Material: Aufgaben mit Bezug zum Physik-Nobelpreis 2022

Stefan Aehle, Philipp Scheiger, Holger Cartarius – AG Fachdidaktik der Physik und Astronomie, Friedrich-Shiller-Universität Jena, 07743 Jena, Deutschland

The Royal Swedish Academy of Sciences has decided to award the Nobel Prize in Physics 2022 jointly to
Alain Aspect, John F. Clauser, and Anton Zeilinger
"for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science"

1 Nachweis der Verschränkung im Experiment

Unter Verschränkung versteht man in der Quantenphysik das Phänomen, dass zwei oder mehr Teilchen in einer besonderen, klassisch nicht möglichen Weise miteinander verbunden sind, auch wenn sie sehr weit voneinander entfernt sind (siehe Artikel). Den ersten Versuch, die Verschränkung experimentell nachzuvollziehen, unternahm John Clauser 1972 zusammen mit Stuart Freedman. Dazu wurden verschränkte Photonenpaare in einem Calcium-Ofen erzeugt und in einem optischen System aus Linsen, Polarisationsfiltern und Einzelphotonendetektoren ausgewertet (Abb. 1) [2].

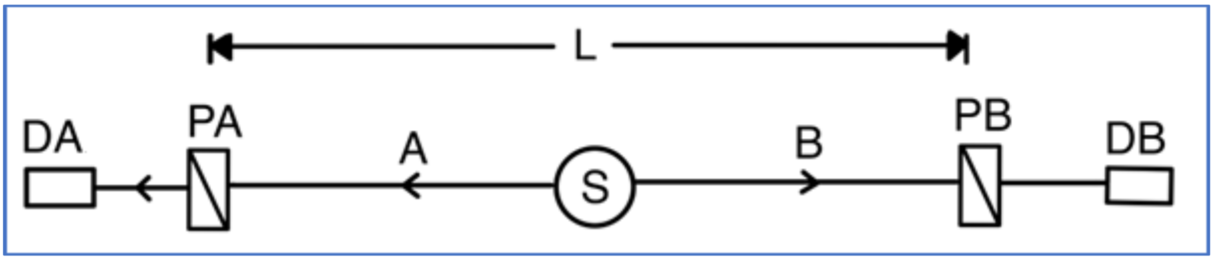


Abb. 1: Vereinfachter Aufbau zur Korrelationsmessung verschränkter Photonen. Ein Paar verschränkter Photonen wird aus einer Quelle S emittiert und in verschiedenen Richtungen gesandt. Anschließend durchlaufen die Photonen Polarisationsfilter PA und PB, die die Strecke L voneinander entfernt sind, bevor sie in Einzelphotonendetektoren DA und DB registriert werden. Zur Überprüfung der CHSH-Ungleichung benötigt man vier bestimmte Winkelkombinationen, die an PA und PB eingestellt werden. Je nach Einstellung werden mehr oder weniger Photonen registriert. Auswertung der Statistik liefert anschließend Aussagen zum Grad der Verschränkung.

In einer Quelle (S) werden Paare verschränkter Photonen erzeugt, die anschließend auf zwei Polarisationsfilter PA und PB treffen, deren Orientierung um einen beliebigen Winkel gedreht werden kann. Dort werden die Photonen abhängig von ihrer Polarisation entweder absorbiert oder durchgelassen und in den Detektoren DA und DB nachgewiesen (notiert als: 0 = kein Photon detektiert, 1 = Photon detektiert). Je nach Art der Quelle kann sich die Verschränkung auf unterschiedliche Weise zeigen. In den ersten Experimenten, die zum Nobelpreis führten, lag perfekte Korrelation vor. Diese drückt sich wie folgt aus: Wie bei der klassischen Polarisation von Licht besteht auch für dieses Experiment mit einzelnen Photonen eine Abhängigkeit vom Winkel zwischen den Filtern. Sind diese in die gleiche Richtungen eingestellt (0° zueinander verdreht) und ist die Verschränkung der Form, dass beide Photonen immer gleich polarisiert sind, liegt die Wahrscheinlichkeit bei 100%, dass Photon B transmittiert wird, wenn auch Photon A transmittiert wurde, man stellt an den Detektoren also immer 00 oder 11 fest.

Daneben gibt es den Fall perfekter Antikorrelation. Das heißt, bei identischen Winkeln an PA und PB wird an den Detektoren immer das gegenteilige Ergebnis festgestellt (wenn bei A eine 0 gemessen wird, dann bei B ganz sicher eine 1) – und zwar unabhängig davon, auf welchen genauen Wert die Winkel eingestellt werden. Von diesem Fall wollen wir im Weiteren ausgehen.

Die perfekte Antikorrelation ist zwar schon eine Folge der Verschränkung, weist diese jedoch noch nicht nach. Den Unterschied zu allen klassisch denkbaren Möglichkeiten sieht man erst mit mehreren Winkelkombinationen. Zum Nachweis der Verschränkung stellten John Clauser und Kollegen daher den Korrelationsparameter

$$S = E(\alpha_1, \beta_1) - E(\alpha_1, \beta_3) + E(\alpha_3, \beta_1) + E(\alpha_3, \beta_3)$$

$$\text{mit} \quad E(\alpha_i, \beta_j) = P_{00}(\alpha_i, \beta_j) + P_{11}(\alpha_i, \beta_j) - P_{10}(\alpha_i, \beta_j) - P_{01}(\alpha_i, \beta_j)$$

auf, wobei $P_{00}(\alpha_i, \beta_j)$ bei einem festen Winkelpaar (α_i an PA und β_j an PB) die relative Häufigkeit der Messungen darstellt, bei denen an DA und an DB kein Photon ankommt. Analog steht $P_{10}(\alpha_i, \beta_j)$ für die relative Häufigkeit der Fälle, in denen bei DA ein Photon ankommt, aber nicht bei DB, und so weiter. Der Parameter S ist deshalb so interessant, weil sich statistisch zeigen lässt, dass Experimente mit Paaren klassischer Teilchen die CHSH-Ungleichung

$$-2 \leq S \leq 2$$

einhalten müssen, während man in der Quantenphysik für verschränkte Photonen mit den Winkeln

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = \frac{\pi}{8}, \qquad \alpha_3 = \frac{\pi}{4}, \qquad \beta_1 = \frac{\pi}{8}, \qquad \beta_2 = \frac{\pi}{4}, \qquad \beta_3 = \frac{3\pi}{8}$$

$S = -2\sqrt{2}$ findet, also eine klare Verletzung der CHSH-Ungleichung. Dieser Nachweis der Verletzung der CHSH-Ungleichung war das Ziel der Nobelpreis-Experimente.

