Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Klausur Quantentheorie (Bachelor)

Sommersemester 2021

Bearbeitungszeit: 120 Minuten, Gesamtpunktzahl: 40

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, nummerieren Sie die Blätter und vermerken auf dem ersten Blatt die Gesamtanzahl der Blätter. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1: Wissens- und Verständnisfragen **(4+3+3 = 10 Punkte)**

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen kurz in Stichpunkten:

(a) Wir betrachten ein Elektron im Coulomb-Feld, wobei $|n\,l\,m\rangle$ die üblichen normierten Eigenzustände sind. Welche Werte dürfen die Quantenzahlen n, l und m annehmen und wie lauten die Eigenwerte in diesem Zustand für den Hamiltonoperator $\hat{H}$ sowie den Drehimpulsoperatoren $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$. Bestimmen Sie zudem den Entartungsgrad des n-ten Energieniveaus.

(b) Im Folgenden betrachten wir den Drehimpulsoperator $\hat{\boldsymbol{L}}$ mit den Komponenten $\hat{L}_i$ (wobei i die Werte $i = 1, 2, 3$ annehmen kann). Bestimmen Sie die Kommutatoren $[\hat{L}_i, \hat{x}_j]$ sowie $[\hat{L}_i, \hat{\boldsymbol{r}}^2]$ mit Hilfe der fundamentalen Kommutatoren. Hierbei ist x_j die $j$te Komponente des Ortsoperators $\hat{\boldsymbol{r}}$. Kommentieren Sie das Resultat für $[\hat{L}_i, \hat{\boldsymbol{r}}^2]$.

(c) Ein Physiker präpariert (unendlich oft) den gleichen reinen Zustand $|\psi_0\rangle$ eines harmonischen Oszillators mit Masse m und Frequenz ω. Leider ist der Physiker vergesslich, kann sich aber noch daran erinnern, dass er bei Energie-Messungen an einer repräsentativen Stichprobe in 50 Prozent der Fällen die Energie $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$, in 30 Prozent der Fällen die Energie $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$, und in 20 Prozent der Fälle die Energie $E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ erhalten hat. Geben Sie einen möglichen Zustand $|\psi_0\rangle$ an, der diese Bedingungen erfüllt. Ist dieser Zustand (abgesehen von einer globalen Phase) eindeutig? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator **(2+5=7 Punkte)**

Wir untersuchen nun einen harmonischen Oszillators mit Masse m und Frequenz ω. Im Folgenden seien $|n\rangle$ die üblichen normierten Eigenzustände des Hamilton-Operators. Der harmonische Oszillator befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\,|2\rangle + \sqrt{\frac{4}{5}}\,|4\rangle$.

(a) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung des Zustands $|\psi(t)\rangle$ für Zeiten $t > 0$, wobei der Anfangszustand durch $|\psi(t = 0)\rangle = |\psi_0\rangle$ gegeben sei.

(b) Berechnen Sie im Zustand $|\psi(t)\rangle$ den Erwartungswert von $\hat{x}$ und $\hat{x}^2$ sowie die Varianz des Operators $\hat{x}$. Was können Sie aus Ihrem Ergebnis für die Varianz des Operators $\hat{p}$ folgern?

Nützliche Beziehungen:

$$\hat{a} = \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,, \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen **(1+5+3 =9 Punkte)**

Wir betrachten im Folgenden ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen, wobei wir uns nur auf den Spin Freiheitsgrad fokussieren. Der zeitunabhängige Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1$ sei in der Basis $\{|z;+\rangle, |z;-\rangle\}$ durch

$$\hat{H}_0 \widehat{=} \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad \hat{H}_1 \widehat{=} \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei Ω reell ist.

(a) Geben Sie die Eigenwerte und Eigenzustände des Hamilton-Operator $\hat{H}_0$ an.

(b) Nun betrachten wir den Fall $\lambda \neq 0$, wobei λ ein kleiner Parameter sei, so dass der Beitrag $\lambda \hat{H}_1$ zum Hamilton-Operator $\hat{H}$ als kleine Störung aufgefasst werden kann. Berechnen Sie mittels Störungstheorie die Änderung der Energieeigenwerte und die Energiezustände zu erster Ordnung in λ.

(c) Bestimmen Sie im Fall von $\lambda = 1$ die exkaten Eigenwerte und Eigenzustände des Hamilton-Operators $\hat{H}$. Vergleichen Sie mit Ihren Ergebnissen aus Teilaufgabe (b) und kommentieren Sie dies!

Aufgabe 4: Teilchen in einer Dimension **(3+3+4+3+1 = 14 Punkte)**

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m, welches in einem unendlich hohen Kastenpotential (mit Wänden $x = 0$ und $x = L$) eingesperrt ist. Zur Zeit $t = 0$ sei das Teilchen durch die normierte Wellenfunktion

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{8}{5L}} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

beschrieben.

(a) Geben Sie den Hilbertraum sowie die Eigenwerte und die normierten Eigenzustände des Hamilton-Operators an.

(b) Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\psi(t,x)$ für Zeiten $t > 0$, wobei der Anfangszustand durch $\psi(t=0,x) = \psi_0(x)$ gegeben sei.

Hinweis: Genaues Hinschauen und Additionstheoreme erleichtern das Leben!

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen zum Zeitpunkt t im Bereich $0 \leq x \leq L/3$ befindet.

(d) Sie messen nun tatsächlich das Teilchen zum Zeitpunkt t im Bereich $0 \leq x \leq L/3$. Geben Sie die resultierende Wellenfunktion nach der Messung an. Eine Skizze hierfür könnte hilfreich sein. Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Die resultierende Wellenfunktion muss nicht normiert angegeben werden!

(e) Wie lautet hingegen die Wellenfunktion nach der Messung, wenn das Teilchen zum Zeitpunkt t nicht im Bereich $0 \leq x \leq L/3$ nachgewiesen wird.

Hilfreiche Beziehungen:

$$\int_0^z \mathrm{d}x \sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \frac{\alpha \sin(\beta z)\cos(\alpha z) - \beta\cos(\beta z)\sin(\alpha z)}{\beta^2 - \alpha^2} \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta \tag{1}$$

$$\int_0^z \mathrm{d}x \sin^2(\alpha x) = \frac{z}{2} - \frac{\sin(2\alpha z)}{4\alpha} \tag{2}$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \tag{3}$$