Fehlerrechnung - leicht gemacht (Kurz-Version zum Ausdrucken)

In der Wissenschaft gehört zu einem gemessenen Wert immer auch eine Aussage über die Genauigkeit der Messung. Warum?

Beispiel: ein gesetzlicher Grenzwert ist **400**, der gemessene Wert beträgt **390**. Wird der Grenzwert überschritten? Rein rechnerisch nicht, aber es stellt sich die Frage nach der Genauigkeit der Messung. Wenn die Messmethode eine Genauigkeit von **± 20** hat, kann der gemessene Wert eigentlich zwischen 370 und 410 liegen und damit den Grenzwert überschreiten. Liegt die Messgenauigkeit dagegen bei **± 1**, wird der Grenzwert nicht erreicht. Die sich daraus ergebenden Folgen können erheblich sein. Also ist es wichtig zu wissen ob ± 20 oder ± 1.

Erster Schritt: Messen und dabei (live!) die Genauigkeit abschätzen

Jeder selbst gemessene Wert x besitzt eine *Messgenauigkeit* Δx. Diese kann niemals exakt bestimmt werden, sondern man muss sie abschätzen.
Manchmal kann man sich dabei an Vorgaben orientieren, z.B. Messgerätetoleranzen, die auf dem Gerät bzw. im Begleitheft stehen. Bei Schwankungen einer Anzeige (Zeiger oder digital) fällt Δx (die Schwankungsbreite) direkt ins Auge. Ansonsten hilft nur austesten, d.h. mehrmals hinschauen und ablesen und dann z.B. sagen: der Messwert könnte 22.3 cm sein oder 22.4 cm (aber nicht 22.2 cm und auch nicht 22.5 cm), d.h. ich nehme **(22.35 ± 0.05) cm** .
Wenn es zeitlich vertretbar ist, kann man auch eine große Zahl von Werten aufnehmen und diese statistisch auswerten (vgl. Anleitung Versuch 303 bzw. Hausversuch 1).

Wenn die Messaufgabe nur einen einzigen Wert hervorbringt, so hat man jetzt bereits das fertige Ergebnis. In den meisten Fällen müssen aber verschiedene Werte aufgenommen werden, aus denen sich das Endergebnis über eine Formel errechnet.

Zweiter Schritt: Genauigkeit des Endergebnisses ermitteln

Methode 1: Bei Summen und Differenzen addieren sich die *absoluten Fehler*. Ein Beispiel:

Länge L ergibt sich als Differenz aus den Messwerten **(28.15 ± 0.05) cm** und **(22.35 ± 0.05) cm**.
Die Differenz ist 5.80 cm , die Fehler addieren sich zu 0.10 cm.

Wir schreiben als Ergebnis L = (5.80 ± 0.10) cm bzw. **L = (5.8 ± 0.1) cm**.

Methode 2: Bei Produkten und Quotienten addieren sich die *relativen Fehler*.

Was ist ein relativer Fehler? Das ist der Fehler Δx bezogen auf den Messwert x, also $\Delta x / x$.

In unserem Beispiel bedeutet das: Länge L = **5.8 cm**, absoluter Fehler ΔL = **0.1 cm**, relativer Fehler **0.1cm / 5.8cm = 0.017**, die Länge 5.8 cm wurde also auf 1.7 Prozent genau bestimmt.

Angenommen, unser angestrebtes Ergebnis ist die Fläche eines Rechtecks mit der oben ermittelten Länge L = (5.8 ± 0.1) cm und einer Breite B = (0.9 ± 0.1) cm.
Die Fläche A errechnet sich als Produkt $L \cdot B$, d.h. $A = 5.8\text{ cm} \cdot 0.9\text{ cm} = \mathbf{5.22\ cm^2}$.

Für den relativen Fehler gilt dann: **ΔA / A = ΔL / L + ΔB / B**

ΔA / A = 0.1cm / 5.8cm + 0.1cm / 0.9cm = 0.017 + 0.111 = **0.128** (entspricht 12.8%).

Der absolute Fehler ergibt sich daraus zu: **ΔA** = **0.128 • 5.22cm^2** = **0.668cm^2**.

Das Ergebnis lautet (sinnvoll gerundet): **A = (5.2 ± 0.7) cm^2**.

Methode 2 gilt auch für mehr als zwei Meßgrößen und darüber hinaus für Quadrate oder höhere Exponenten (die Exponenten werden dabei zu Vorfaktoren).

$$\text{Beispiel :} \qquad E = \frac{x \cdot y^2}{z} \;\rightarrow\; \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta x}{x} + 2\frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

Methode „2a“: Kombination aus Methode 1 und 2

Wenn in einer Gleichung Produkte/Quotienten gemischt mit Summen/Differenzen vorkommen, so kann man in vielen Fällen durch geschickte Kombination der Addition absoluter bzw. relativer Fehler zum Erfolg kommen. Man muß allerdings dabei ein bißchen nachdenken.

Methode 3: Einsetzen von Maximal- bzw. Minimalwerten

Man setzt die oberen bzw. unteren Grenzen der Meßwerte so in die Gleichung ein, daß das Ergebnis maximal bzw. minimal wird und nimmt die Differenz zum „mittleren“ Wert als Fehler.

$$E = \frac{u - v}{x - y} \;\rightarrow\; E_{max} = \frac{u_{max} - v_{min}}{x_{min} - y_{max}} \qquad \text{und} \qquad \Delta E = E_{max} - E$$

Ganz wichtig ist, daß die Maximal- und Minimalwerte an den richtigen Stellen eingesetzt werden. Ansonsten ist diese Methode auch ohne weitere Erklärung sehr einsichtig. Ein gravierender Nachteil ist hier, daß man im Gegensatz zu den anderen Varianten am Ende nicht weiß, wie sich der Gesamtfehler auf die einzelnen Meßgrößen aufteilt.

Was tun, wenn die einfachen Regeln nicht greifen? Dafür gibt es dann noch eine Methode, die (fast) immer geht, die *partielle Differentiation*.

Methode 4: Partielle Differentiation

Mathematisch kann man ΔE aus der „*partiellen Ableitung*“ der Funktionsgleichung E = f (x, y, z) nach allen meßfehlerbehafteten Größen (x, y, z), jeweils multipliziert mit Δx, Δy, Δz berechnen.

$$\Delta E = \left|\frac{\partial E}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial E}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial E}{\partial z}\right| \Delta z + \ldots$$

Diese Methode funktioniert bei kleinen Δx, Δy, Δz immer (für lineare Zusammenhänge auch bei größeren Δx, Δy, Δz), verlangt aber gewisse mathematische Grundfertigkeiten und ist u.U. ziemlich aufwändig. Deshalb sollte man erst einmal schauen, ob für ein gegebenes Problem eine der Methoden 1 bis 3 geeignet ist, bevor die großen mathematischen Geschütze aufgefahren werden.

Dritter Schritt: Darstellung der Ergebnisse mit Fehlergrenzen

Ergebnisdarstellung erfolgt in der Form: **$E \pm \Delta E$** , d.h. in unserem Beispiel: **$A = (5.2 \pm 0.7)\ cm^2$**

Diese Schreibweise mit absolutem Fehler ist besser als z.B. $5.2\ cm^2 \pm 12.8\ \%$. Man sieht nämlich sofort, dass das Ergebnis ein Intervall ist, welches von $4.5\ cm^2$ bis $5.9\ cm^2$ reicht

$(5.2 \pm 0.7)\ cm^2$ ist dasselbe wie **$4.5\ cm^2 \ldots 5.9\ cm^2$**.

Wichtig: Das Ergebnis eines Experimentes ist nicht die Zahl, welche der Taschenrechner am Ende anzeigt, z.B. 5.22 oder auch 5.220745432543…, sondern immer das Intervall, welches durch die Fehlergrenzen vorgegeben wird. In diesem ist der wahre Wert zu vermuten, weiter kann nichts garantiert werden. In unserem Beispiel hat das Intervall eine Breite von $\pm 0.7\ cm^2$; damit ist es auch logisch, bei der Ergebnisdarstellung alle weiteren Nachkommastellen (Hundertstel, Tausendstel, usw.) wegzulassen, da diese gegenüber 0.7 bedeutungslos sind, d.h. **Runden!** Wie?

1. Ergebnis E mit Taschenrechner ausrechnen und erstmal die meisten Nachkommastellen übernehmen.
2. Absoluten Fehler ΔE ermitteln.
3. Fehler ΔE auf **ein oder zwei** geltende **Ziffern** runden.
4. Ergebnis E auf die gleiche Zahl Nachkommastellen runden wie ΔE.

Im Beispiel: $A = (5.2 \pm 0.7)\ cm^2$ (eine geltende Ziffer) oder $A = (5.22 \pm 0.67)\ cm^2$ (zwei geltende Ziffern)

Vierter Schritt: Interpretation des Ergebnisses

In der wissenschaftlichen Praxis ist es oft so, daß ein Vergleichswert existiert (von einer früheren Messung, aus einem Tabellenwerk o.ä.), der bestätigt werden soll (z.B.: $A = 5.5\ cm^2$). In diesem Fall ist zu prüfen, ob der erwartete Wert im Fehlerintervall des Ergebnisses liegt liegt. Das kann rechnerisch oder auch grafisch erfolgen.
Wenn wie hier der Vergleichswert deutlich im Fehlerintervall liegt, dann kann von einer *Übereinstimmung im Rahmen der erreichbaren Meßgenauigkeit* gesprochen werden (Versuch gelungen!). Wenn nicht, dann liegt eine Abweichung des Ergebnisses vom Erwartungswert vor, nach deren Ursache(n) geforscht werden muß. Denkbar sind *grobe* Fehler bei Versuchsdurchführung oder Auswertung, aber auch die Existenz unbekannter *systematischer* Fehler ist möglich.
Manchmal ist die Überschneidung allerdings auch eher negativ zu betrachten, wenn beispielsweise die Vorgabe heißt: Die Fläche soll kleiner als $5.5\ cm^2$ sein. Nun ist zwar 5.2 kleiner als 5.5 , aber da ein großer Teil des Ergebnisintervalls über 5.5 liegt, kann die Aussage $A < 5.5\ cm^2$ nicht garantiert werden. Hier müßte dann die Meßmethode verfeinert und das Fehlerintervall verkleinert werden.

Literatur: John Taylor: „Fehleranalyse“ und „Fehlerrechnung – leicht gemacht“ (lange Version)