

# 109 – Kugelfallmethode nach Stokes

## 1. Aufgaben

- 1.1 Messen Sie die Fallzeit von Stahlkugeln mit unterschiedlichem Durchmesser in Rizinusöl!
- 1.2 Bestimmen Sie daraus die dynamische Viskosität des Öls, und vergleichen Sie diese (unter Berücksichtigung des Messfehlers) mit dem zugehörigen Tabellenwert (Temperaturabhängigkeit beachten!)
- 1.3 Berechnen Sie die kinematische Viskosität, und prüfen Sie für jede Kugelsorte nach, ob für die Reynoldssche Zahl die Bedingung  $Re < 0,4$  gilt!

## 2. Grundlagen

### Stichworte:

Laminare und turbulente Strömung, Reynoldssche Zahl, innere Reibung, dynamische und kinematische Viskosität, Gesetze von Stokes und von Hagen-Poiseuille

### 2.1 Kohäsion und Adhäsion

Die Anziehungskräfte zwischen Atomen bzw. Molekülen in Flüssigkeiten sind verglichen mit denen in Festkörpern deutlich geringer. Während in festen Stoffen die Atome an ihre Plätze gebunden sind und nur Schwingungen um eine Ruhelage ausführen können, lassen sich Flüssigkeitsteilchen im allgemeinen leicht gegeneinander verschieben. Völlig frei beweglich sind sie dennoch nicht. Die Flüssigkeit kann zwar eine beliebige Form einnehmen, das Volumen bleibt dabei aber unverändert. Gegenüber Luft bzw. Vakuum oder anderen Stoffen bildet sie eine Oberfläche (bzw. Grenzfläche).

Die Anziehung zwischen den Teilchen wird als *Kohäsion* bezeichnet. Ihr entgegen wirkt die thermische Eigenbewegung der Moleküle. Bei genügend hoher Temperatur können sich die Teilchen voneinander lösen, frei im Raum verteilen und bilden dann ein Gas. Die Kohäsion beruht in vielen Fällen auf sogenannten „*Van-der-Waals-Kräften*“. Bei Wasser und einigen anderen Stoffen sind es aber vor allem die (wesentlichen stärkeren) Wasserstoffbrückenbindungen, welche die Kohäsion verursachen, was einige herausragende Eigenschaften zur Folge hat.

Dieselben Kräfte, die eine Flüssigkeit zusammenhalten, wirken in etwas anderer Weise auch zwischen Flüssigkeit und z.B. einer angrenzenden Gefäßwand. Diesen Effekt bezeichnet man als *Adhäsion*.

Es sind vor allem zwei Erscheinungen, durch welche die Molekularkräfte makroskopisch sichtbar werden: die *Oberflächenspannung* (vgl. Versuch 107) und die *Viskosität* (innere Reibung).

2.2 Innere Reibung in Flüssigkeiten

Bringt man eine Flüssigkeit zwischen zwei Glasplatten, so zeigt sich, dass zur Verschiebung der Platten eine nicht unbeträchtliche Kraft aufzuwenden ist. Zur Erklärung kann man sich die Flüssigkeit in dünne Schichten zerlegt denken (Flüssigkeitslamellen mit infinitesimaler Dicke  $dx$ ), von denen die jeweils äußeren Schichten auf Grund der Adhäsionskräfte fest am Glas haften, während die anderen gegen den wirkenden Reibungswiderstand zueinander verschoben werden (vgl. Bild 1).

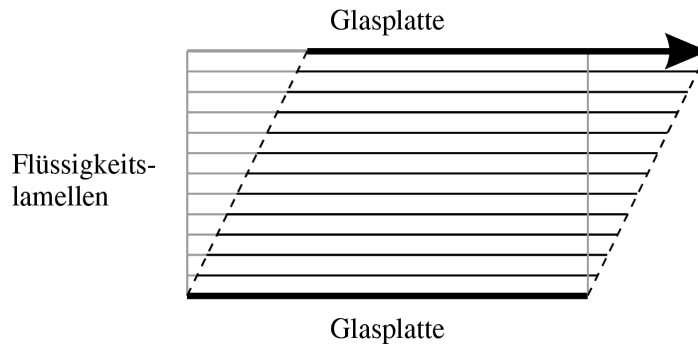


Bild 1: Geschwindigkeitsverteilung zwischen zwei parallel zueinander bewegten Platten.

