Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Wiederholungsklausur Quantentheorie (Bachelor)

Sommersemester 2023

Bearbeitungszeit: 180 Minuten, Gesamtpunktzahl: 50

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, nummerieren Sie die Blätter und vermerken Sie auf dem ersten Blatt die Gesamtanzahl der Blätter. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1: Wissens- und Verständnisfragen

(4+3+2+2+3 = 14 Punkte)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen kurz in Stichpunkten.

(a) Wir betrachten Quantenmechanik in drei räumlichen Dimension. Die Komponenten des Ortsoperators werden mit $\hat{x}, \hat{y}$ und $\hat{z}$ bezeichnet, die jeweiligen Komponenten des Impulsoperators mit $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$ und $\hat{p}_z$. Begründen Sie, ob die folgenden Operatoren selbstadjungiert sind: $\mathcal{O}_1 = \hat{x}\hat{z}$, $\mathcal{O}_2 = \hat{x}\hat{p}_x$ sowie $\mathcal{O}_3 = \hat{x}\hat{p_y}$. Geben Sie zudem für alle drei Operatoren das Matrixelement $\langle\phi|\, \mathcal{O}_i \,|\psi\rangle$ im Ortsraum in Form eines Integralausdrucks an!

(b) Wir betrachten den folgenden Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{\hat{L}_x^2}{2I_x} + \frac{\hat{L}_y^2}{2I_y} + \frac{\hat{L}_z^2}{2I_z}$ wobei $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ die kartesischen Komponenten des Bahndrehimpulsoperators sind. Geben Sie die Eigenzustände des Hamilton-Operators $\hat{H}$ für den Fall $I_x = I_y$ an und bestimmen Sie deren Eigenwerte.

(c) Der Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ sei das Tensorprodukt zweier Hilberträume, die durch die Basen $\{|1, m\rangle\}$ mit $m \in \{-1, 0, 1\}$ und $\{|z, \pm\rangle\}$ aufgespannt werden. Geben Sie jeweils ein Beispiel für einen verschränkten und einen nicht-verschränkten Zustand an.

(d) Wie ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens am Ort x zum Zeitpunkt t gegeben? Kann diese größer 1 werden? Wie hängen Wahrscheinlichkeitsstromdichte und Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte zusammen?

(e) Ein Physiker präpariert zum Zeitpunkt $t = 0$ (unendlich oft) den gleichen Zustand $|\psi_0\rangle$. Leider ist der Physiker vergesslich, kann sich aber noch daran erinnern, dass er bei Energie-Messungen an einer repräsentativen Stichprobe in 30 Prozent der Fällen die Energie $E = \hbar^2\pi^2/(2mL^2)$ und in 70 Prozent der Fällen die Energie $E = 4\hbar^2\pi^2/(2mL^2)$ erhalten hat. Wie lautet ein möglicher Zustand $|\psi_0\rangle$? Ist dieser eindeutig? Falls ja, begründen Sie Ihre Antwort; falls nein, geben Sie einen weiteren möglichen Zustand an, der sich von $|\psi_0\rangle$ nicht nur durch einen globalen Phasenfaktor unterscheidet.

Aufgabe 2: Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen

(2+2+2+1 = 7 Punkte)

Wir betrachten im Folgenden ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen, wobei wir uns nur auf den Spin-Freiheitsgrad fokussieren. Der zeitunabhängige Hamilton-Operator sei in der Basis $\{|z;+\rangle, |z;-\rangle\}$ durch

$$\hat{H} \widehat{=} \frac{\hbar\Omega}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei Ω reell ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System im Zustand $|z;+\rangle$ präpariert, d. h. $|\psi(t = 0)\rangle = |z;+\rangle$.

(a) Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Zustands $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$ mit dem gegebenem Hamilton-Operator $\hat{H}$.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{S}_y \rangle$ im Zustand $|\psi(t)\rangle$, wobei $\hat{S}_y$ durch

$$\hat{S}_y \mathrel{\widehat{=}} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

in der Basis $\{|z;+\rangle, |z;-\rangle\}$ gegeben ist.

(c) Wir führen nun zum Zeitpunkt t eine Messung mit dem Operator $\hat{S}_x$ durch. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie den Messwert $+\hbar/2$ erhalten.

(d) Eine Messung mittels $\hat{S}_x$ zum Zeitpunkt t hat nun tatsächlich den Messwert $+\hbar/2$ ergeben. In welchem Zustand befindet sich das System *unmittelbar* nach der Messung?

Ersatzlösung zum Weiterrechnen für Aufgabe (b) und (c), falls Sie Aufgabe (a) nicht gelöst haben:

$$|\psi(t)\rangle \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{2\sqrt{2}}\, e^{-i\Omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\, e^{i\Omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: Wasserstoffatom **(2+1+4+1 = 8 Punkte)**

Wir modellieren das Wasserstoffatom mittels eines Elektrons im Coulombfeld $V_C(r) = -Ze^2/r$, wobei $|nlm\rangle$ die üblichen normierten Eigenzustände sind.

