314 – Wechselstrombrücke

1. Aufgaben

Mit Hilfe einer Wechselstrombrücke sollen folgende Aufgaben bearbeitet werden:

1.1 Messung der Induktivität von zwei Spulen.

1.2 Messung der Gesamtinduktivität zweier Spulen in Reihenschaltung bei
a) gleichsinniger,
b) gegensinniger Kopplung.
Graphische Darstellung der Gesamtinduktivität in Abhängigkeit vom Kopplungsgrad (Spulenabstand). Vergleich mit der Theorie!

1.3 Messung der Kapazität von zwei Kondensatoren.

1.4 Messung der Gesamtkapazität der zwei Kondensatoren in
a) Parallelschaltung,
b) Reihenschaltung.
Vergleich mit den aus beiden Einzelkapazitäten berechneten Werten.

2. Grundlagen

Stichworte:
Induktivität, Kapazität, komplexe Wechselstromwiderstände, Brückenschaltung, Phasenverschiebung, Oszilloskop

2.1. Wechselstromwiderstände

Im Gleichstromkreis ist der Widerstand einer Spule identisch mit dem ohmschen Widerstand ihrer Drahtwicklung. Bei Wechselstrom hingegen besitzt sie einen frequenzabhängigen sogenannten *Blindwiderstand* vom Betrag

$$B_L = \omega L \tag{1}$$

(ω... Kreisfrequenz, L ... Induktivität), welcher mit dem ohmschen Anteil (*Wirkwiderstand*) in Reihe geschaltet ist. Der Gesamtwiderstand ergibt sich durch vektorielle Addition in der komplexen Zahlenebene (Zeigerdiagramm, Bild 1), wobei der Betrag der komplexen Impedanz Z der Scheinwiderstand |Z| ist.

Komplexe Impedanz $Z = R + j\,\omega\,L$ Scheinwiderstand $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega\,L)^2}$

Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$ (Spannung eilt Strom voraus!)

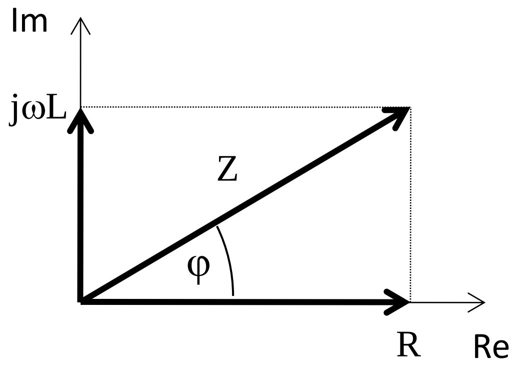

Bild 1: Zeigerdiagramm für den Widerstand einer Spule.

Bei einem Kondensator liegen analoge Verhältnisse vor. Hier wird ein Blindwiderstand

$$B_C = \frac{1}{\omega C} \qquad \text{(C ... Kapazität)}$$

zum (nahezu unendlich großen) ohmschen Widerstand *parallel* geschaltet. Es addieren sich die Leitwerte. Der Phasenwinkel wechselt das Vorzeichen. (Lesen Sie dazu auch die entsprechende Literatur, z.B. /1/, /7/ u.a.).
Bei Reihenschaltung von Spulen bzw. Kondensatoren addieren sich die ohmschen bzw. Blindwiderstände jeweils einzeln. Gleiches gilt bei Parallelschaltung für die Leitwerte. Daraus folgt für Induktivitäten bzw. Kapazitäten

$$\begin{aligned}
&\text{Reihe:} \quad L_{ges} = L_1 + L_2 + \ldots && \frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots \\
&\text{Parallel:} \quad \frac{1}{L_{ges}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots && C_{ges} = C_1 + C_2 + \ldots\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

2.2 Kopplung von Spulen

Spulen koppeln durch die Überlagerung (gleichsinnig oder gegensinnig) ihrer Magnetfelder. Die Induktivität einer Luftspule beträgt

$$L = \mu_0 \frac{N^2\ A}{l} \tag{3}$$

(N...Windungszahl, A... Spulenquerschnitt, l... Spulenlänge).
Eine zweite Spule gleichen Querschnitts A und gleicher Länge l, aber anderer Windungszahl N' hat die Induktivität

$$L' = \mu_0 \, \frac{N'^2 \, A}{l} \qquad (4).$$

Schiebt man beide Spulen ineinander und schaltet sie gleichsinnig in Reihe (gleiche Stromflussrichtung), so entspricht das einer Spule mit der Windungszahl $N_G = N + N'$. Die Gesamtinduktivität ergibt sich dann zu

