Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Nachklausur Quantentheorie (Bachelor)

Sommersemester 2022

Bearbeitungszeit: 180 Minuten, Gesamtpunktzahl: 50

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, nummerieren Sie die Blätter und vermerken Sie auf dem ersten Blatt die Gesamtanzahl der Blätter. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1: Wissens- und Verständnisfragen (2+2+3+3 = 10 Punkte)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen kurz in Stichpunkten:

(a) Ist der Operator $\hat{p}\hat{x}$ selbstadjungiert, wobei $\hat{x}$ der Ortsoperator und $\hat{p}$ der Impulsoperator sei? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Geben Sie das Matrixelement $\langle\phi|\,\hat{p}\hat{x}\,|\psi\rangle$ im Ortsraum in Form eines Integralausdrucks an! Wie unterscheidet sich dieser von dem zu $\langle\phi|\,\hat{x}\hat{p}\,|\psi\rangle$ gehörenden Integralausdruck?

(c) Zeigen Sie anhand von Gedankenexperimenten, dass die Messwerte zu den Spinoperatoren $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_y$ nicht gleichzeitig messbar sind. In Ihrer Argumentation können Sie beispielsweise unterschiedliche Hintereinanderschaltungen von Stern-Gerlach-Experimenten betrachten. Welche untere Schranke für das Produkt der Varianzen von $\hat{S}_x$ und von $\hat{S}_y$ erwarten Sie? Vereinfachen Sie hierbei die Ungleichung weitestgehend.

(d) Ein Physiker präpariert unendlich oft den gleichen Zustand $|\psi\rangle$ eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens, wobei wir uns im Folgenden nur auf den Spin-Freiheitsgrad fokussieren. Leider hat der Physiker vergessen, sich den genauen Spin-Zustand zu notieren. Bei einer Spin-Messung in z-Richtung an einer repräsentativen Stichprobe erhält er in 75 Prozent der Fälle den Messwert $s_z = +\hbar/2$ und in 25 Prozent der Fälle den Messwert $s_z = -\hbar/2$. Wie lautet der allgemeinst-mögliche Zustand $|\psi\rangle$, der zu diesen Messergebnissen führt? Ist dieser Zustand eindeutig?

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator (8 Punkte)

Es sei $\hat{H}_0$ der Hamiltonoperator des nicht-relativistischen harmonischen Oszillators mit der Masse m und Frequenz ω. Des Weiteren sei $\hat{H}_1$ gegeben durch

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{x}\,\hat{p} + \hat{p}\,\hat{x}\right) .$$

Bestimmen Sie die Energieeigenwerte des Hamilton-Operators $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{H}_1$ bis einschließlich erster Ordnung in λ mittels Störungstheorie.

Folgende Identitäten könnten dabei nützlich sein:

$$\hat{a} = \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} , \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} .$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Teilchen in einer Dimension **(4+7+3 = 14 Punkte)**

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in folgendem Potential $V(x)$

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für} \;\; x \leq 0 \\ -V_0 & \text{für} \;\; 0 < x < L \\ 0 & \text{für} \;\; x \geq L \end{cases}$$

wobei $V_0 > 0$ gelte.

(a) Skizzieren Sie das Potential $V(x)$. Für welche Energien erwarten Sie ein diskretes bzw. kontinuierliches Spektrum? Geben Sie auch den jeweiligen Entartungsgrad an.

(b) Lösen Sie im Fall von $E < 0$ die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung. Geben Sie eine Bedingung an E in Form einer impliziten Gleichung an! Existiert mindestens immer ein gebundener Zustand?

(c) Argumentieren Sie für den Fall $E > 0$ für einen von rechts einlaufenden Teilchenstrom, welche Werte der Transmissionskoeffizient T und der Reflektionskoeffizient R annehmen.

Aufgabe 4: Verallgemeinerte Drehimpulsalgebra **(3+3 = 6 Punkte)**

Im Folgenden seien $|j, m\rangle$ die gemeinsamen Eigenzustände für die verallgemeinerten Drehimpuls-operatoren $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ und $\hat{J}_z$.

(a) Geben Sie die Eigenwertgleichungen für die Eigenzustände $|j, m\rangle$ an. Welche Werte dürfen j und m annehmen?

(b) Geben Sie für $j = 1$ eine Matrixdarstellung der Operatoren $\hat{J}_z$ und $\hat{J}_x$ an, indem Sie die Matrixelemente $\langle 1, m'| \hat{J}_x |1, m\rangle$ und $\langle 1, m'| \hat{J}_z |1, m\rangle$ bestimmen.

Hinweis: Die Operatoren $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ wirken auf die Zustände $|j, m\rangle$ wie folgt:

$$\hat{J}_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\, |j, m \pm 1\rangle$$

Aufgabe 5: Wasserstoffatom **(1+3+4+2+2 = 12 Punkte)**

Wir modellieren das Wasserstoffatom mittels eines Elektrons im Coulombfeld, wobei $|nlm\rangle$ die üblichen normierten Eigenzustände sind. Das System befinde sich im Zustand

$$|\psi_0\rangle = C\left(4\,|321\rangle + 3i\,|100\rangle - i\,|210\rangle + \sqrt{10}\,|211\rangle\right),$$

wobei C eine komplexe Konstante ist.

(a) Bestimmen Sie C so, dass der Zustand $|\psi_0\rangle$ normiert ist.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung des Bahndrehimpulsquadrats $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ am Zustand $|\psi_0\rangle$ den Messwert $2\hbar^2$ zu erhalten? Wie lautet der Zustand nach der Messung?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung von Teilaufgabe (b) den Messwert $2\hbar^2$ und bei einer unmittelbar danach ausgeführten Messung mittels $\hat{L}_z$ den Messwert 0 zu erhalten? Spielt es für die Wahrscheinlichkeit bzw. den resultierenden Zustand eine Rolle, welche Messung Sie zuerst durchführen? Begründen Sie.

(d) Wie lautet die zeitliche Entwicklung des Zustands, wobei zum Zeitpunkt $t = 0$ der Zustand $|\psi_0\rangle$ vorliegen soll?

(e) Wie würde die zeitliche Entwicklung des Zustands $|\psi_0\rangle$ aussehen, falls zum Zeitpunkt $t = 0$ die Messung von Teilaufgabe (b) durchgeführt wird? Sind Erwartungswerte zeitunabhängiger Observablen und deren Messwahrscheinlichkeiten für einen Zustand nach der obigen Messung noch zeitabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.