Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Klausur Quantentheorie (Bachelor)

Sommersemester 2023

Bearbeitungszeit: 180 Minuten, Gesamtpunktzahl: 50 (+15 Bonus)

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, nummerieren Sie die Blätter und vermerken Sie auf dem ersten Blatt die Gesamtanzahl der Blätter. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1: Wissens- und Verständnisfragen

(3+5+2+1+1+2+3 = 17 Punkte)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen kurz in Stichpunkten.

(a) Wir betrachten Quantenmechanik in einer räumlichen Dimension. $\hat{x}$ sei der Ortsoperator, $\hat{p}$ der Impulsoperator. Ist der Operator $\hat{p}\hat{x}\hat{p}$ selbstadjungiert? Begründen Sie Ihre Antwort! Geben Sie zudem das Matrixelement $\langle\phi|\,\hat{p}\hat{x}\hat{p}\,|\psi\rangle$ im Ortsraum in Form eines Integralausdrucks an!

(b) Wir betrachten im Folgenden einen Teilchenstrom der Energie E, welcher von links auf eine ein-dimensionale Potentialbarriere trifft. Die Potentialbarriere ist durch $V(x) = 0$ für $x > L$ bzw. $x < 0$ sowie $V(x) = V_0 > 0$ für $x \in [0, L]$ spezifiziert. Diskutieren Sie stichpunktartig (ohne Rechnung) qualitativ Ihre Erwartungen für den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten in Abhängigkeit von E, und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen im Rahmen der klassischen Physik. Gehen Sie hierbei insbesondere auf die Begriffe Tunneleffekt und Resonanzen ein.

(c) Der Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ sei das Tensorprodukt zweier Hilberträume, die durch die Basen $\{|1, m\rangle\}$ mit $m \in \{-1, 0, 1\}$ und $\{|z, \pm\rangle\}$ aufgespannt werden. Geben Sie jeweils ein Beispiel für einen verschränkten und einen nicht-verschränkten Zustand an.

(d) Welches Argument lässt sich für eine Bevorzugung des Begriffs „Unbestimmtheitsrelation“ gegenüber „Unschärferelation“ anbringen?

(e) Berechnen Sie das Matrixelement $\langle n|\hat{x}^3|n\rangle$ für den harmonischen Oszillator, wobei $|n\rangle$ die normierten Eigenzustände des Hamilton-Operators seien.

(f) Zeigen Sie: Wenn ein Operator mit zwei Komponenten des Drehimpulsoperators kommutiert, so kommutiert er auch mit der dritten Komponente.

(g) Es seien $|l, m\rangle$ die üblichen Eigenzustände der Drehimpulsoperatoren $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$. Berechnen Sie das Matrixelement $\langle l, m|\hat{L}_x^2|l, m\rangle$.

Hinweis: Verallgemeinerte Drehimpulsoperatoren $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ wirken auf die Zustände $|j, m\rangle$ wie folgt

$$\hat{J}_\pm\,|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\,|j, m \pm 1\rangle\ .$$

Aufgabe 2: Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen **(3+2+2+1 = 8 Punkte)**

Wir betrachten im Folgenden ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen, wobei wir uns nur auf den Spin-Freiheitsgrad fokussieren. Der zeitunabhängige Hamilton-Operator sei in der Basis $\{|z;+\rangle, |z;-\rangle\}$ durch

$$\hat{H} \mathrel{\widehat{=}} \frac{\hbar\Omega}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei Ω reell ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System im Zustand $|z;+\rangle$ präpariert, d. h. $|\psi(t = 0)\rangle = |z;+\rangle$.

(a) Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Zustands $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$ mit dem gegebenem Hamilton-Operator $\hat{H}$.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{S}_x \rangle$ im Zustand $|\psi(t)\rangle$, wobei $\hat{S}_x$ durch

$$\hat{S}_x \mathrel{\widehat{=}} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in der Basis $\{|z;+\rangle, |z;-\rangle\}$ gegeben ist.