$$L_G = \mu_0 \, \frac{(N + N')^2}{l} \, A = \mu_0 \, \frac{A}{l} \, (N^2 + N' + 2 \, N \, N')$$

$$= L + L' + 2 \sqrt{L \, L'} \qquad (5).$$

Bei ungekoppelten Spulen ist die Gesamtinduktivität die Summe der Einzelinduktivitäten. Der Summand $2\sqrt{L \, L'}$ stellt also den Kopplungsanteil dar. Bei entgegengesetzter Stromrichtung (Gegenkopplung) ergibt sich

$$L_G = L + L' - 2 \sqrt{L \, L'} \qquad (6).$$

Sind die Spulenquerschnitte unterschiedlich $A' < A$, so ist der Kopplungsanteil

$$2 \sqrt{L \, L'} \cdot \sqrt{\frac{A'}{A}} \quad .$$

Für kreisförmige Querschnitte mit den Radien r und r' ist der Kopplungsanteil

$$2 \sqrt{L \, L'} \cdot \frac{r'}{r} \quad .$$

Sind die Spulen um die Länge x gegeneinander verschoben, so verringert sich die Kopplung (bei Vernachlässigung des Streufeldes außerhalb des Spuleninneren) um den Faktor $\frac{l - x}{l}$ (relative Überlappung). Für $x > l$ verschwindet die Kopplung. Zusammenfassend erhält man also

$$L_G = L + L' \pm 2 \, \frac{l - x}{l} \, \frac{r'}{r} \, \sqrt{L \cdot L'} \qquad x < l$$

$$L_G = L + L' \qquad x \geq l \qquad (7).$$

2.3 Resonanzfrequenzaufspaltung

Bei induktiv gekoppelten Schwingkreisen (vgl. Versuch 317) führt der Kopplungsanteil $\pm L_{\text{Koppl}}$ zu einer Aufspaltung der Eigenfrequenz

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

in zwei neue Resonanzfrequenzen entsprechend der um $\pm L_{\text{Koppl}}$ erhöhten bzw. erniedrigten Gesamtinduktivität.

Die Resonanzfrequenzaufspaltung gekoppelter gleichartiger Schwingungssysteme ist eine fundamentale physikalische Erscheinung, die auch für mechanische und optische Oszillatoren gilt. Sie führt u.a. dazu, dass bei dicht gepackten atomaren Bausteinen (Gitteratome im Festkörper) sich die scharfen Energieniveaus (Eigenfrequenz) durch Vielfachaufspaltung zu Energiebändern verbreitern.

2.4 Wechselstrombrücke

Als Wechselstrombrücke wird eine Schaltung entsprechend Bild 2 bezeichnet. Die Idee ist ähnlich der Wheatstonschen Messbrücke im Gleichstromkreis (vgl. Versuch 300). Zwei Messzweige werden mit Hilfe eines Nullabgleichinstruments verglichen. Einer der Messzweige enthält Bauelemente mit nur bekannten Größen, der zweite Zweig enthält das zu vermessende Bauelement. Als Brückenabgleichsinstrument wird bei der Wechselstrombrücke oftmals ein Oszilloskop verwendet.

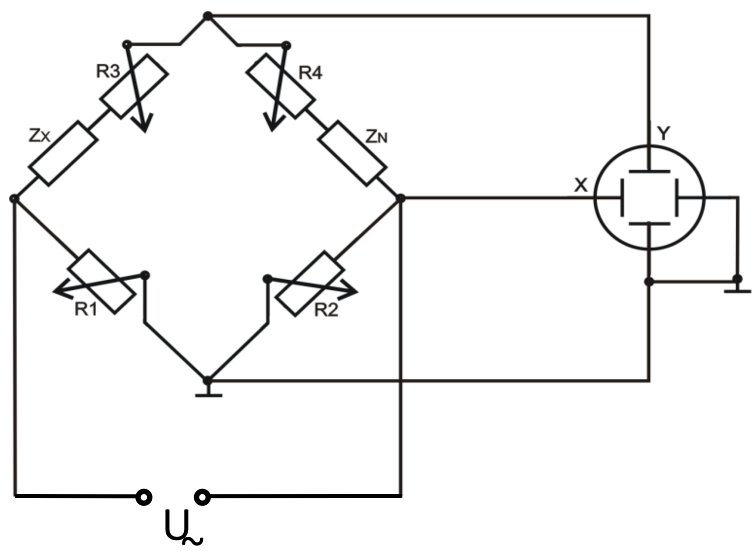

Bild 2: Wechselstrombrücke. Ein Oszilloskop dient zum Nullabgleich beider Zweige:
Rechts: Zweig mit bekannten Größen R_2, R_4 und Z_N.
Links: Zweig mit bekanntem R_1 und R_3 und unbekanntem Z_X.