2 Technische Umsetzung der Experimente: von Clauser bis Aspect (Aufgabe 1)

Aussagen zur Korrelation der Photonen ergeben sich erst nach einer großen Anzahl an Versuchsdurchgängen, wenn sich statische Zusammenhänge abzeichnen. Dazu ist es folglich nötig, die Winkel der Polarisatoren zu variieren. Um die Winkelkombinationen der Polarisationsfilter entsprechend der CHSH-Argumentation einzustellen, wurde ein sogenanntes Malteserkreuzgetriebe verwendet (Abb. 2).

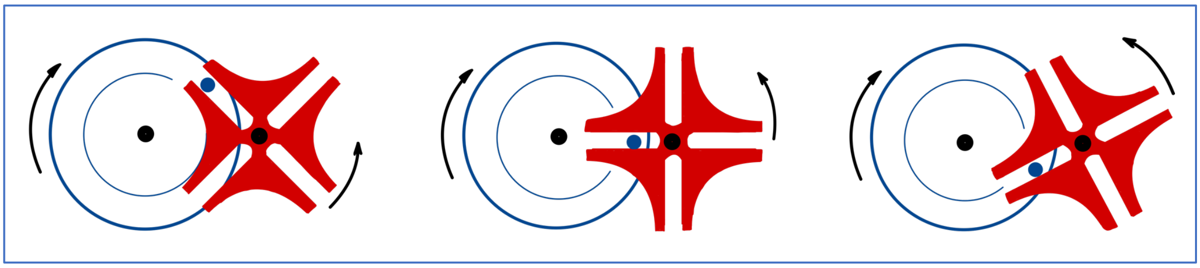


Abb. 2: Malteserkreuzgetriebe. Mit jeder vollen Umdrehung der Antriebswelle (links) macht das Drehrad (rechts) eine Vierteldrehung. In jedem Viertel des Drehrads ist ein anderer Filter eingebaut. In Clausers Aufbau werden so vier Polarisationsrichtungen durchgetauscht.

Ein Hauptkritikpunkt am Aufbau war, dass die Strecke L, die die Polarisatoren PA und PB im Labor voneinander trennte, zu klein war, um einen Informationsaustausch mit Lichtgeschwindigkeit c zwischen den beiden Polarisatoren PA und PB auszuzchließen, denn die Bedingung der Lokalität ist nur dann erfüllt, wenn eine Abhängigkeit der Messung bei B (und damit auch die eingestellte Polarisationsrichtung) von der bei A vollständig ausgeschlossen werden kann. Ein Wechsel der Polarisationsrichtung muss also schneller erfolgen können, als Information von PA zu PB (und umgekehrt) wandern kann. Ist dies nicht erfüllt, spricht man vom Lokalitäts-Schlupfloch [3].

(a) *Angenommen die Antriebswelle rotiert mit einer Frequenz von 200 Hz. Berechne die Entfernung, die zwischen den Polarisatoren (Strecke L) benötigt wird, um eine denkbare Informationsübertragung zwischen PA und PB innerhalb eines Filterwechsels auszuschließen? ($c = 300 \cdot 10^6 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$). Gehe von zwei verschiedenen Fällen aus. Im ersten ist es egal, auf welchen Filter gewechselt wird. Es ist also nur wichtig, dass das Drehrad auf einen neuen Filter umstellt. Im zweiten Fall soll in jedem Schritt ein bestimmter Filter angesteuert werden. Was müssen wir dann im ungünstigsten Fall beachten?*

- Fall 1:
  Nach jeder Umdrehung der Antriebswelle wurde ein neuer Filter angewählt
  $v = \frac{s}{t}$, $v = c = 300 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $t = \frac{1}{200}\mathrm{s}$, $s = c \cdot t = 300 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1}{200}\mathrm{s}$
  $s = 1\,500\ \mathrm{km}$

- Fall 2:
  1 Umdrehung Antriebswelle = 0,25 Umdrehung des Filterrads. Im ungünstigsten Fall muss man eine komplette Umdrehung des Filterrads abwarten. → Änderung der Polarisationsfilter $f = 50\ \mathrm{Hz}$
  $t = \frac{1}{50}\mathrm{s}$, $s = c \cdot t = 300 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1}{50}\mathrm{s}$
  $s = 6\,000\ \mathrm{km}$

Alain Aspect und seine Arbeitsgruppe haben dieses Lokalitäts-Schlupfloch 1982 schließen können. Statt mechanischer Getriebe zum Polarisationsfilterwechsel nutzen sie akkustooptische Modulatoren, um den Weg der Photonen zu ändern und sie durch verschiedene fest eingestellte Polarisationsfilter zu schicken. Diese Weichen wurden elektronisch von Hochfrequenz-Generatoren gesteuert und konnten eine Frequenz von $50\ \mathrm{MHz}$ erzielen, sodass ein Wechsel in nur $10\ ns$ möglich wurde (Abb. 3).

