Die Größe eines Exoplaneten

Exoplaneten sind Planeten, die um andere Sterne kreisen als unsere Sonne, und damit außerhalb unseres Sonnensystems liegen. Bisher sind einige Tausend Exoplaneten entdeckt.
Eine sehr erfolgreiche Entdeckungsmethode beobachtet Transits. Ein Planetentransit bedeutet, dass ein Planet zwischen uns und dem Stern vorbeizieht und den Stern damit (ein kleines bisschen) verdeckt. Deswegen kommt in diesem Zeitraum weniger Licht des Sterns bei uns an.

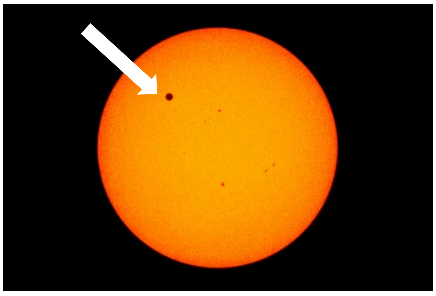


Abb. 1: So sieht es in unserem Sonnensystem aus, wenn die Venus vor unserer Sonne entlang zieht (2012).
https://www.nasa.gov/mission_pages/station/research/news/transit_from_space.html

Bei der Transitmethode misst man die Helligkeit von Sternen und schaut, ob es Helligkeitseinbrüche gibt. Tauchen diese Einbrüche in gleichmäßigen Abständen immer wieder auf, deutet dies auf einen Planeten hin, der einen Teil des Sterns zudeckt und so sein Licht blockiert, während er an ihm vorbeizieht.

Die Transitmethode eignet sich gut, um den Radius des entdeckten Planeten abzuschätzen. Es gilt der Zusammenhang:

$$\Delta I = \frac{0{,}01}{R_*^2} \cdot {R_p}^2$$

ΔI ... Reduktion der Helligkeit durch den Planeten als Anteil (in Abb.2 beträgt $\Delta I = 1\% = 0{,}01$)
R_* ... Radius des Sterns (in Vielfachen vom Sonnenradius $R_\odot$)
R_p ... Radius des Planeten (in Vielfachen vom Jupiterradius R_{Jup})

Große Planeten, wie Jupiter, nehmen ca. 1% der Helligkeit weg. Kleine Planeten, wie die Erde, weniger.

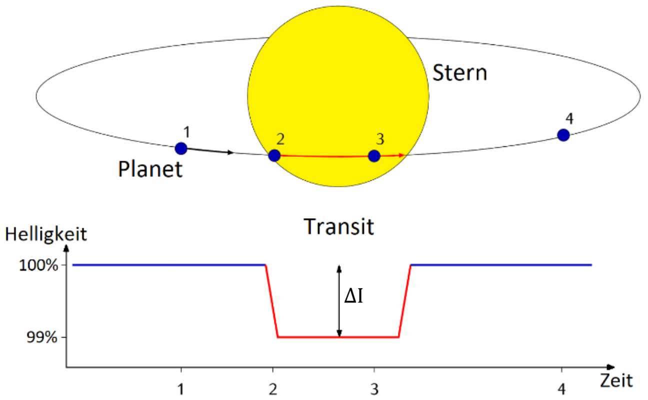


Abb. 2: Das Diagramm zeigt die Lichtkurve, in der man einen Einbruch sieht, während der Planet vor dem Stern herzieht.
PikPng.com_exoplanet-png_5381627

Für einen gegebenen Stern lässt sich der Helligkeitseinbruch ΔI als Funktion des Planetenradius angeben: $f(x) = \frac{0{,}01}{R_*^2} \cdot x^2$.

a) Wähle einen Stern aus der Liste und stelle die Funktionsgleichung von f auf. Skizziere die Funktion für einen sinnvollen x- und y-Achsenabschnitt, sodass man die Funktionswerte gut ablesen kann.

b) Beschreibe, wie der Graph aus der Normalparabel hervorgegangen ist.

Stern	Radius R_*	Exoplanet	Radius R_p
WASP-139	0,8 $R_\odot$	WASP-139 b	0,8 R_{Jup}
CoRoT-18	1 $R_\odot$	CoRoT-18 b	1,3 R_{Jup}
Kepler-289	1 $R_\odot$	Kepler-289 b	0,2 R_{Jup}
		Kepler-289 c	1 R_{Jup}
		Kepler-289 d	0,24 R_{Jup}
Beta Pictoris	1,5 $R_\odot$	Beta Pictoris b	1,5 R_{Jup}
HAT-P-7	2 $R_\odot$	HAT-P-7 b	1,5 R_{Jup}
Kepler-432	4 $R_\odot$	Kepler-432 b	1,1 R_{Jup}

c) Ermittle den Helligkeitseinbruch ΔI für den/einen Planeten, der diesen Stern umkreist.
Ermittle den Planetenradius, der bei diesem Stern einen Helligkeitseinbruch von 0,3% verursacht.

d) Bestimme die in der Tabelle angegebenen Eigenschaften deiner Funktion f. Gib an, was diese im Kontext von Planetentransits bedeuten.