(c) Wir führen nun zum Zeitpunkt t eine Messung mit dem Operator $\hat{S}_z$ durch. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie den Messwert $+\hbar/2$ erhalten.

(d) Eine Messung mittels $\hat{S}_z$ zum Zeitpunkt t hat nun tatsächlich den Messwert $+\hbar/2$ ergeben. In welchem Zustand befindet sich das System *unmittelbar* nach der Messung?

Aufgabe 3: Wasserstoffatom **(1+2+2+2+3 = 10 Punkte)**

Wir modellieren das Wasserstoffatom mittels eines Elektrons im Coulombfeld, wobei $|nlm\rangle$ die üblichen normierten Eigenzustände sind. Das System befinde sich im Zustand

$$|\psi_0\rangle = C\Big(2\,|200\rangle + i\,|211\rangle + (1-i)\,|322\rangle + 3\,|321\rangle\Big),$$

wobei C eine komplexe Konstante ist.

(a) Bestimmen Sie C so, dass der Zustand $|\psi_0\rangle$ normiert ist.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Bahndrehimpulsoperators $\hat{L}_z$ am Zustand $|\psi_0\rangle$ den Messwert $\hbar$ zu erhalten? Wie lautet der Zustand nach der Messung?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung von Teilaufgabe (b) den Messwert $\hbar$ und bei einer unmittelbar danach ausgeführten Messung mittels $\hat{H}$ den Messwert E_2 zu erhalten? Spielt es für die Wahrscheinlichkeit bzw. den resultierenden Zustand eine Rolle, welche Messung Sie zuerst durchführen? Begründen Sie.

(d) Wie lautet die Zeitentwicklung des Zustands $|\psi(t)\rangle$, wobei zum Zeitpunkt $t = 0$ der Zustand $|\psi_0\rangle$ vorliegen soll?

(e) Nehmen Sie nun an, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Messung mittels $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ durchgeführt wird. Wie sieht die Zeitentwicklung des Zustands $|\psi_0\rangle$ aus, falls mit dem neuen Ausgangszustand begonnen wird? Sind Erwartungswerte zeitunabhängiger Observablen und deren Messwahrscheinlichkeiten für diese Zeitentwicklung des Zustands noch zeitabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

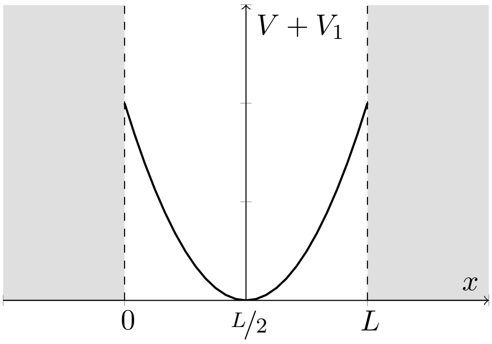
Aufgabe 4: Harmonische Störung **(2+4 = 6 Punkte)**

Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m in einer Dimension befinde sich in einem unendlichen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in (0, L)\,, \\ \infty\,, & \text{sonst}, \end{cases}$$

der Länge $L > 0$. Zusätzlich liege im Intervall $(0, L)$ das folgende harmonische Potential vor:

$$V_1(x) = \lambda \frac{m\omega^2}{2} \left(x - \frac{L}{2} \right)^2 .$$



(a) Wir betrachten zuerst das ungestörte System, d. h. $\lambda = 0$. Leiten Sie die Eigenwerte und Eigenzustände des Hamiltonoperators her.

(b) Berechnen Sie für kleine Störungen ($\lambda \ll 1$) die Korrektur zum n-ten Energieeigenwert in erster Ordnung in λ.

Hinweis: Zum Ausführen der Integrale kann die Identität $\sin^2(u) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2u))$ *nützlich sein.*

Aufgabe 5: Gauß'sches Wellenpaket **(3+2+3+1 = 9 Punkte)**

Wir betrachten ein eindimensionales Teilchen der Masse m im harmonischen Potential $V(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2$. Dessen Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ sei gegeben durch das Gauß'sche Wellenpaket

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} (x - x_0)^2 \right) .$$

(a) Entwickeln Sie diese Wellenfunktion in der Eigenbasis des harmonischen Oszillators.