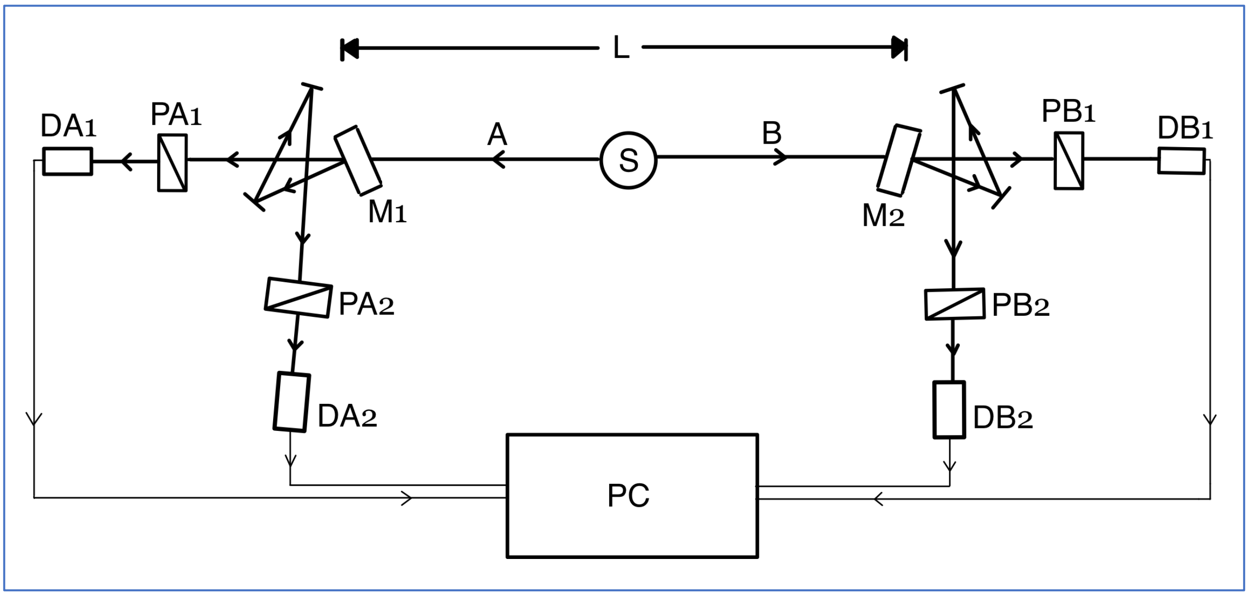


Abb. 3: Vereinfachte Darstellung des Versuchsaufbaus von Aspect 1982 [4]. Aus einer Quelle S werden verschränkte Photonen in zwei unterschiedliche Richtungen gesandt, um in den Messstationen A (Alice) und B (Bob) ausgewertet zu werden. Die im Abstand L platzierten optischen Modulatoren M1 und M2 agieren dabei als Weichen, die den Strahlenverlauf mit einer Frequenz von 25MHz ändern können. Die Wahl der Messbasen entspricht dem Durchgang durch die Polarisatoren PA1, PA2, PB1 und PB2. Um die Signale auszulesen und mögliche Koinzidenzen zu erkennen, geben Detektoren DA1, DA1, DB1 und DB2 die Information über Eintreffen eines Photons an einen Computer (PC).

(b) *Abbildung 3 zeigt, dass Alain Aspect in seinem Labor nur $L = 12\ m$ zur Verfügung hatte. Berechne die Zeit, die ihm blieb, um eine denkbare Informationsübertragung zwischen den Modulatoren M1 und M2 zu verhindern?*

(c) *Erkläre, warum eine mechanische Lösung wie Clauser sie verwendet hat, in diesem Fall nicht umsetzbar wäre.*

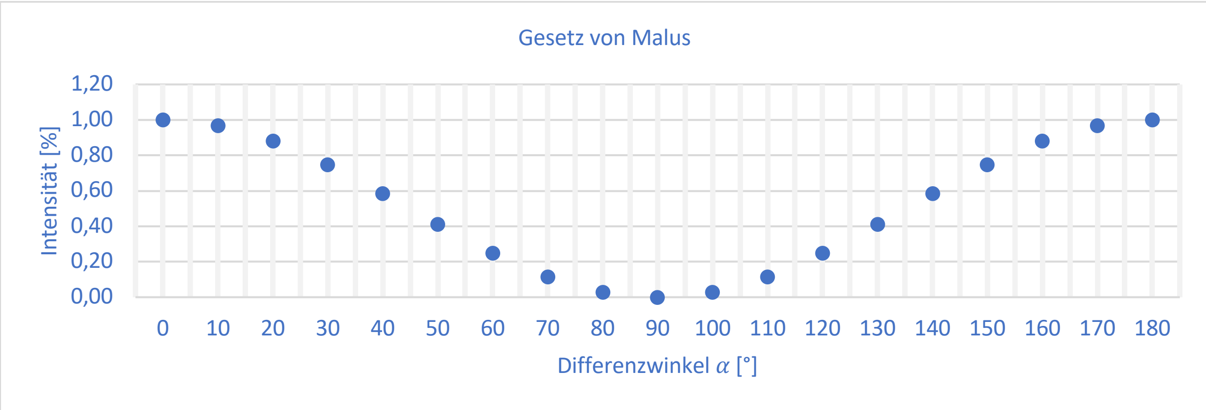
- $v = \frac{s}{t}$, $v = c = 300 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $s = L = 12\mathrm{m}$, $t = \frac{L}{c} = \frac{12\mathrm{m}}{300 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$
- $t = 40\ \mathrm{ns}$
- Siehe (a): Es ist entweder eine große Strecke L oder eine hohe Wechselfrequenz nötig. Eine so hohe Frequenz ist aber mit mechanischen Bauteilen nicht umsetzbar.

3 Die Rolle der Polarisation (Aufgabe 2)

„We have carefully checked each channel for no depolarization, by looking for a cosine Malus law when a supplementary polarizer is placed in front of the source. These auxiliary tests are particularly important [...] They also yield the efficiencies of the polarizers, required for the quantum mechanicals calculations." [4]

In diesem Ausschnitt der Originalveröffentlichung beschreiben Aspect et al., dass man unter anderem die Effizienz der Polarisationsfilter überprüfte, in dem weitere Filter in das System eingebracht und mithilfe des Gesetzes von Malus ausgewertet wurden. Das Gesetz von Malus beschreibt die Lichtintensität I hinter zwei Polarisationsfiltern, wenn diese um einen Winkel α zueinander verdreht sind: $I = I_0 \cdot \cos^2(\alpha)$

(a) *Berechne die Intensitäten für verschiedene Differenzwinkel α trage die Ergebnisse in einem I-α-Diagramm im Intervall $0° \leq \alpha \leq 180°$ auf.*



Betrachtet man die Ergebnisse von Experimenten mit einzelnen Photonen, spricht man nicht mehr von Intensitäten, sondern von der Anzahl der hinter dem Filter gemessenen Photonen. Für das Einzelphoton ergibt sich eine binäre Auswahl zwischen Transmission und Absorption abhängig von der Transmissionswahrscheinlichkeit zu $P_T = \cos^2(\alpha)$.

(b) Erkläre den Zusammenhang zwischen dem Gesetz von Malus für Lichtintensitäten und der Transmissionswahrscheinlichkeit des einzelnen Photons P_T.

- Erklärung mit Gesetz der großen Zahlen bzw. Wesenszug der Quantenphysik (Stochastische Vorhersagbarkeit): Ergebnisse für einzelne Photonen sind zufällig. Für eine große Anzahl an Durchgängen wird aber die stochastische Vorhersagbarkeit in Abhängigkeit vom Winkel immer deutlicher. Der $\cos^2(\alpha)$-Zusammenhang äußert sich mikroskopisch als Wahrscheinlichkeit und folglich auch makroskopisch als Lichtintensität.

(c) Ein horizontal polarisiertes Photon trifft auf eine Anordnung von sechs Polarisationsfiltern. Diese sind jeweils um einen Winkel α gegen die horizontale Polarisationsrichtung verdreht: $\alpha_1 = 5°, \alpha_2 = 10°$, $\alpha_3 = 20°, \alpha_4 = 45°, \alpha_5 = 70°, \alpha_6 = 90°$. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Photon am vierten Filter absorbiert wird.

- $P_{T1} = \cos^2(5° - 0°)$, $P_{T2} = \cos^2(10° - 5°)$, $P_{T3} = \cos^2(20° - 10°)$, $P_{T4} = \cos^2(45° - 20°)$
- $P_{Ges} = P_{T1} \cdot P_{T2} \cdot P_{T3} \cdot (1 - P_{T4}) = 0{,}992 \cdot 0{,}992 \cdot 0{,}97 \cdot (1 - 0{,}821) = 0{,}17 \rightarrow 17\%$

(d) Angenommen die Winkel der Polarisationsfilter α_1 und α_6 des Aufbaus in (c) bleiben fest, während die zwischenliegenden Polarisationsfilter beliebig verändert werden können. Wie müssen die Winkel α_2 bis α_5 gewählt werden, um die maximale Anzahl an Photonen hinter Filter 6 zu detektieren? Begründe.

- Differenz zw. α_1 und α_6: $90° - 5° = 85°$

- $85° \div 5 = 17° \rightarrow\ \alpha_2 = 5° + 17° = 22°,\ \alpha_3 = 39°,\ \alpha_4 = 56°,\ \alpha_5 = 73°$
- Begründung: kleineste Winkeldifferenz = höchste P_T (nach Gesetz v. Malus). Man kann dann schrittweise vorgehen. Betrachtet man drei aufeinanderfolgende Polarisationsfilter, erhält man die optimale Transmission, wenn der mittlere den Differenzwinkel zwischen dem ersten und dem dritten gerade halbiert, denn verringert man den einen, vergrößert man sofort den anderen so sehr, dass sich das negativ auf die Gesamttransmission auswirkt. Setzt man das fort, kommt man darauf, dass die Abstände gleichmäßig verteilt sein müssen.

4 Quantenkryptografie: Anwendung der Nobelpreisforschung

Das sogenannte Ekert-Protokoll (E91) wurde 1991 von Artur Ekert entwickelt und gilt als wichtige praktische Anwendung von Verschränkung in der Kryptografie, dem Verschlüsseln von Nachrichten zur sicheren Kommunikation [5]. Dem Protokoll liegen die gleichen Annahmen zu Grunde, die Clauser, Horne, Shimony, und Holt zur CHSH-Ungleichung geführt haben. Im Folgenden wird E91 von Alice (A) und Bob (B) verwendet, um einen Schlüssel bestehend aus einer zufälligen, binären Bitfolge zu generieren. Dieser kann verwendet werden, um die Kommunikation zwischen A und B für Dritte unlesbar zu machen. Sie gehen dabei so vor:

Schritt 1: In einer Quelle werden Paare verschränkter Photonen erzeugt, wovon jeweils eins zu A und eins zu B gesandt wird.

Schritt 2: A und B wählen jeweils zufällig aus den ihnen zur Verfügung stehenden Polarisationsrichtungen einen Winkel für den Polarisationsfilter (A nutzt $\alpha_1 \ldots \alpha_3$ und B nutzt $\beta_1 \ldots \beta_3$). Zu jeder Messung notieren sie sich den Winkel und das erhaltene Ergebnis (siehe Tabelle 1).

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{\pi}{8}, \alpha_3 = \frac{\pi}{4}, \beta_1 = \frac{\pi}{8}, \beta_2 = \frac{\pi}{4}, \beta_3 = \frac{3\pi}{8}$$

Schritt 3: A und B vergleichen über einen weiteren Kanal, wer wann welchen Winkel gewählt hat. Nur die Durchgänge, in denen in die gleiche Richtung gemessen wurde, werden als Schlüsselbits zur Verschlüsselung der Kommunikation verwendet.

