Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Klausur Quantentheorie (Bachelor)

Sommersemester 2022

Bearbeitungszeit: 180 Minuten, Gesamtpunktzahl: 50

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, nummerieren Sie die Blätter und vermerken Sie auf dem ersten Blatt die Gesamtanzahl der Blätter. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1: Wissens- und Verständnisfragen **(2+2+3+2+5 = 14 Punkte)**

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen kurz in Stichpunkten:

(a) Welche Eigenschaften muss ein Operator $\hat{A}$ haben, damit dieser eine Observable in der Quantenmechanik darstellt? Ist auch der Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ eine Observable, falls $\hat{A}$ und $\hat{B}$ Observablen sind? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Wir betrachten Quantenmechanik in einer räumlichen Dimension. $\hat{x}$ sei der Ortsoperator, $\hat{p}$ der Impulsoperator. Wie lautet der fundamentale Kommutator $[\hat{x}, \hat{p}]$? Vereinfachen Sie zudem den Kommutator $[\hat{p}^2, \hat{x}^2]$ soweit wie möglich.

(c) Wir betrachten den folgenden Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{\hat{L}_x^2}{2I_x} + \frac{\hat{L}_y^2}{2I_y} + \frac{\hat{L}_z^2}{2I_z}$ wobei $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ die kartesischen Komponenten des Bahndrehimpulsoperators sind. Geben Sie die Eigenzustände des Hamilton-Operators $\hat{H}$ für den Fall $I_x = I_y$ an und bestimmen Sie deren Eigenwerte.

(d) Wann ist eine explizit zeitunabhängige Observable eine Erhaltungsgröße? Begründen Sie Ihre Antwort!

(e) Wir betrachten im Folgenden einen Teilchenstrom der Energie E, welcher von links auf eine eindimensionale Potentialbarriere trifft. Die Potentialbarriere ist durch $V(x) = 0$ für $x > L$ bzw. $x < 0$ sowie $V(x) = V_0 > 0$ für $x \in [0, L]$ spezifiziert. Diskutieren Sie stichpunktartig qualitativ (ohne Rechnung) Ihre Erwartungen für den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten in Abhängigkeit von E, und kontrastieren Sie diese mit den Ergebnissen im Rahmen der klassischen Physik. Gehen Sie hierbei insbesondere auf die Begriffe Tunneleffekt und Resonanzen ein.

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator **(8 Punkte)**

In dieser Aufgabe untersuchen wir relativistische Korrekturen zum harmonischen Oszillator mit der Masse m und Frequenz ω. Es sei $\hat{H}_0$ der Hamiltonoperator des nicht-relativistischen harmonischen Oszillators und $\hat{H}_1$ die erste führende relativistische Korrektur gegeben durch

$$\hat{H}_1 = -\frac{\hat{p}^4}{8m^3c^2} \,.$$

Bestimmen Sie die Energieeigenwerte des Hamilton-Operators $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1$ bis einschließlich erster Ordnung in λ mittels Störungstheorie.

Folgende Identitäten könnten nützlich sein:

$$\hat{a} = \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \,, \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \,.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen **(4+2+3+1 = 10 Punkte)**

Wir betrachten im Folgenden ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen, wobei wir uns nur auf den Spin-Freiheitsgrad fokussieren. Der zeitabhängige Hamilton-Operator $\hat{H}(t)$ sei in der Basis $\{|z;+\rangle, |z;-\rangle\}$ durch

$$\hat{H}(t) = \Omega\, \hat{S}_x \mathrel{\widehat{=}} \frac{\hbar\Omega}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad t \leq \frac{\pi}{\Omega}$$

sowie

$$\hat{H}(t) = \Omega\, \hat{S}_z \mathrel{\widehat{=}} \frac{\hbar\Omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad t > \frac{\pi}{\Omega}$$

gegeben, wobei Ω reell und positiv ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System im Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z;+\rangle - |z;-\rangle\right)$ präpariert.

(a) Berechnen Sie die Zeitentwicklung $|\psi(t)\rangle$ des Systems mit dem gegebenem Hamilton-Operator $\hat{H}$. Unterscheiden Sie hierbei die Fälle $t \leq \frac{\pi}{\Omega}$ und $t > \frac{\pi}{\Omega}$. Begründen Sie Ihr Resultat für $t \leq \frac{\pi}{\Omega}$.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{S}_y \rangle$ im Zustand $|\psi(t)\rangle$ für $t > \frac{\pi}{\Omega}$, wobei $\hat{S}_y$ durch

$$\hat{S}_y \mathrel{\widehat{=}} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

in der Basis $\{|z;+\rangle, |z;-\rangle\}$ gegeben ist.

(c) Wir führen nun zum Zeitpunkt $t_1 = 3\pi/(2\Omega)$ eine Messung mit dem Operator $\hat{S}_x$ durch. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie den Messwert $+\hbar/2$ erhalten.