Zur Probe: Die Koeffizienten sind von der Form $\alpha_n = \gamma\beta^n (n! 2^n)^{-1/2}$.

(b) Zeigen Sie die folgende Identität:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = \exp\left(2tx - t^2 \right) .$$

(c) Berechnen Sie die Zeitentwicklung $\psi(x, t)$ der Wellenfunktion für Zeiten $t > 0$. Handelt es sich immer noch um ein Gauß'sches Wellenpaket?

(d) Bestimmen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte und zeigen Sie, dass das Wellenpaket nicht zerfließt.

Hinweis: Nutzen Sie die folgende Formel sowie die Integraldarstellung der Hermite-Polynome:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u\, H_n(u) \mathrm{e}^{-(u-u_0)^2} = \sqrt{\pi} (2u_0)^n\,, \qquad H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, (x + iy)^n \mathrm{e}^{-y^2} .$$

Zur Erinnerung: Die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators lauten

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} \lambda}} H_n(x/\lambda) e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} \quad \text{mit} \quad \lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} .$$

Bonusaufgabe 6: Verborgene Symmetrie im Wasserstoffatom

(2+4+3+6=15 Punkte)

Für ein klassisches Teilchen mit Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ und Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ in einem Zentralfeld $V(r) = -\frac{k^2}{r}$ ist der sogenannte Runge-Lenz-Vektor definiert durch

$$\boldsymbol{R} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L} - \frac{k^2}{r}\boldsymbol{r}\,. \tag{1}$$

Dieser Vektor ist eine Erhaltungsgröße, d. h. $\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0}$, woraus sich leicht die Ellipsenbahn des Teilchens ableiten lässt.

(a) Was versteht man unter dem Korrespondenzprinzip? Begründen Sie mit diesem, dass es sich bei dem Operator

$$\hat{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}} - \hat{\boldsymbol{L}} \times \hat{\boldsymbol{p}}\right) - \frac{k^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{2}$$

um das Analogon des RL-Vektors für ein quantenmechanisches Teilchen im Zentralpotential handelt.

(b) Vergewissern Sie sich, dass jede Komponente $\hat{L}_k$ des Drehimpulsoperators sowohl mit $\boldsymbol{p}^2$ als auch $\frac{1}{r}$ kommutiert. Zeigen Sie davon ausgehend, dass es sich auch bei $\hat{\boldsymbol{R}}$ um eine Erhaltungsgröße im quantenmechanischen Sinne handelt.

(c) Durch eine ähnliche Rechnung wie in (b) und Reskalierung lassen sich die Relationen

$$[\hat{R}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{R}_k \qquad \text{und} \qquad [\hat{R}_i, \hat{R}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \tag{3}$$

herleiten. Zeigen Sie, dass diese zu zwei separaten Drehimpulsalgebren entkoppeln, wenn die Operatoren $\hat{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{R}})$ und $\hat{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{L}} - \hat{\boldsymbol{R}})$ eingeführt werden.

(d) Wie stehen $\hat{\boldsymbol{T}}^2$ und $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ in Beziehung? Geben Sie die Eigenwerte und -zustände von $\hat{\boldsymbol{T}}^2$, $\hat{\boldsymbol{T}}$ und $\hat{\boldsymbol{S}}$ an und nutzen Sie die Beziehung[1] $-\frac{2}{m}\hat{\boldsymbol{H}}\hat{\boldsymbol{R}}^2 = \frac{2}{m}\hat{\boldsymbol{H}}(\hat{\boldsymbol{L}}^2 + \hbar^2) + k^4$, um das Energiespektrum und die Entartung des Wasserstoffatoms herzuleiten.

[1] Die Beziehung muss nicht hergeleitet werden.