Schritt 4: Um zu testen, ob sie von Eve (E) abgehört wurden, nutzen sie die CHSH-Ungleichung (siehe Abschnitt 1). In der Quantenphysik erhält man für den Korrelationskoeffizienten $E(\alpha_i, \beta_j) = -\cos(\alpha_i - \beta_j)$. Durch Einsetzen lässt sich S berechnen. Ein Lauschen von E kann ausgeschlossen werden, wenn die Ungleichung mit einem Wert von $S_{\text{Theorie}} = -2\sqrt{2}$ verletzt wird.

(a) *Überprüfe den Theoriewert für S für die gegebenen Winkel.*

$$S = -\cos\left(-2\left(0 - \frac{\pi}{8}\right)\right) + \cos\left(2\left(0 - \frac{3\pi}{8}\right)\right) - \cos\left(2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right)\right) - \cos\left(2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{8}\right)\right)$$

$$S = -\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$S = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

(b) *Bestimme anhand der Wertetabelle die Schlüsselbits, die Alice nach dem Ekert-Protokoll erhalten wird.*

- Auswerten der Durchgänge mit gleichen Messbasen von A und B, siehe Lösungstabelle

Durch Auswertung der Messergebnisse und Vergleich ihrer Winkel wollen Alice und Bob S herausfinden, ob sie belauscht wurden. Dazu werten Sie S anhand der Tabelle aus, indem Sie zunächst die $P_{AB}(\alpha, \beta_j)$, daraus $E(\alpha_i, \beta_j)$ und schließlich S berechnen.

(c) *Berechne mit Hilfe dieser Formel und den Tabellenwerten den Wert S. Vergleiche anschließend mit dem Theoriewert für S und diskutiere, wie verlässlich die mit der Tabelle erstellten Schlüssel sind.*

- Auswertung der Durchgänge mit gleichen Messbasen von A und B, siehe Lösungstabelle
- Diskussion: Wert liegt in gleicher Größenordnung wie Theorie, weicht aber deutlich vom Theorie-Wert ab. Die Messdaten sind theoretisch nicht verwertbar, da die Stichprobengröße (n=100) zu klein ist.

(d) Wie würden Alice und Bob im Ekert-Protokoll erkennen, dass sie von Eve belauscht wurden?

- Alice und Bob erwarten eine Verletzung der CHSH-Ungleichung mit dem Theorie-Wert $S = -2\sqrt{2}$. Für eine große Zahl an Photonen sollte er zuverlässig auftreten.
- Weicht das Ergebnis für S vom Theoriewert ab, müssen Alice und Bob davon ausgehen, belauscht worden zu sein.

Quantenkryptografie (E91-Aufgabe): Wertetabelle

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Alice Winkel	π/4	π/8	π/8	π/8	π/8	π/4	0	π/4	π/4	π/8	π/4	π/8	0	π/8	0	π/4	π/8	0	π/8	0	0	π/8	0	π/8	π/8
Alice Ergebnisse	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
Bob Winkel	π/8	π/8	π/4	π/8	3π/8	3π/8	π/4	3π/8	π/4	3π/8	π/4	π/4	π/4	3π/8	3π/8	π/4	3π/8	3π/8	π/4	π/4	π/8	π/8	π/8	3π/8	3π/8
Bob Ergebnisse	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0

	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Alice Winkel	0	π/4	π/4	0	π/8	π/4	0	0	π/4	π/8	π/4	π/4	π/8	0	π/8	0	π/4	0	π/8	0	π/8	0	π/8	π/8	0
Alice Ergebnisse	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
Bob Winkel	π/8	π/4	π/4	π/4	π/8	π/8	3π/8	3π/8	3π/8	π/8	3π/8	3π/8	π/4	π/4	π/4	π/4	π/8	π/4	π/8	π/4	3π/8	π/8	3π/8	3π/8	3π/8
Bob Ergebnisse	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
Alice Winkel	0	π/4	π/4	π/4	π/8	π/4	π/4	π/8	π/8	0	0	π/8	π/4	π/4	π/8	π/8	π/8	0	π/4	0	π/8	0	π/8	π/4	π/4
Alice Ergebnisse	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
Bob Winkel	3π/8	π/4	π/4	π/8	3π/8	π/4	π/8	π/4	3π/8	π/4	π/4	3π/8	π/4	π/8	π/4	3π/8	π/8	π/4	3π/8	3π/8	3π/8	3π/8	π/4	3π/8	3π/8
Bob Ergebnisse	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0

	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Alice Winkel	π/8	π/4	0	0	π/4	π/4	π/8	π/4	π/4	π/8	π/4	π/4	π/8	0	0	π/4	π/8	0	π/8	π/8	π/8	0	π/4	π/8	0
Alice Ergebnisse	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
Bob Winkel	π/4	π/4	3π/8	π/8	π/8	π/8	3π/8	π/4	π/4	π/8	π/4	π/4	π/4	π/8	π/4	π/4	π/4	π/8	π/4	π/8	3π/8	π/4	π/8	π/4	3π/8
Bob Ergebnisse	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0

Quantenkryptografie (E91-Aufgabe): Wertetabelle mit Markierungen + Lösung

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Alice Winkel	π/4	π/8	π/8	π/8	π/8	π/4	0	π/4	π/4	π/8	π/4	π/8	0	π/8	0	π/4	π/8	0	π/8	0	0	π/8	0	π/8	π/8
Alice Ergebnisse	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
Bob Winkel	π/8	π/8	π/4	π/8	3π/8	3π/8	π/4	3π/8	π/4	3π/8	π/4	π/4	π/4	3π/8	3π/8	π/4	3π/8	3π/8	π/4	π/4	π/8	π/8	π/8	3π/8	3π/8
Bob Ergebnisse	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0