Eigenschaft		Interpretation
Definitionsbereich	$D=\mathbb{R}$ mit $x \geq 0$	Planeten können keinen negativen Radius haben.
Wertebereich		
Scheitelpunkt		
Monotonie		

e) Wird die Funktion für einen größeren Stern gestreckter oder gestauchter? Begründe, woran man das sehen kann, ohne den Funktionsgraphen zu zeichnen.

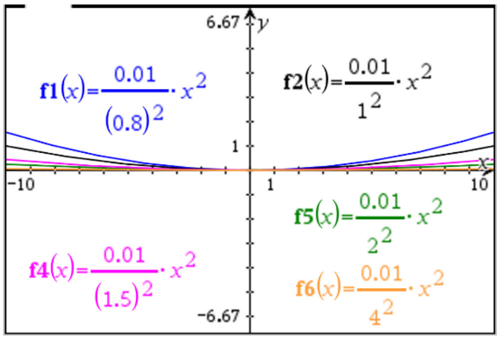
f) Bestimme, welche der Stern-Exoplaneten-Paare bei einer Bedeckung einen Helligkeitseinbruch von 1% zeigen. Sind es wirklich nur die Planeten, die so groß sind wie Jupiter?
Stelle eine Regel auf, wie man die Paare leicht erkennen kann.

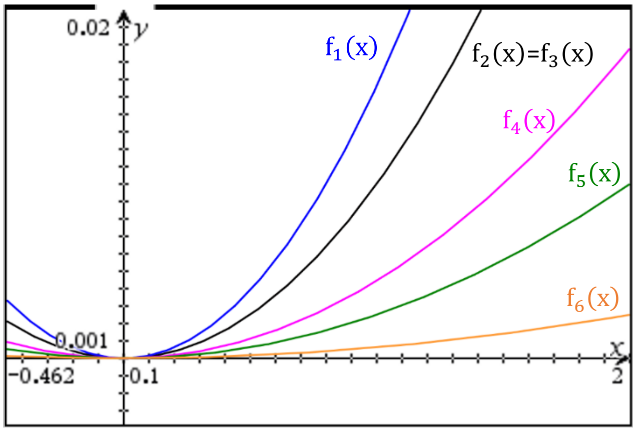
a) Es muss hier über den sinnvollen Bereich auf der x- und y-Achse nachgedacht werden, um im CAS - Graphikfenster eine geeignete Fenstergröße einzustellen, die Ablesen von Funktionswerten möglich macht. Über den tatsächlichen Definitions- und Wertebereich der Funktion wird in d) nachgedacht.

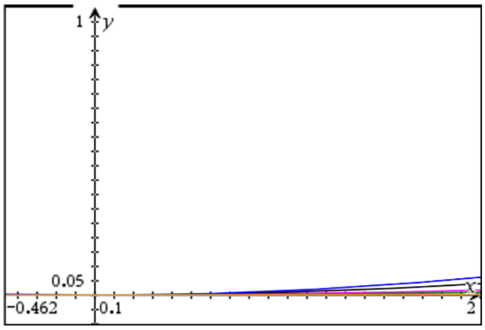
Stern	Funktionsgleichung
WASP-139	$f_1(x)=\frac{0{,}01}{0{,}8^2}\cdot x^2 \approx 0{,}0156\cdot x^2$
CoRoT-18	$f_2(x)=\frac{0{,}01}{1^2}\cdot x^2 \approx 0{,}01\cdot x^2$
Kepler-289	$f_3(x)=\frac{0{,}01}{1^2}\cdot x^2 \approx 0{,}01\cdot x^2 = f_2(x)$
Beta Pictoris	$f_4(x)=\frac{0{,}01}{1{,}5^2}\cdot x^2 \approx 0{,}0044\cdot x^2$
HAT-P-7	$f_5(x)=\frac{0{,}01}{2^2}\cdot x^2 \approx 0{,}0025\cdot x^2$
Kepler-432	$f_6(x)=\frac{0{,}01}{4^2}\cdot x^2 \approx 0{,}0006\cdot x^2$

Abschätzung angezeigter x-Achsenbereich: ein Planet kann keinen negativen Radius haben und es sind Radien bis $1{,}5\ R_{Jup}$ vorgegeben → $0 \le x \lesssim 2$

Abschätzung angezeigter y-Achsenbereich:
der Helligkeitseinbruch muss eine positive Zahl zwischen 0 und 1 sein → $0 \le y \le 1$;
es ist ein Hinweis gegeben, dass jupitergroße Planeten ca. 1% der Helligkeit wegnehmen - die angegebenen Planeten haben höchstens $1{,}5\ R_{Jup}$, → $0 \le y \lesssim 0{,}02$







b) starke Stauchung, keine Verschiebung

c)

