THEORETISCH-PHYSIKALISCHES INSTITUT
FRIEDRICH-SCHILLER UNIVERSITÄT JENA

Klausur Quantentheorie (Bachelor)

Sommersemester 2021

Bearbeitungszeit: 120 Minuten, Gesamtpunktzahl: 50

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, nummerieren Sie die Blätter und vermerken auf dem ersten Blatt die Gesamtanzahl der Blätter. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1: Wissens- und Verständnisfragen **(3+3+2+3 = 11 Punkte)**

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen kurz in Stichpunkten:

(a) Wie ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens am Ort x zum Zeitpunkt t gegeben? Kann diese größer 1 werden? Wie hängen Wahrscheinlichkeitsstromdichte und Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte zusammen?

(b) Im Folgenden betrachten wir das Produkt der Varianzen der Drehimpulsoperatoren $\hat{L}_x$ und $\hat{L}_y$ im Zustand $|\psi\rangle$. Geben Sie in Form einer Unbestimmtheitsrelation eine (möglichst einfache) nicht-triviale untere Schranke an für das Produkt der Varianzen. Kann diese nicht-triviale untere Schranke für bestimmte Zustände Null werden (Beispiel oder Begründung gefordert!)?

(c) Wir betrachten den folgenden Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{1}{2I}\left(\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2\right)$ wobei $\hat{L}_x$ bzw. $\hat{L}_y$ die x- bzw. y-Komponente des Bahndrehimpulsoperators sei. Geben Sie die Eigenzustände des Hamilton-Operators $\hat{H}$ an und bestimmen Sie deren Eigenwerte.

(d) Wir nehmen nun an einem quantenmechanischen System eine Energiemessung vor und betrachten im Folgenden Observablen, die explizit nicht zeitabhängig sind. Zeigen Sie dass nach der Messung die Erwartungswerte dieser Observablen zeitlich konstant sind. Nehmen Sie hierbei (der Einfachheit halber) an, dass Sie einen diskreten Energieeigenwert als Messwert erhalten haben.

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator **(2+5 = 7 Punkte)**

Wir untersuchen nun einen harmonischen Oszillators mit Masse m und Frequenz ω.

(a) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$, wobei Sie folgende Identitäten verwenden dürfen:

$$\hat{a} = \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}.$$

(b) Der harmonische Oszillator befinde sich im Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle$, wobei $|n\rangle$ die üblichen normierten Eigenzustände des Hamilton-Operators sind. Berechnen Sie in diesem Zustand den Erwartungswert von $\hat{x}$ und $\hat{x}^2$ sowie die Varianz des Operators $\hat{x}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen **(4+2+4 = 10 Punkte)**

Wir betrachten im Folgenden ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen, wobei wir uns nur auf den Spin Freiheitsgrad fokussieren. Der zeitunabhängige Hamilton-Operator sei in der Basis $\{|z;+\rangle, |z;-\rangle\}$ durch

$$\hat{H} \,\widehat{=}\, \frac{\hbar\Omega}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei Ω reell ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System im Zustand $|z,+\rangle$ präpariert, d.h. $|\psi(t = 0)\rangle = |z,+\rangle$.

(a) Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Systems mit dem gegebenem Hamilton-Operator $\hat{H}$.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{S}_y \rangle$ im Zustand $|\psi(t)\rangle$, wobei $\hat{S}_y$ durch

$$\hat{S}_y \,\widehat{=}\, \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

in der Basis $\{|z;+\rangle, |z;-\rangle\}$ gegeben ist.

(c) Wir führen nun zum Zeitpunkt $t_1 = 3/(2\Omega)$ eine Messung mit dem Operator $\hat{S}_z$ durch. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie den Messwert $+\hbar/2$ erhalten.

Ersatzlösung zum Weiterrechnen für Aufgabe (b) und (c), falls Sie Aufgabe (a) nicht gelöst haben:

$$|\psi(t)\rangle \,\widehat{=}\, \frac{1}{5}e^{i\Omega t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}e^{-i\Omega t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in der Basis $\{|z;+\rangle, |z;-\rangle\}$.

