Quantenmechanik SS-2020

Klausur

24.07.2020, Zeit: 9:00 - 12:00

Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Lösungswege sind in nachvollziehbarer Form aufzuschreiben.

Aufgabe 1: Orts- und Impulsdarstellung — 1+3+4 Punkte

Gehen Sie im Folgenden von einer Dimension und Ortsdarstellung aus.

a) Geben Sie an, wie Orts- und Impulsoperator auf eine Wellenfunktion $\psi(x)$ wirken.

b) Bestimmen Sie uneigentliche Eigenfunktionen des Impulsoperators. Was unterscheidet *eigentliche* und *uneigentliche* Eigenfunktionen? Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen des Impulsoperators die entsprechende Eigenschaft aufweisen.

c) Gehen Sie vom Erwartungswert des Ortsoperators (bzgl. einer normierbaren Wellenfunktion) in Ortsdarstellung aus und überführen Sie diesen in Impulsdarstellung, um die Terme unter dem folgenden Integral zu identifizieren.

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}p \, \langle \psi | p \rangle \, \langle p | \hat{x} | \psi \rangle$$

Hinweis: Fouriertransformation

$$\psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar} \, \tilde{\psi}(t,p) \, \mathrm{d}p$$

Aufgabe 2: Projektor und Wahrscheinlichkeit — 1+2+2 Punkte

Ein quantenmechanisches System habe einen Hamiltonoperator mit diskreten Eigenwerten E_n und zugehörigen nicht-entarteten, orthonomierten Eigenzuständen $|n\rangle$.
Wir betrachten den normierten Zustand

$$|\psi\rangle = c_1 \, |1\rangle + c_3 \, |3\rangle + c_4 \, |4\rangle = \sum_{n \in \mathcal{I}} c_n \, |n\rangle$$

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Energiewert E_3 zu messen?

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert des Projektors $\hat{P}_m = |m\rangle \langle m|$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Eine Messung der Energie lieferte den Messwert E_1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in einer direkt darauf folgenden Messung den Messwert E_3 zu erhalten? Begründen Sie.

Aufgabe 3: Operatoren **1+2+3 Punkte**

Es seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesche Operatoren.

a) Zeigen Sie, dass der Kommutator von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ anti-hermitesch ist. (Gehen Sie davon aus, dass die Definitionsbereiche aller beteiligten Operatoren den nötigen Ansprüchen genügen.)

b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte anti-hermitescher Operatoren rein imaginär sind.

c) Was gilt für das Inverse unitärer Operatoren? Zeigen Sie, dass aus der Erhaltung der Norm quantenmechanischer Zustände folgt, dass der Zeitentwicklungsoperator unitär sein muss.

Aufgabe 4: Unbestimmtheitsrelation **1+1+8 Punkte**

In Ortsdarstellung sei die normierte Wellenfunktion für die Bewegung eines freien Teilchens entlang der x-Achse zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 gegeben durch:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} e^{\mathrm{i}\, k_0 x}$$

a) Unbestimmtheitsrelation zweier Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ sei gegeben durch

$$(\Delta\hat{A})^2\,(\Delta\hat{B})^2 \geq \frac{1}{4}\left|\langle\,[\hat{A},\hat{B}]\,\rangle\right|^2$$

Bestimmen Sie die rechte Seite für die Observablen $\hat{x}$ und $\hat{p}_x$. Der Kommutator von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ darf als bekannt vorausgesetzt werden.

b) Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung zwischen der Varianz $(\Delta\hat{A})^2$ und den Erwartungswerten $\langle\,\hat{A}\,\rangle$ und $\langle\,\hat{A}^2\,\rangle$ einer Observablen $\hat{A}$ gilt.

$$(\Delta\hat{A})^2 \equiv \langle\,(\hat{A} - \langle\,\hat{A}\,\rangle)^2\,\rangle = \langle\,\hat{A}^2\,\rangle - \langle\,\hat{A}\,\rangle^2$$

c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{p}_x\rangle$, sowie die Varianzen $(\Delta\hat{x})^2 = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2$ bzw. $(\Delta\hat{p}_x)^2 = \langle\hat{p}_x^2\rangle - \langle\hat{p}_x\rangle^2$. Was ergibt sich für das Unschärfeprodukt $\Delta\hat{x}\cdot\Delta\hat{p}_x$?

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Aufgabe 5: Drehimpulsoperatoren **1+1+2+1+2+3+1 Punkte**

Gegeben sei ein Zustand $|\psi\rangle$, mit

$$|\psi\rangle = N\left[\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}/4}}{2}\,|Y_2^{-1}\rangle + \frac{2-\mathrm{i}}{2}\,|Y_2^0\rangle\right]$$

worin Y_l^m die Kugelflächenfunktionen sind.

a) Was gilt für das Skalarprodukt $\langle Y_l^m|Y_{l'}^{m'}\rangle$ zweier Zustände $|Y_l^m\rangle$?

b) Bestimmen Sie die Normierungskonstante N.

c) Geben Sie die Eigenwertgleichungen von $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ an.

d) Geben Sie die definierende Eigenschaft eines Drehimpulsoperators an.

e) Bestimmen Sie den Kommutator von $\hat{L}_z$ und $\hat{L}_+ = \hat{L}_x + \mathrm{i}\,\hat{L}_y$.

f) Ist $|\psi\rangle$ Eigenzustand von $\hat{\vec{L}}^2$ und/oder $\hat{L}_z$?

g) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{\vec{L}}^2\rangle$ und $\langle\hat{L}_z\rangle$ bzgl. des Zustands $|\psi\rangle$.

Aufgabe 6: Spin-1/2-Teilchen **2+2+2 Punkte**

Ein Spin-1/2-Teilchen befinde sich im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ und im Anfangszustand $|\psi_0\rangle = |x+\rangle$. Der Hamilton-Operator sei gegeben durch

$$\hat{H} = \mu_B B \sigma_z$$

Dabei sei σ_z die Pauli-Matrix, welche zur z-Komponente des Spin-Operators gehört, $|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle + |z-\rangle)$ ein Eigenvektor der Pauli-Matrix σ_x.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte des Hamiltonoperators ausgehend davon, dass Sie die Eigenwertgleichung von σ_z kennen.

b) Wenden Sie den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}$ auf den Anfangszustand an, um $|\psi(t)\rangle$ zu erhalten.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Teilchen zum Zeitpunkt t im Zustand $|x+\rangle$ befindet.

Aufgabe 7: Verständnisfragen **2+1+1 Punkte**

Beantworten Sie die folgenden Fragen in wenigen Sätzen/Stichpunkten.

a) Nennen Sie zwei Gleichungen der Quantenmechanik, die $\hbar$ enthalten, und erläutern Sie, in welchem Sinne $\hbar \to 0$ in diesen Gleichungen einen Übergang zur klassischen Mechanik darstellt.

b) Argumentieren Sie, warum die Wellenfunktion eines quantenmechanischen Objekts dieses zwar beschreibt, selbst jedoch keine messbare Größe sein kann.

c) Was könnte man bei Schrödingers Katze als paradox bezeichnen?

Gesamt: 50 Punkte