Analog dazu lässt sich die Strömung in einem Rohr erfassen, wenn man sich (gleiche Modellvorstellung wie oben) die Flüssigkeit im Rohrrinneren in koaxiale zylindrische Schichten zerlegt denkt, zwischen denen aufgrund der Kohäsionskräfte Reibung auftritt, und die sich deshalb mit unterschiedlicher Geschwindigkeit bewegen. Dabei bleiben die äußeren Schichten gegenüber denen in der Mitte zurück (vgl. Bild 2), was sich z.B. durch Einfärben auch experimentell gut nachweisen lässt. Wenn sich die Schichten dabei nicht miteinander vermischen, so nennt man die Strömung „laminar“.

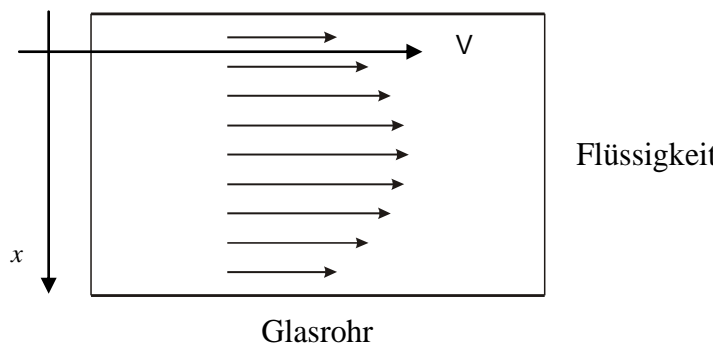


Bild 2: Geschwindigkeitsverteilung in einem laminar durchströmten Rohr ( $v$  ... Geschwindigkeit,  $x$  ... Ortskoordinate).

Zwischen benachbarten Hohlzylindern wirkt eine Reibungskraft  $F_R$  der Bewegung entgegen, die der Berührungsfläche  $A$  und dem Geschwindigkeitsgefälle  $dv/dx$  proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor ist die dynamische Viskosität  $\eta$  (auch Koeffizient der inneren Reibung genannt)

$$F_R = -\eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dx} \tag{1}$$

In vielen praktischen Fällen ist es vorteilhaft, mit der auf die Dichte (der Flüssigkeit!) bezogenen kinematischen Viskosität  $\nu$  zu rechnen

$$\nu = \eta / \rho \quad (2).$$

Die Einheiten der dynamischen bzw. kinematischen Viskosität sind  $\text{Pa} \cdot \text{s} = \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$  bzw.  $\text{m}^2/\text{s}$ .

[Veraltete Einheiten, die sich auf cm, g, s beziehen, sind das Poise (P) und das Stokes (St)].

Für den Spezialfall einer Kugel vom Radius  $r$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in einer Flüssigkeit bewegt, wird die einwirkende Reibungskraft durch das Stokessche Gesetz bestimmt

$$\vec{F}_R = -6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot \vec{v} \quad (3).$$

Zur Vertiefung: Im mikroskopischen Bild der Flüssigkeiten und Gase tritt die Viskosität als Folge der *Diffusion* der Komponente der Teilchenimpulse senkrecht zur Bewegungsrichtung der Strömung auf (siehe Anlage 1).

### 2.3 Reynoldssche Zahl

Alle bisherigen Betrachtungen gelten für kleine Strömungsgeschwindigkeiten, bei denen die aufeinanderfolgenden Flüssigkeitsschichten wirbelfrei aneinander vorbei gleiten (laminare Strömung).

Eine Aussage darüber, ob laminare Strömung vorliegt oder nicht, kann durch die Reynoldssche Zahl  $Re$

$$Re = \frac{L_c \cdot v_c}{\nu} \quad (4)$$

erfolgen. Dabei ist  $L_c$  eine charakteristische Länge des Rohrs oder des umströmten Körpers und  $v_c$  eine charakteristische Geschwindigkeit. Die Reynoldssche Zahl ist ein Maß für das Verhältnis von Trägheitskraft zu Reibungskraft, die auf ein strömendes Teilchen einwirken. Es gibt für jede Strömungsform (z.B. bewegte Kugel, Strömung durch ein Rohr) eine kritische Reynoldssche Zahl. Wenn die Reynoldssche Zahl größer als dieser kritische Wert wird, dann schlägt die laminare Strömung in eine turbulente Strömung um.

