung (geostationäre Umlaufbahn).

Für andere Himmelskörper ist die Schwerebeschleunigung aufgrund anderer Massen, Radien und Zentrifugalkräfte natürlich eine andere: z.B. Mond $1.6\ m/s^2$, Mars 3.7, Venus 8.9 (passt ganz gut, ist aber leider sehr ungemütlich dort), Jupiter 23.1, Sonne 274.0, Sirius B (Weißer Zwerg) ca. 10^6 (Quelle: Wikipedia).

Die Messung von g erfolgt durch Gravimeter (vgl. Lit.), prinzipiell kann dafür auch das Ausmessen der Schwingungsdauer eines geeigneten Pendels bekannter Länge genutzt werden.

2.2 Mathematisches und physikalisches Pendel

Das „mathematische Pendel“ ist die Idealisierung eines experimentellen Aufbaus und lässt sich nur näherungsweise, z.B. durch ein Fadenpendel (Kugel mit Masse m an einem dünnen Faden der Länge l), realisieren. Seine Bewegungsgleichung lautet:

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin\varphi \quad \textit{bzw.} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi = 0 \tag{1}$$

Für kleine Auslenkungen ($\sin\varphi \approx \varphi$, φ im Bogenmaß) erhält man als Lösung

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos\omega t \qquad \text{mit} \qquad \omega^2 = \frac{g}{l} \tag{2}$$

Wegen $\omega = 2\pi/T$ ergibt sich für die Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3}$$

Die Masse spielt in diesem Zusammenhang keine Rolle mehr. Durch Umstellen von Gl.3 kann aus T und l die Schwerebeschleunigung g bestimmt werden (leider nur näherungsweise).

Bei einem realen „physikalischen“ Pendel treten an die Stelle von g und l die Größen D_A und I_A. Dabei ist $D_A = m \cdot s_A \cdot g$ das Direktionsmoment bzgl. einer Drehachse A (m ... Gesamtmasse des Pendels, s_A ... Abstand des Massenmittelpunktes von der Drehachse) und I_A ist das Massenträgheitsmoment bezüglich der Achse A.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{m \cdot s_A \cdot g}} \tag{4}$$

Aus Gl.3 und 4 folgt, dass ein physikalisches Pendel die gleiche Schwingungsdauer besitzt wie ein mathematisches Pendel der Fadenlänge

$$\ell_R = \frac{I_A}{m \cdot s_A}, \tag{5}$$

wobei ℓ_R die der Achse A entsprechende sogenannte „reduzierte Pendellänge“ ist.

2.3 Reversionspendel

Da es schwierig ist, die Größen I_A und s_A mit hoher Genauigkeit zu vermessen, verwenden wir im Versuch ein sogenanntes „Reversionspendel“. Dieses besteht aus einem Metallstab, der um zwei parallele Achsen **A** und **B** schwingen kann (Bild 1). Die Achsen haben den fest vorgegebenen Abstand L. Zwischen den Achsen befindet sich ein kleines Laufgewicht der Masse m. Durch Verschieben von m lässt sich die Schwingungsdauer T des Pendels variieren.

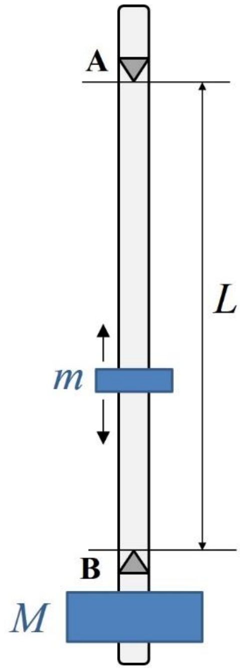

Bild 1: Reversionspendel.

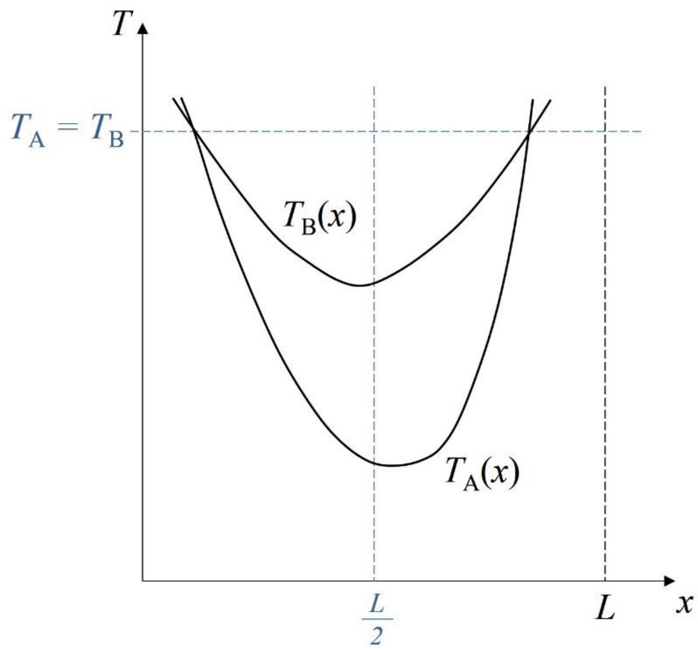

Bild 2: Grafische Darstellung von $T_A(x)$ und $T_B(x)$.