Aufgabe 4: Teilchen in einer Dimension **(3+3+(2+3) = 11 Punkte)**

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m, welches in einem unendlich hohen Kastenpotential (mit Wänden $x = 0$ und $x = L$) eingesperrt ist. Zudem wirkt ein delta-distributionswertiges Potential der Stärke λ bei $x = L/2$ auf das Teilchen. Das gesamte Potential lautet somit

$$V(x) = \begin{cases} \lambda\,\delta(x - \frac{L}{2}) & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda = 0$. Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen des Hamilton-Operators mit Eigenwert E durch $\phi(x) = \sin(kx - \phi_0)$ gegeben sind. Wie hängen der Energieeigenwert E und der Parameter k zusammen? Bestimmen Sie zudem die Parameter k und ϕ_0 so, dass die Randbedingungen erfüllt sind.

(b) Nun betrachten wir den Fall $\lambda \neq 0$, wobei λ ein kleiner Parameter sei, so dass der Beitrag $\lambda\,\delta(x - \frac{L}{2})$ zum Potential $V(x)$ als kleine Störung aufgefasst werden kann. Berechnen Sie mittels Störungstheorie die Änderung der Energieeigenwerte zu erster Ordnung in λ.

(c) Nun betrachten wir den Fall $\lambda \neq 0$, wobei λ nicht notwendigerweise klein ist.

  (i) Beweisen Sie, dass die Eigenfunktion $\phi(x)$ des Hamilton-Operators an der Stelle $x = \frac{L}{2}$ die Bedingung

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\phi'\left(\frac{L}{2} + \epsilon\right) - \phi'\left(\frac{L}{2} - \epsilon\right)\right) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\,\phi\left(\frac{L}{2}\right)$$

  erfüllen muss.

  (ii) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte E des Systems als Funktion von L und λ (beispielsweise in Form einer transzendenten Gleichung für E).

Bitte wenden!

Aufgabe 5: Elektron im Coulomb-Feld **(3+1+3+2+2 = 11 Punkte)**

Wir betrachten ein Elektron im Coulomb-Feld, wobei $|n\,l\,m\rangle$ die üblichen normierten Eigenzustände sind.

(a) Welche Werte dürfen die Quantenzahlen n, l und m annehmen? Welche Messungen (und mit welchen Messwerten) müsste man durchführen, um den Zustand $|n\,l\,m\rangle$ zu präparieren?

Der Zustand $|\psi\rangle$ des Elektrons zum Zeitpunkt $t = 0$ sei durch

$$|\psi\rangle = C\left(4\,|310\rangle + \sqrt{10}\,|210\rangle - i\,|200\rangle + 2\,|211\rangle + (1-2i)\,|321\rangle\right)$$

gegeben, wobei C eine komplexe Konstante ist.

(b) Bestimmen Sie die Konstante C so, dass der Zustand $|\psi\rangle$ normiert ist.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung mit $\hat{L}_z$ den Messwert 0 zu messen? In welchem Zustand befindet sich das Elektron unmittelbar nach der Messung mit $\hat{L}_z$, wobei diese den Messwert 0 ergab?

(d) Unmittelbar nach der in Teilaufgabe (c) beschriebenen Messung nehmen Sie nun eine Messung mit $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ vor und erhalten den Messwert $2\hbar^2$. In welchem Zustand befindet sich das System nach der Messung?

(e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in der Messung von Teilaufgabe (c) den Messwert 0 und in der Messung von Teilaufgabe (d) den Messwert $2\hbar^2$ zu erhalten? (Beide Messungen werden unmittelbar hintereinander ausgeführt.) Spielt es für die Wahrscheinlichkeit bzw. den resultierenden Zustand eine Rolle, falls Sie zuerst die Messung mit $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und unmittelbar danach mit $\hat{L}_z$ durchführen, wobei Sie die selben Messwerte wie oben erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort!