Klausur Analysis 3

25.2.2o21

- *Alle angegebenen Lösungswege müssen durchschaubar sein, fehlende Begründungen mindern die Bewertung.*
- *Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.*
- *Alle Ihre Lösungsblätter sind leserlich mit Namen und Vornamen (bzw. Matrikelnummer) zu versehen.*
- *Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen für die Aufgaben auf* ***separate*** *Seiten. Es ist diesmal auch zulässig, je zwei Aufgaben (**A1+A2, A3+A4, A5+A6, A7+A8, A9+A10**) auf einem Blatt zu lösen (bitte nicht mehr).*

	Aufgaben	**Punkte**
1	**(a)** Formulieren Sie den Integralsatz von Gauß für zulässige Bereiche $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$.	**2**
	(b) Seien $\mathcal{S}$ die Oberfläche der Kugel mit dem Radius $R > 0$ um den Nullpunkt und ν die äußere Normale von $\mathcal{S}$. Man berechne $$\int_{\mathcal{S}} \langle f, \nu \rangle \, \mathrm{d}\sigma$$ für $f(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$.	**3**
2	Entwickeln Sie die Funktion $$f(x) = \lvert x \rvert$$ in eine klassische Fourierreihe in $(-\pi, \pi)$.	**4**
3	**(a)** Wann heißt eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung *hyperbolisch, elliptisch bzw. parabolisch* in einem Gebiet Ω ?	**2**
	(b) In welchem Bereich der (x,y)-Ebene ist die partielle Differentialgleichung $$(x^2-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (y^2-1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$ elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ?	**3**
4	**(a)** Formulieren Sie das Rand-Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung.	**3**
	(b) Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes das Rand-Anfangswertproblem für die homogene eindimensionale Wellengleichung auf $[0,\pi]$, das gegeben ist durch $$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= 0, \quad x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(x,0) &= 0, \quad x \in [0,\pi], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right], \end{cases} \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$ Leiten Sie auch den konkreten Lösungsansatz her.	**9**
5	**(a)** Wann heißt eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$?	**1**
	(b) Was versteht man unter der Flächen- und Volumen-Mittelwerteigenschaft von Funktionen?	**2**
	(c) In welchem Zusammenhang stehen diese mit harmonischen Funktionen?	**1**

Bitte wenden!

	Aufgaben	Punkte
6	Sei $u(x,y)$ eine harmonische Funktion im Kreis $K_R(0)$, $$K_R(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}\,, \quad R > 0,$$ mit den Randwerten $$u(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta) = 1 + 5\cos^8\vartheta, \quad 0 \le \vartheta < 2\pi.$$ Bestimmen Sie $$\max\{u(x,y) : (x,y) \in \overline{K_R(0)}\} \qquad \text{und} \qquad \min\{u(x,y) : (x,y) \in \overline{K_R(0)}\}$$ und begründen Sie dies.	**3**
7	Formulieren Sie das innere Dirichlet-Problem für den Laplace-Operator Δ für ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.	**3**
8	Man löse das innere Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ für eine Funktion $u(x,y)$ in dem Quadrat $(0,\pi) \times (0,\pi)$, wobei folgende Randwerte gegeben sind : $$\begin{array}{rclll} u(x,0) &=& \sin 5x, & x \in [0,\pi], & \qquad u(0,y) = 0, \quad y \in [0,\pi], \\ u(x,\pi) &=& \sin 3x, & x \in [0,\pi], & \qquad u(\pi,y) = 0, \quad y \in [0,\pi]\,. \end{array}$$ Begründen Sie Ihre Herleitung und den Lösungsansatz.	**6**
9	**(a)** Wann heißt eine komplexwertige Funktion f komplex differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$?	**1**
	(b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten z_0 die komplexwertige Funktion $f : D(f) = \{z \in \mathbb{C} \;:\; \|z\| < 5\} \longrightarrow \mathbb{C}$, die gegeben ist durch $$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z - 1}, & 0 < \|z\| < 5, \\ 1, & z = 0, \end{cases}$$ differenzierbar ist. Geben Sie in diesen Punkten $f'(z_0)$ an.	**3**
10	**(a)** Wann heißt eine komplexwertige Funktion f holomorph in $G \subset \mathbb{C}$?	**1**
	(b) Gibt es eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch $$f(z) = f(x+iy) = x^2 + xy - y^2 + iv(x,y), \qquad z = x + iy,$$ in $\mathbb{C}$ holomorph ist ? Geben Sie in diesem Fall eine solche Funktion $v(x,y)$ an und begründen Sie Ihre Wahl.	**3**
	Die Klausur gilt ab mindestens 22 Punkten als bestanden.	**Σ : 50**