(a) Welche Werte dürfen die Quantenzahlen n, l und m annehmen? Welche Messungen (und mit welchen Messwerten) müsste man durchführen, um den Zustand $|nlm\rangle$ zu präparieren?

(b) Berechnen Sie den Entartungsgrad des n-ten Energieeigenwerts E_n.

(c) Das Coulombpotential $V_C(r)$ berücksichtigt nicht die endliche Ausdehnung des Kerns. Unter der Annahme eines homogen geladenen Kerns des Radius r_0 erhält man stattdessen das Potential

$$V(r) = V_C(r) + V_1(r) = V_C(r) + \begin{cases} 0 & \text{für } r > r_0 \\ \frac{Ze^2}{2r_0}\left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 3\right) & \text{für } r \leq r_0 \end{cases}$$

Wir betrachten nun den (gestörten) Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V_C(r) + \lambda V_1(r)$. Bestimmen Sie die Korrektur des Energieeigenwerts des Grundzustands zur ersten Ordnung in λ.

Hinweis: Die Wellenfunktion im Ortsraum $\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi) \equiv \langle r,\vartheta,\varphi|nlm\rangle$ ist durch $\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ gegeben. Insbesondere gilt $Y_{00}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$ und $R_{10}(r) = \sqrt{\frac{4Z^3}{a_B^3}}\, e^{-Zr/a_B}$, wobei a_B der sogenannte Bohrsche Radius ist. Führen Sie die Integrale mit partieller Integration aus.

(d) Was müssen Sie bei der Berechnung der Korrektur der Energieeigenwerte der angeregten Zustände zusätzlich beachten?

Aufgabe 4: Endlich tiefer Potentialtopf **(2+4+1+5 = 12 Punkte)**

Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m in einer Dimension befinde sich in einem endlich tiefen Potentialtopf der Form

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } |x| \leq L/2 \\ 0 & \text{für } |x| > L/2 \end{cases},$$

wobei $V_0 < 0$ gelte.

(a) Diskutieren Sie, in welchem Energiebereich gebundene Zustände bzw. Streuzustände für dieses Potential existieren. Geben Sie den jeweiligen Entartungsgrad an.

(b) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion

$$\psi(x) = C \begin{cases} \cos(kx) & \text{für } |x| \leq L/2 \\ \cos(kL/2)\exp(-\kappa(|x| - L/2)) & \text{für } |x| > L/2 \end{cases}$$

für $V_0 = -\frac{\pi^2\hbar^2}{4mL^2}$ und $k^2 = \kappa^2$ einen gebundenen Zustand der Energie $E = V_0/2$ beschreibt. Verwenden Sie dazu die zeitunabhängige Schrödingergleichung, und prüfen Sie die Übergangsbedingungen. Bestimmen Sie k. Wodurch ist das Vorzeichen von κ bestimmt? (Die Konstante C muss in dieser Aufgabe nicht bestimmt werden.)

(c) Woran kann man erkennen, dass es sich um den Grundzustand und nicht den ersten angeregten Zustand handelt?

(d) Berechnen Sie die Varianz des Ortsoperators $\hat{x}$ in dem in Teilaufgabe (b) konstruierten Zustand. Geben Sie zudem eine untere Schranke für die Varianz des Impulsoperators $\hat{p}$ in diesem Zustand an.

Hinweis: Zum Ausführen der Integrale können die folgenden Formeln hilfreich sein:

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)),$$

$$\int_0^y \mathrm{d}x\, x^2 \cos(2x) = \frac{1}{4}\left(2y\cos(2y) + (2y^2 - 1)\sin(2y)\right) .$$

Aufgabe 5: Harmonischer Oszillator **(1+2+2+2+2 = 9 Punkte)**

Wir betrachten ein eindimensionales Teilchen der Masse m im harmonischen Potential $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$.

(a) Berechnen Sie den Kommutator der Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$, wobei $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p}$ gilt. Hierbei bezeichnet $\hat{x}$ den Ortsoperator und $\hat{p}$ den Impulsoperator.

(b) Berechnen Sie das Matrixelement $\langle n|\hat{x}\hat{p}|n\rangle$ für den harmonischen Oszillator, wobei $|n\rangle$ die normierten Eigenzustände des Hamilton-Operators seien.

(c) Bestimmen Sie zudem die normierte Wellenfunktion des ersten angeregten Zustandes $\phi_1(x)$. Sie dürfen hierbei die Wellenfunktion des Grundzustandes

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

verwenden.

(d) Geben Sie die zeitliche Entwicklung eines Zustandes an, der bei $t = 0$ als

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{2}\left(\phi_0(x) + \sqrt{3}\,\phi_1(x)\right)$$

gegeben ist.

(e) Berechnen Sie die Erwartungswerte von Ort und Energie für diesen Zustand zum Zeitpunkt t.