	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Alice Winkel	0	π/4	π/4	0	π/8	π/4	0	0	π/4	π/8	π/4	π/4	π/8	0	π/8	0	π/4	0	π/8	0	π/8	0	π/8	π/8	0
Alice Ergebnisse	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
Bob Winkel	π/8	π/4	π/4	π/4	π/8	π/8	3π/8	3π/8	3π/8	π/8	3π/8	3π/8	π/4	π/4	π/4	π/4	π/8	π/4	π/8	π/4	3π/8	π/8	3π/8	3π/8	3π/8
Bob Ergebnisse	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
Alice Winkel	0	π/4	π/4	π/4	π/8	π/4	π/4	π/8	π/8	0	0	π/8	π/4	π/4	π/8	π/8	π/8	0	π/4	0	π/8	0	π/8	π/4	π/4
Alice Ergebnisse	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
Bob Winkel	3π/8	π/4	π/4	π/8	3π/8	π/4	π/8	π/4	3π/8	π/4	π/4	3π/8	π/4	π/8	π/4	3π/8	π/8	π/4	3π/8	3π/8	3π/8	3π/8	π/4	3π/8	3π/8
Bob Ergebnisse	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0

	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Alice Winkel	π/8	π/4	0	0	π/4	π/4	π/8	π/4	π/4	π/8	π/4	π/4	π/8	0	0	π/4	π/8	0	π/8	π/8	π/8	0	π/4	π/8	0
Alice Ergebnisse	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
Bob Winkel	π/4	π/4	3π/8	π/8	π/8	π/8	3π/8	π/4	π/4	π/8	π/4	π/4	π/4	π/8	π/4	π/4	π/4	π/8	π/4	π/8	3π/8	π/4	π/8	π/4	3π/8
Bob Ergebnisse	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0

(b)

Identische Basen: 24

Schlüssel A 001110000000000110010000

Schlüssel B 110001111111111001101111

	P00	P11	P10	P01	Summe	E
P(0,π/8)	0	1	3	3	7	-0,71
P(0,3π/8)	3	5	2	0	10	0,6
P(π/4,π/8)	1	1	3	4	9	-0,56
P(π/4,3π/8)	1	0	4	3	8	-0,75

S **-2,62**

(c)

$$E\left(0,\frac{\pi}{8}\right) = P_{00} + P_{11} - P_{10} - P_{01} = \frac{1}{7} + \frac{0}{7} - \frac{3}{7} - \frac{3}{7} = -\frac{5}{7},$$

$$E\left(0,\frac{3\pi}{8}\right) = P_{00} + P_{11} - P_{10} - P_{01} = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{2}{10} - \frac{0}{10} = \frac{3}{5},$$

$$E\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}\right) = P_{00} + P_{11} - P_{10} - P_{01} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{3}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{5}{9},$$

$$E\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right) = P_{00} + P_{11} - P_{10} - P_{01} = \frac{0}{8} + \frac{1}{8} - \frac{4}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$S_{Tabelle} = E(\alpha_1,\beta_1) - E(\alpha_1,\beta_3) + E(\alpha_3,\beta_1) + E(\alpha_3,\beta_3) = -\frac{5}{7} - \frac{3}{5} - \frac{5}{9} - \frac{3}{4} = -2{,}62$$

$$S_{\text{Theorie}} = -2\sqrt{2} = -2{,}8284$$

(e) Gegeben sind sieben der acht Polarisationswinkel, die Alice und Bob im Experiment einstellen. Zeige, dass Bob $\beta_3 = \frac{3\pi}{8}$ wählen muss, um die maximale Verletzung der CHSH-Ungleichung zu erhalten.

Geg.: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{\pi}{8}, \alpha_3 = \frac{\pi}{4}, \beta_1 = \frac{\pi}{8}, \beta_2 = \frac{\pi}{4},$ Ges.: β_3 (im Intervall $0 \leq \beta_3 \leq \pi$)

$$S = E(\alpha_1, \beta_1) - E(\alpha_1, \beta_3) + E(\alpha_3, \beta_1) + E(\alpha_3, \beta_3)$$

$$S = -\cos\left(2\left(0 - \frac{\pi}{8}\right)\right) + \cos(2(0 - \beta_3)) - \cos\left(2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right)\right) - \cos\left(2\left(\frac{\pi}{4} - \beta_3\right)\right)$$

$$S = -\frac{2}{\sqrt{2}} + \cos(2(-\beta_3)) - \cos\left(2\left(\frac{\pi}{4} - \beta_3\right)\right)$$

$$S'(\beta_3) = -2\sin(2\beta_3) - 2\cos(2\beta_3) = 0$$

$$-2\sin(2\beta_3) = 2\cos(2\beta_3)$$

$$\tan(2\beta_3) = -1$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2}\arctan(-1) = \frac{3\pi}{8}$$

5 Neuer Formalismus: Verschränkung von Zuständen

Da die Quantenphysik zu teilweise vollkommen anderen Phänomenen führt, als wir sie aus der klassischen Physik kennen, überrascht es nicht, dass wir Quantenobjekte ganz anders beschreiben müssen als wir es z.B. für ein makroskopisches Objekt wie einen Tisch oder Ball tun würden. In der klassischen Mechanik würden wir z.B. den Zustand eines Balls beschreiben, indem wir seinen aktuellen Ort und seine Geschwindigkeit angeben. Damit können wir berechnen, wohin er sich bewegen wird. Den Zustand eines Quantenobjekts können wir ebenfalls angeben, nur auf eine vollkommen andere Art, nämlich durch einen (normierten) Vektor. In diesem ist die gesamte Information über den Zustand enthalten. Für viele Eigenschaften ist dieser Vektor kompliziert oder gar unendlichdimensional. Recht einfach lässt sich aber z.B. die (lineare) Polarisation eines Photons angeben. So kann ein horizontal polarisiertes Photon mit dem Vektor $\vec{h} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ beschrieben werden und ein vertikal polarisiertes mit $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Jede beliebige Drehung der Polarisation um einen Winkel θ gegen die horizontale Richtung ist ebenfalls darstellbar $\vec{h}_\theta = \cos\theta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sin\theta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$. Zwei Photonen, die in unterschiedliche Richtungen geschickt werden, wie es z.B. im mit dem Nobelpreis gewürdigten Experiment von Aspect (siehe Abb. 3) der Fall war, können durch zwei Vektoren dargestellt werden. Damit wir diese unterscheiden können, schreiben wir sie mit unterschiedlichen Klammern für jedes Teilchen. Wir meinen damit aber immer den Polarisationszustand der beiden Photonen $\vec{h}_A = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ für ein horizontal polarisiertes Photon, das wir zu Alice (A) senden, und $\vec{h}_B = \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$ für jenes, welches wir zu Bob (B) senden, bzw. $\vec{v}_A = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ und $\vec{v}_B = \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}$ für vertikal polarisierte Photonen.