(d) Eine Messung mittels $\hat{S}_x$ zum Zeitpunkt $t_1 = 3\pi/(2\Omega)$ hat nun tatsächlich den Messwert $+\hbar/2$ ergeben. In welchem Zustand befindet sich das System *unmittelbar* nach der Messung?

Ersatzlösung zum Weiterrechnen für Aufgabe (b), (c) und (d), falls Sie Aufgabe (a) nicht gelöst haben: für $t > \frac{\pi}{\Omega}$ sei der Zustand $|\psi(t)\rangle$ durch

$$|\psi(t)\rangle \mathrel{\widehat{=}} \frac{3}{5}e^{i\Omega t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{5}e^{-i\Omega t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in der Basis $\{|z;+\rangle, |z;-\rangle\}$ gegeben.

Aufgabe 4: Teilchen in zwei Dimension **(3+5 = 8 Punkte)**

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in zwei Dimensionen, welches sich im folgenden Potential $V(x,y)$ befindet:

$$V(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Formulieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung im Ortsraum und geben Sie die vorliegenden Randbedingungen an.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenzustände des Hamilton-Operators mittels eines Produktansatzes. Hierbei dürfen die Eigenfunktionen und -werte des eindimensionalen harmonischen Oszillators als bekannt vorausgesetzt werden.

Aufgabe 5: Wasserstoff-Atom **(3+2+3+2 = 10 Punkte)**

Wir modellieren das Wasserstoff-Atom mittels eines Elektron im Coulomb-Feld, wobei $|nlm\rangle$ die üblichen normierten Eigenzustände sind.

(a) Welche Werte dürfen die Quantenzahlen n, l und m annehmen? Welche Messungen (und mit welchen Messwerten) müsste man durchführen, um den Zustand $|nlm\rangle$ zu präparieren?

(b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Operators $\hat{r}^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ durch

$$\langle nlm| \hat{r}^k |nlm\rangle = \int_0^\infty dr\, r^{k+2} \left(R_{nl}(r)\right)^2$$

gegeben ist. Hierbei ist die Wellenfunktion im Ortsraum $\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) \equiv \langle r, \vartheta, \varphi | nlm\rangle$ durch $\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ gegeben.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Operators $\hat{r}$ im Zustand $|\psi\rangle = |210\rangle$.

(d) Bestimmen Sie die radiale Koordinate r_0, für die die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons im Zustand $|\psi\rangle = |210\rangle$ maximal wird.

Hinweise: Es gilt $R_{21}(r) = \sqrt{\frac{1}{24\, a_B^3}}\, \frac{r}{a_B}\, e^{-r/(2a_B)}$ wobei a_B der sogenannte Bohrsche Radius ist. Des Weiteren gilt $Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta$ und $\int_0^\infty d\varrho\, \varrho^k\, e^{-\varrho} = k!$

Aufgabe 6 (Bonus): Eigenschaften der Störungstheorie **(3+2+3+2 = 10 Punkte)**

In dieser Aufgabe werden fundamentale Eigenschaften der nicht-entarteten Störungstheorie diskutiert. Wir betrachten den Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1$, wobei die Eigenzustände von $\hat{H}_0$ mit $\left|\phi_n^{(0)}\right\rangle$ und deren nicht-entartete Eigenwerte mit $E_n^{(0)}$ bezeichnet werden und λ reell ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Eigenzustände

$$|\phi_n\rangle = |\phi_n^{(0)}\rangle + \lambda\, |\phi_n^{(1)}\rangle + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad \text{mit} \quad |\phi_n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\left\langle \phi_m^{(0)} \middle| \hat{H}_1 \middle| \phi_n^{(0)} \right\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}\, |\phi_m^{(0)}\rangle$$

zur ersten Ordnung in λ orthogonal zueinander sind.

(b) Konstruieren Sie die orthonormierten Eigenzustände $|\tilde{\phi}_n\rangle$, indem Sie $|\tilde{\phi}_n\rangle = \sqrt{Z_n(\lambda)}\, |\phi_n\rangle$ ansetzen. Bestimmen Sie $Z_n(\lambda)$ bis zur quadratischen Ordnung in λ.

(c) Zeigen Sie, dass die wahre Grundzustandsenergie E_0 des Hamilton-Operators $\hat{H}$ immer kleiner als $E_0^{(0)} + \lambda E_0^{(1)}$ ist.

Hinweis: Ritz'sches Variationsprinzip für $\hat{H}$ und einen geeigneten Zustand

(d) Zeigen Sie, dass die Korrektur $E_0^{(2)}$ der Grundzustandsenergie zur zweiten Ordnung in λ immer kleiner als 0 ist. Hierbei ist $E_0^{(2)}$ durch

$$E_0^{(2)} = \sum_{m \neq 0} \frac{\left| \left\langle \phi_0^{(0)} \middle| \hat{H}_1 \middle| \phi_m^{(0)} \right\rangle \right|^2}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

gegeben.