3. Versuchsdurchführung

Die Wechselstrombrücke wird entsprechend Bild 3 geschaltet. Als Nullindikator für den Brückenabgleich wird ein Oszilloskop verwendet. Die Speisespannung U_S von einem Frequenzgenerator wird zur Potentialtrennung (Generator/Oszi.) über einen Übertrager angelegt.

Brücken- und Speisespannung werden an die y- bzw. x-Ablenkung des Oszilloskops gelegt und erzeugen dabei eine Lissajousfigur. Diese ist im allgemeinen Fall eine Ellipse. Im abgeglichenen Zustand verschwindet die Brückenspannung und die Lissajousfigur ist eine waagerechte Gerade. Da mit dem Oszilloskop die y- und x-Spannung gegen ein gemeinsames Massepotential gemessen werden müssen, wird als x-Spannung nicht die volle Speisespannung U_S verwendet, sondern nur der (phasengleiche) Spannungsabfall über R_2.

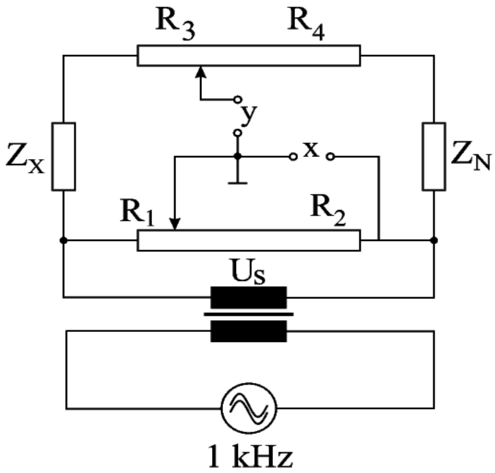

Bild 3: Messschaltung: x, y - Anschlüsse für den x bzw. y - Eingang des Oszilloskops, U_S - Speisespannung: ca. 5V, 1 kHz, Sinus, $R_1 + R_2 = 1\ k\Omega$, $R_3 + R_4 = 100\ \Omega$.

Der Abgleichvorgang der Brücke verläuft in zwei Schritten, siehe Bild 4.

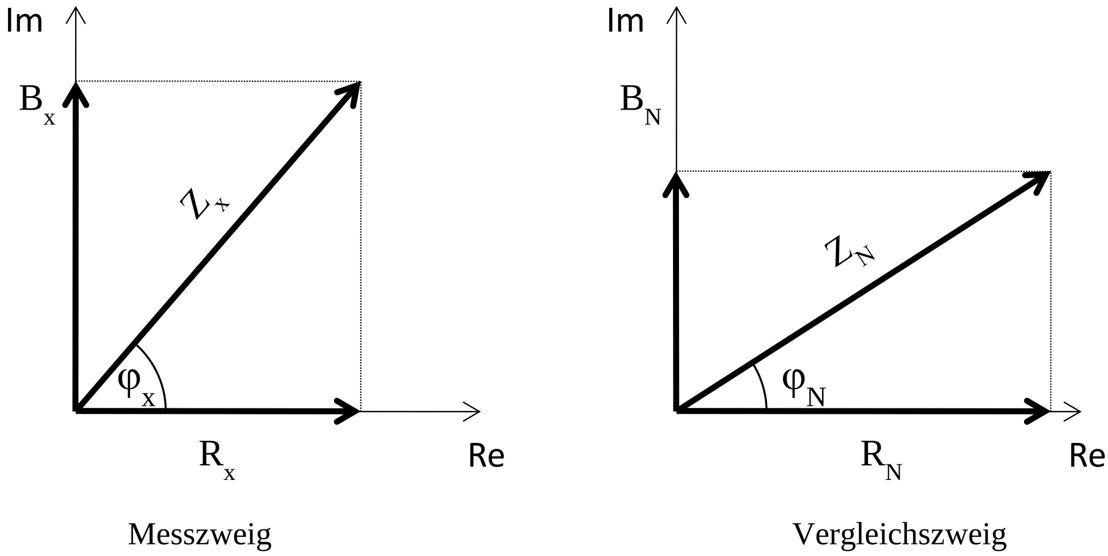

Bild 4: Dargestellt sind jeweils die Zeigerdiagramme für links den Messzweig und zeitgleich rechts den Vergleichszweig als Ausgangssituation (allgemeiner Fall, Darstellung gilt für Induktivitäten) für eine unabgeglichende Messbrücke. Die Phasenwinkel φ_X und φ_N sind unterschiedlich groß.