Die charakteristischen Größen für die **umströmte** Kugel sind  $L_c = 2 \cdot r$  und  $v_c = v$ . Das Stokessche Gesetz (Gl.3) gilt hier mit genügender Genauigkeit (Fehler kleiner als 1 %) für  $Re < 0,4$ . Bei größeren Reynoldsschen Zahlen machen sich Abweichungen von Gl. 3 bemerkbar. Die obigen Beziehungen können auch auf Strömungen in Gasen angewandt werden, falls die Strömungsgeschwindigkeit sehr klein gegen die Schallgeschwindigkeit ist.

### 2.4 Messmethode

Nach einer gewissen Fallstrecke im Öl (vgl. Bild 3) erreicht die freifallende Kugel eine konstante Geschwindigkeit  $v$ . Das bedeutet, dass die Summe der wirkenden Kräfte gleich Null wird. Neben der Reibungskraft  $F_R$  treten

die Schwerkraft 
$$\vec{F}_S = m \cdot \vec{g} \quad (5)$$

und die Auftriebskraft 
$$\vec{F}_A = -\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot \vec{g} \quad (6)$$

auf ( $m$  ... Kugelmasse,  $\rho$  ... Dichte des Öls).

Mit  $\vec{F}_S + \vec{F}_R + \vec{F}_A = 0$  und  $v = \frac{l}{t}$  ( $l$  .. Fallstrecke,  $t$  .. Fallzeit) erhält man aus den Gl.(3), (5) und (6)

$$\eta = \frac{g \cdot t}{6 \cdot \pi \cdot r \cdot l} \left( m - \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot \rho \right) \quad (7).$$

Ist die Dichte  $\rho_k$  der Kugeln bekannt, so kann man schreiben

$$\eta = \frac{2 \cdot g \cdot t \cdot r^2}{9 \cdot l} \cdot (\rho_k - \rho) \quad (8).$$

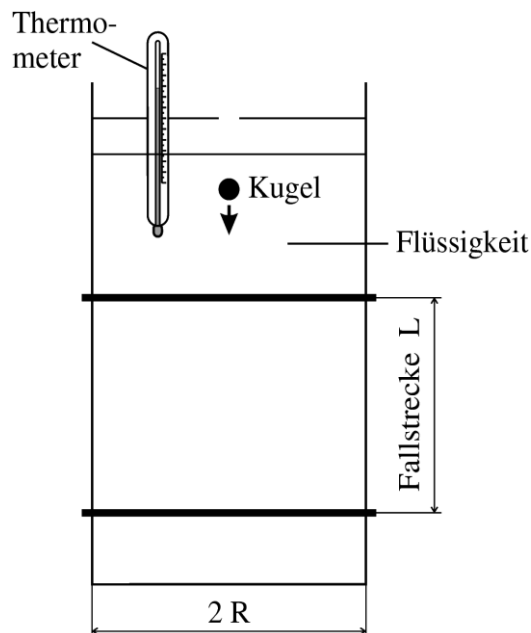


Bild 3: Prinzipaufbau des Kugelfallviskosimeters.

### 3. Versuchsdurchführung

#### 3.1 Messung aller benötigten Größen

Als erstes sind Masse  $m$  und Durchmesser  $d = 2r$  der verwendeten Kugeln mit Präzisionswaage bzw. Feinmeßschraube zu bestimmen. Die Länge  $l$  der Fallstrecke wird mittels zweier Markierungsringe festgelegt (Lineal an der Rückseite des Rohres). Dann misst man für alle

Kugeln die Fallzeit  $t$  mit der Stoppuhr. Es ist darauf zu achten, dass keine Luftblasen an den Kugeln haften. Die Temperatur des Öls muss zu Beginn gemessen und zwischen den Messungen immer wieder kontrolliert werden, da die Viskosität sehr stark temperaturabhängig ist. Die Dichte des Öls beträgt  $\rho = 0.96 \text{ g/cm}^3$ .

### 3.2 Korrektur der Ergebnisse

Die angegebene Gleichung zur Berechnung der Viskosität (Gl. 8) gilt exakt nur für ein unendlich ausgedehntes Fallrohr. Nur dann wird die umströmende Flüssigkeit nicht durch die Rohrwandungen behindert. Da die Kugel in der Realität in einem Rohr mit dem endlichen Radius  $R$  fällt, wird die Reibungskraft etwas größer, und an die Stokessche Formel muss eine Korrektur, im einfachsten Fall in der Form

$$F_R^{\text{kor}} = F_R \cdot \left( 1 + p \cdot \frac{r}{R} \right) \quad (9)$$

angebracht werden, wobei  $p$  eine positive Zahl ist. Für die Viskosität bedeutet das: die von uns gemessenen Werte sind systematisch nach oben verfälscht. Die Verfälschung ist umso größer, je größer der Kugelradius  $r$  im Verhältnis zum Rohrradius  $R$  ist, wobei der Zusammenhang zwischen gemessenem  $\eta$  und  $r$  näherungsweise linear ist. Die einfachste Möglichkeit, diesen systematischen Fehler zu korrigieren, ist folgende: Man führt die Bestimmung von  $\eta$  unter ansonsten gleichen Bedingungen mit Kugeln unterschiedlicher Radien  $r$  durch, trägt  $\eta$  über  $r$  auf und legt eine Ausgleichsgerade durch die Messpunkte. Der Schnittpunkt mit der Ordinatenachse (d.h.  $r = 0$ ) liefert das korrigierte Ergebnis.

### 3.3 Hinweise zur Auswertung und Fehlerabschätzung

Falls vom Assistenten nicht anders bestimmt, wird das Experiment mit fünf Kugeln gleichen Durchmessers ( $d \approx 3 \text{ mm}$ ) sowie weiteren fünf Kugeln mit jeweils deutlich verschiedenen Durchmessern im Bereich von 1 bis 6 mm durchgeführt. Letztere dienen zur Korrektur entsprechend Abschnitt 3.2. Die Messwerte ( $m$ ,  $r$ ,  $t$ ) der fünf gleichen Kugeln werden gemittelt. Ihre Streuung kann (unter Beachtung der Genauigkeit der Messmittel) als Maß für die absoluten Messabweichungen betrachtet werden. Da alle Kugeln aus demselben Material bestehen (Stahl) ist es sinnvoll, die Dichte zu berechnen (Mittelwert bilden) und  $\eta$  über Gl. (8) zu bestimmen. Die relative Messunsicherheit  $\Delta\eta/\eta$  kann in diesem Fall in einfacher Weise durch Addition der relativen Messabweichungen der einzelnen Messgrößen gewonnen werden (der Ungenauigkeit der Dichte des Öls wird vernachlässigt). Bei der Angabe eines endgültigen Wertes  $\Delta\eta$  für das korrigierte Ergebnis ist allerdings noch die Genauigkeit der Extrapolation zu berücksichtigen.

### 3.4 Kinematische Viskosität und Reynoldssche Zahl

Aus dem korrigierten Ergebnis für  $\eta$  wird die kinematische Viskosität  $\nu$  berechnet (Gl. 2). Für alle Kugeln ist mit Hilfe von Gl. 4 zu überprüfen, ob die Reynolds-Zahl kleiner als 0,4 ist. Welche Konsequenzen ergeben sich (beispielsweise bei der Durchführung der Korrektur in 3.2.), wenn dies nicht mehr gilt?

**Anlage 1: Viskosität als Diffusionsprozess**

Wichtige statistische Prozesse der Physik wie die Teilchendiffusion, die **Wärmeleitung**, die **innere Reibung** (Viskosität) oder auch der **Ladungstransport** in Ohmschen Widerständen sind Transportprozesse, bei denen räumliche und zeitliche Änderungen einer physikalischen Größe auf charakteristische Weise miteinander verbunden sind.

Bei all diesen Prozessen verursacht die **räumliche Änderung einer Größe  $\varphi$**  (der Gradient) den Transport einer anderen Größe mit der Stromdichte  $j$ . Wir nennen diesen Transport einen Diffusionsstrom. Die **räumliche Änderung einer Größe  $\varphi$**  ist also die treibende Kraft für die Ströme. Alle oben genannten Prozesse sind von folgender Gestalt:

$$j = -c_1 \cdot \frac{d\varphi}{dx}. \quad (10)$$

Im Falle der Viskosität löst eine Geschwindigkeitsänderung quer zur Bewegungsrichtung einen Impulsstrom aus, d.h. benachbarte Schichten werden laminar mitgenommen. Es wird Impuls quer zur Bewegungsrichtung der Strömung transportiert. Das sehen wir, wenn in Gl.(1) die Kraft durch die Schubspannung  $\sigma = \frac{F}{A}$  ersetzt wird. Anstelle Gl.(1) erhalten wir dann folgerichtig zu Gl (10)

$$\sigma = -\eta \cdot \frac{dv}{dx}.$$

**Literatur** : siehe [http://www.physik.uni-jena.de/Literatur\\_p\\_131600.html](http://www.physik.uni-jena.de/Literatur_p_131600.html)