Eine Besonderheit der Quantenphysik ist die Möglichkeit verschränkter Zustände. Dies bedeutet, dass ein System aus mehreren Quantenobjekten (z.B. Photonen) als Ganzes betrachtet einen wohldefinierten Zustand einnimmt, ohne dass man zusätzlich jedem Teilsystem einen eigenen wohldefinierten Zustand zuordnen kann. Um zu verstehen, was damit gemeint ist, schauen wir uns ein Beispiel an. Ein bedeutender verschränkter Zustand ist der folgende Bell-Zustand für zwei verschränkte Photonen

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right).$$

Das müssen wir folgendermaßen lesen: Die Darstellung $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}$ ist kein klassisches Skalarprodukt. Die Vektoren in unterschiedlichen Klammern stehen nebeneinander und gehören zusammen, sie können aber nicht miteinander verrechnet werden. Vektoren in gleichen Klammern können wie bekannt verrechnet werden.

In diesem Bell-Zustand hat Photon A offensichtlich keine eindeutige Polarisation. Es kommt sowohl eine horizontale als auch eine vertikale vor (links bzw. rechts in der Summe). Man kann nun ausrechnen, mit welcher

Wahrscheinlichkeit, die eine oder andere Polarisation gemessen wird. Die Regel, mit der das geht, besagt, dass wir den Vektor, der die gewünschte Polarisation repräsentiert, skalar mit $\vec{B}$ multiplizieren und den quadrierten Betrag von diesem Produkt berechnen müssen. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei B Photon eine horizontale Polarisation gemessen wird, berechnet sich also z.B. wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\left|\vec{h}_B \cdot \vec{B}\right|^2 &= \left|\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \cdot 1 + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \cdot 0\right)\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right|^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Wie in der Rechenregel oben verlangt, werden nur die geschweiften Klammern skalar miteinander multipliziert. Die eckigen bleiben stehen. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei Bob ein Photon mit horizontaler Polarisation gemessen wird, ist also 0,5 oder 50 %.

Nehmen wir nun an, dass tatsächlich bei Bob gemessen wurde, dass das Photon horizontal polarisiert ist. Eine weitere Regel der Quantenphysik besagt nun, dass nach der Messung das Photon in einem exakt definierten Polarisationszustand ist – und zwar wie gemessen horizontal polarisiert. Nach der Messung darf aus dem ursprünglichen Vektor $\vec{B}$ nur der Vektor $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ zur Beschreibung von Bobs Photon übrigbleiben und alle additiven Terme müssen verschwinden, also

$$
\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right) \xrightarrow{\text{Messung von } \vec{h}_B \text{ bei B}} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}
$$

Folglich muss auch das Photon bei Alice die zum Vektor passende Eigenschaft der horizontalen Polarisation $\vec{h}_A$ haben und man wird immer diese messen. Das kann so interpretiert werden, dass bei beiden Photonen immer dieselbe Polarisation gemessen wird, aber vor der Messung für keines der Photonen eindeutig ist, ob es horizontal oder vertikal polarisiert ist. Das zeichnet verschränkte Zustände aus. Genau genommen ist das der Extremfall einer maximalen Verschränkung. Vor der Messung bei Bob ist die Polarisation bei Alice vollkommen unbestimmt (50% Wahrscheinlichkeit für horizontal, 50% für vertikal), nach der Messung ist der Zustand eindeutig bestimmt.

(a) *Wir beginnen wieder mit einem Photonenpaar im Bell-Zustand und je ein Photon wird zu Alice und Bob geschickt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Alice ein Photon mit vertikaler Polarisation misst. Welche Polarisation wird Bob dann bei seinem Photon messen?*

$$
\begin{aligned}
\left|\vec{v}_A \cdot \vec{B}\right|^2 &= \left|\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(0 \cdot \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + 1 \cdot \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right|^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

- *Die Wahrscheinlichkeit, dass Alice ein vertikal polarisiertes Photon misst, ist somit wieder 50%. Der letzte Vektor, der für die Polarisation von Bobs Photon steht, kann ebenfalls nur einem vertikal polarisierten Photon entsprechen.*

(b) *Begründe, warum der Zustand* $\vec{Z} = \frac{1}{\sqrt{4}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}\right)$ *kein verschränkter Zustand sein kann.*

- *Ein verschränkter Zustand zeichnet sich dadurch aus, dass durch die Messung eines Teilchens Information über den des anderen gewonnen werden kann. Die Information über den Zustand eines Teilsystems erlaubt es, sofort eine richtige Schlussfolgerung über alle anderen Teilsysteme zu ziehen. Angenommen beim Zustand $\vec{Z}$ hat Alice für ihr Photon eine horizontale Polarisation gemessen, dann lautet der Zustand nach der Messung*

$$\vec{Z} \xrightarrow{\text{Messung von } \vec{h}_A \text{ bei A}} \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\left(\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right).$$

Folglich bleibt für Bob immer noch die Möglichkeit, sein Photon in beiden Polarisationen zu messen, es wird keine Information über die Polarisation des Photons von Bob gewonnen. Ein identisches Resultat erhält man, falls man bei Alice eine vertikale Polarisation misst.