Die parabelähnlichen Kurven $T_A(x)$ und $T_B(x)$ besitzen zwei Schnittpunkte (Bild 2). Bei diesen Stellungen des Laufgewichtes sind die Schwingungsdauern um A und B einander gleich

$$T_A = T_B = T \qquad (6).$$

Der Achsenabstand L ist dann gleich der reduzierten Pendellänge, und die Schwerebeschleunigung g lässt sich (diesmal ohne systematische Fehler) aus der Gleichung für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels errechnen

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot L \qquad (7).$$

Hinweise:

1) In der Nähe des Stab-Endes ist ein Zusatzkörper der Masse M angebracht. Dieser sollte etwa bei 20 mm stehen (vor Beginn der Messwertaufnahme kontrollieren!). Ist das nicht der Fall, kann es passieren, dass sich die Kurven nicht schneiden.

2) Für unsere genaue Messung müssen der Auftrieb in Luft und die Größe der Schwingungsamplitude φ_0 (Einheit rad) berücksichtigt werden. Man erhält dann die korrigierte Gleichung (vgl. Lit.)

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot L \cdot \left\{1 + \frac{1}{8}\varphi_0^2 + \frac{\rho_L}{\rho}\right\} \qquad (8),$$

ρ_L ... Dichte der Luft (≈ 0,0013 g/cm³), ρ ... Dichte des Pendels (10,03 ± 0,04 g/cm³).

3. Versuchsdurchführung

3.1 Das Ziel des Experimentes ist, die Schwerebeschleunigung mit sehr hoher Genauigkeit zu bestimmen (ca. $3 \cdot 10^{-4}$). Überlegen Sie sich vor dem Versuch, in welchem Bereich die Abweichungen der Messgrößen (T, L, ρ, φ_0) liegen sollten, damit die relative Messunsicherheit von g den angestrebten Wert nicht überschreitet!

3.2 Die Messung der Schwingungsdauer erfolgt mit einem Quarz-Frequenz- und Periodenmessgerät, welches durch das Pendel über eine Lichtschranke gesteuert wird. Zur Erhöhung der Messgenauigkeit wird über mehrere Perioden gemittelt und außerdem jede Messung mehrfach wiederholt (3-4 mal).
Bestimmen Sie die Schwingungsdauern $T_A(x)$ und $T_B(x)$ in Abhängigkeit von der Stellung x des Laufgewichtes in Schritten von 5 cm. Die Zeitmessung sollte über 5 Perioden (10 Impulse!) erfolgen. Danach werden die Schwingungsdauern $T_A(x)$ und $T_B(x)$ grafisch dargestellt, und daraus die ungefähre Lage der Schnittpunkte beider Kurven ermittelt. Anschließend werden im Bereich der Schnittpunkte $T_A(x)$ und $T_B(x)$ in Schritten von $\Delta x \leq 5$ mm gemessen und in einem vergrößerten Diagramm aufgetragen. Im angegebenen Bereich können die beiden Funktionen durch Geraden angenähert werden. Ihr Schnittpunkt liefert T.
Die Messung der Länge L erfolgt durch Vergleich mit einem Invarstab (kleiner Ausdehnungskoeffizient) bekannter Länge L_0. Die Differenz zwischen L und L_0 wird mit einem Messschieber bestimmt.

3.3 Als Zusatzaufgabe könnte man die Abhängigkeit der Schwingungsdauer T vom Auslenkwinkel bestimmen: Bei fester Stellung des Laufgewichtes wird für fünf verschiedene Auslenkwinkel φ_0 (Einheit rad; $\varphi_0 \approx$ Auslenkung/Abstand Drehachse-Lichtschranke) die Schwingungsdauer T gemessen und über φ_0^2 aufgetragen. Es gilt:

$$T = T(\varphi_0 = 0) \cdot \left(1 + \frac{1}{16}\,\varphi_0^{\,2}\right) \qquad (8),$$

d.h. die Messwerte sollten auf einer Geraden liegen.

Literatur: Ilberg „Physikalisches Praktikum“.