Im unabgeglichenen, allgemeinen Fall finden wir

$$\varphi_x \neq \varphi_N \qquad \frac{Z_x}{Z_N} \neq \frac{R_1}{R_2} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Oszilloskopbild : eine Ellipse.}$$

1.Schritt: Phasenabgleich:
Das Widerstandsverhältnis R_3 / R_4 muss so einstellt werden, dass die Ellipse zur Geraden wird. (Man schaltet zu R_X und R_N je einen Hilfswiderstand (R_3 bzw. R_4) in Reihe, so dass sich in beiden Zweigen dasselbe Verhältnis Blind-/Wirkwiderstand ergibt.)

$$\frac{B_x}{R_x + R_3} = \frac{B_N}{R_N + R_4}$$; die Phasenwinkel φ_X und φ_N sind damit gleich groß:

$$\varphi_x = \varphi_N \qquad \frac{|Z'_x|}{|Z'_N|} \neq \frac{R_1}{R_2} \qquad \Rightarrow$$ Oszilloskopbild: schrägliegende Gerade.

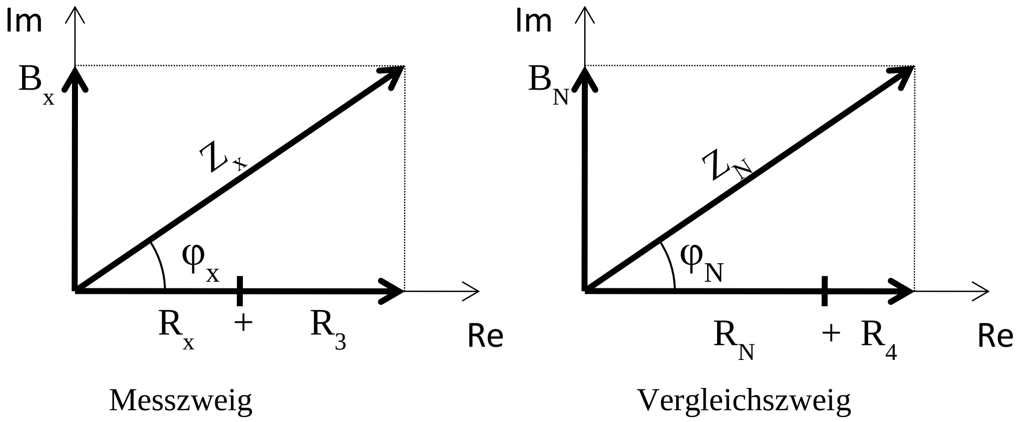

Bild 5: Dargestellt sind jeweils die Zeigerdiagramme für eine abgeglichende Messbrücke. R_3 und R_4 werden so eingestellt, dass die Phasenwinkel φ_x und φ_N gleich groß werden.

2. Schritt Brückenabgleich:
Das Verhältnis R_1 / R_2 so einstellen, dass die Gerade waagerecht liegt. (Der Spannungsteiler R_1 / R_2 wird in eine Stellung gebracht, bei der die Gesamtspannung U_S zwischen R_1 und R_2 im gleichen Verhältnis geteilt wird, wie zwischen

$$|Z'_x| \text{ und } |Z'_N|, \text{ d.h. } \frac{R_1}{R_2} = \frac{|Z'_x|}{|Z'_N|},$$

die Spannung an y ist damit gleich Null).

Da im abgeglichenen Zustand sowohl die ohmschen als auch die Blindanteile von Z'_x und Z'_N jeweils im Verhältnis R_1:R_2 stehen, d.h.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{B_x}{B_N} = \frac{R_x + R_3}{R_N + R_4} \quad \text{folgt sofort} \quad \frac{L_x}{L_N} = \frac{R_1}{R_2} \qquad (8).$$

Für Kapazitäten sieht das Zeigerdiagramm zwar etwas anders aus. Der Abgleich funktioniert aber genauso. Man erhält:

$$\frac{C_x}{C_N} = \frac{R_2}{R_1} \qquad (9).$$