(c) *Ein weiteres Photonenpaar wird in einem anderen Bell-Zustand mit der Vorschrift $\vec{B}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}\right)$ präpariert. Begründe kurz und ohne Rechnung, welche Polarisation Bob messen wird, wenn Alice bei ihrem Photon eine horizontale Polarisation misst.*

- *Wenn Alice eine horizontale Polarisation misst, befindet sich das System nach der Messung nur noch in dem Zustand, in dem diese Eigenschaft $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ steht. Für Bobs Photon bleibt so nur noch die Eigenschaft, die an die von Alices Photon gekoppelt ist, also eine vertikale Polarisation $\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}$.*

Ein weiterer wichtiger Aspekt der Quantenphysik ist das No-Cloning-Theorem, das besagt, dass Quantenobjekte nicht in allen ihren Eigenschaften exakt kopiert werden können. Einzelne Eigenschaften können aber von einem Quantenobjekt auf ein anderes übertragen werden, wenn man verschränkte Zustände verwendet. Anton Zeilinger hat unter anderem auch für diesen Nachweis seinen Nobelpreis 2022 erhalten. Das Prinzip soll hier nachgerechnet werden. Gegeben sind die vier Bell-Zustände für zwei verschränkte Photonen:

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right),$$

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right),$$

$$\vec{B}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}\right),$$

$$\vec{B}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}\right).$$

Für Zeilingers Teleportationsexperiment wird ein Photonenpaar im zweiten Bellzustand $\vec{B}_2$ erzeugt und je ein Photon zu Alice und Bob geschickt. Zusätzlich gibt es bei Alice ein weiteres Photon, dessen Polarisationseigenschaften unbestimmt sind $\left\langle\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\rangle$ (siehe Abbildung 4).

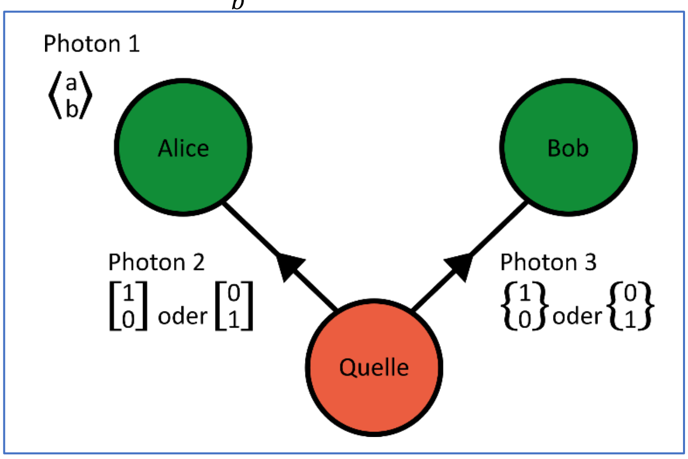


Abb. 4: Skizze des Teleportationsexperiments nach Zeilinger. Die Pfeile geben die Wege der Photonen an.

Der Gesamtzustand aller drei Photonen kann nun wie folgt beschrieben werden

$$\vec{\psi}_{123}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\rangle\otimes\vec{B}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\rangle\otimes\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left\langle\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}-\left\langle\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(a\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle+b\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\right)\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}-\left(a\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle+b\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\right)\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}+b\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}-a\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}-b\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right).$$

Dies bedeutet, dass die Photonen 1 $\left(\left\langle\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right\rangle\right)$ und 2 $\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\text{ oder }\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ bei Alice sind und das Photon 3 $\left(\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}\text{ oder }\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)$ bei Bob. Für die Teleportation der Eigenschaften von Photon 1 auf 3 führt Alice eine gemeinsame Messung bei ihren Photonen durch, sodass einer der Bell-Zustände die beiden Photonen repräsentiert. Angenommen bei Alices Messung ist $\vec{B}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left\langle\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-\left\langle\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ das Ergebnis, so wird die Eigenschaft von Bobs Photon verändert. Für eine solche Messung von Alice berechnen wir das Skalarprodukt

$$\vec{B}_2\cdot\vec{\psi}_{123}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}+b\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}-a\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}-b\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right).$$

Wie oben beschrieben besteht der Zustand nach der Messung nur aus den Termen, die in diesem Skalarprodukt übrigbleiben.

(d) Bestimme die neue Polarisationseigenschaft von Bobs Photon, indem du dieses Skalarprodukt ausrechnest und den übrigbleibenden Vektor $\{\ \}$ interpretierst.

$$\vec{B}_2\cdot\vec{\psi}_{123}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}+b\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}-a\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}-b\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(a\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}\right)+\frac{1}{2}\left(\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(b\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(a\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)-\frac{1}{2}\left(\left\langle\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(b\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle\otimes\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(a\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}-0\right)+\frac{1}{2}(0\cdot0)-\frac{1}{2}(0\cdot0)-\frac{1}{2}\left(0-b\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}a\\0\end{Bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}0\\b\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a\\b\end{Bmatrix}$$

- *Das Photon 3 $\begin{Bmatrix}a\\b\end{Bmatrix}$ hat somit die beliebige Polarisation $\left\langle\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right\rangle$ von Photon 1 übernommen. Der Quantenzustand von 1 wurde also exakt auf Photon 3 kopiert, allerdings existiert das Photon 1 (und übrigens auch das Photon 2) nicht mehr, da es gemessen wurde.*

Literaturverweise

[1] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and R.A. Holt, *Phys. Rev. Lett*. 23, 880, 1969.

[2] S.J. Freedman und J.F. Clauser, *Phys. Rev. Lett*. 28, 938, 1972.

[3] Pressemitteilung der Königlich Schwedischen Akademie der Wissenschaften zur Vergabe des Physik-Nobelpreises 2022, URL: https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/press-release/ (Zugegriffen am 31.01.2023)

[4] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, *Phys. Rev. Lett*. 49, 1804, 1982.

[5] A.K. Ekert, Phys. *Rev. Lett*. 67, 661, 1991.