Stern	Exoplanet	Radius R_p	Helligkeitseinbruch ΔI	Planetenradius, der einen Helligkeitseinbruch von 0,3% verursacht
WASP-139	WASP-139 b	$0{,}8\ R_{Jup}$	$f_1(0{,}8)=0{,}01$	$f_1(x)=0{,}003 \rightarrow x=0{,}44 \rightarrow R_P = 0{,}44\ R_{Jup}$
CoRoT-18	CoRoT-18 b	$1{,}3\ R_{Jup}$	$f_2(1{,}3)=0{,}0169$	$f_2(x)=0{,}003 \rightarrow x=0{,}55 \rightarrow R_P = 0{,}55\ R_{Jup}$
Kepler-289	Kepler-289 b	$0{,}2\ R_{Jup}$	$f_3(0{,}2)=0{,}0004$	$f_3(x)=0{,}003 \rightarrow x=0{,}55 \rightarrow R_P = 0{,}55\ R_{Jup}$
	Kepler-289 c	$1\ R_{Jup}$	$f_3(1)=0{,}01$	
	Kepler-289 d	$0{,}24\ R_{Jup}$	$f_3(0{,}24)=0{,}000576$	
Beta Pictoris	Beta Pictoris b	$1{,}5\ R_{Jup}$	$f_4(1{,}5)=0{,}01$	$f_4(x)=0{,}003 \rightarrow x=0{,}82 \rightarrow R_P = 0{,}82\ R_{Jup}$
HAT-P-7	HAT-P-7 b	$1{,}5\ R_{Jup}$	$f_5(1{,}5)=0{,}005625$	$f_5(x)=0{,}003 \rightarrow x=1{,}1 \rightarrow R_P = 1{,}1\ R_{Jup}$
Kepler-432	Kepler-432 b	$1{,}1\ R_{Jup}$	$f_6(1{,}1)=0{,}000756$	$f_6(x)=0{,}003 \rightarrow x=2{,}2 \rightarrow R_P = 2{,}2\ R_{Jup}$

$f1(0.8)$	0.01
$f2(1.3)$	0.0169

solve($f1(x)=0.003,x$)
$x=-0.438178$ or $x=0.438178$

solve($f2(x)=0.003,x$)
$x=-0.547723$ or $x=0.547723$

negative Ergebnisse entfallen durch die Interpretation als Radius

d)

Eigenschaft (gilt für alle f_i)		Interpretation
Definitionsbereich	$D=\mathbb{R}$ mit $x \geq 0$	Planeten können keinen negativen Radius haben.
Wertebereich	$W=\mathbb{R}$ mit $0<y\leq 1$	Der Helligkeitseinbruch ΔI beträgt zwischen 0 und 100 %. 0% treten auf, wenn der Planet von uns aus gesehen gar nicht vor dem Stern herzieht (das wäre dann aber auch kein Transit), oder er eine Größe von 0 R_{Jup} hat, also nicht existiert. 100% treten auf, wenn der Planet die gesamte sichtbare Sternfläche bedeckt (wie bei einer Sonnenfinsternis durch unseren Mond) und damit gar kein Licht mehr bei uns ankommt.
Scheitelpunkt	$S(0\|0)$	Es wird kein kleinerer Helligkeitseinbruch als 0% (also gar kein Helligkeitseinbruch) gemessen. Dies kann nur eintreten, wenn der vorbeiziehende Planet eine Größe von 0 R_{Jup} hat, also nicht in unserer Sichtlinie existiert.
Monotonie	monoton steigend	Für größere Planetenradien, muss auch der Helligkeitseinbruch wachsen, da ein größerer Planet eine größere Fläche des Sterns abdeckt und damit die Reduktion der Helligkeit größer ist.

e) Anhand der Gleichung $f(x)=\frac{0{,}01}{R_*^2}\cdot x^2$ sieht man, dass mit größerem R_* der Nenner des Vorfaktors (Parameter a) größer wird und der Vorfaktor (Parameter a) damit kleiner wird. Die Funktion wird dadurch gestauchter.

f) Lösung individuell

mögliche Regel:
Umstellen des Terms der Funktionsgleichung zeigt, dass die Maßzahl des Sternradius und die Maßzahl des Planetenradius gleich groß sein müssen.

$$\Delta I=\frac{0{,}01}{R_*^2}\cdot {R_p}^2 = 0{,}01\cdot\frac{{R_p}^2}{R_*^2} = 0{,}01\cdot\left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2$$

Damit erzeugen nicht nur die Jupitergroßen Planeten einen Helligkeitseinbruch von 1%.