

Arbeiten mit dem CAS - Planeten in Opposition

Unsere Planeten umlaufen die Sonne mit unterschiedlicher Geschwindigkeit. Dabei gilt, dass die Planeten umso schneller sind, je kleiner ihr Bahnradius ist. Daher ist die Erde schneller als der Mars. Als Folge davon variiert der Abstand von Erde und Mars (siehe Abb. 1).

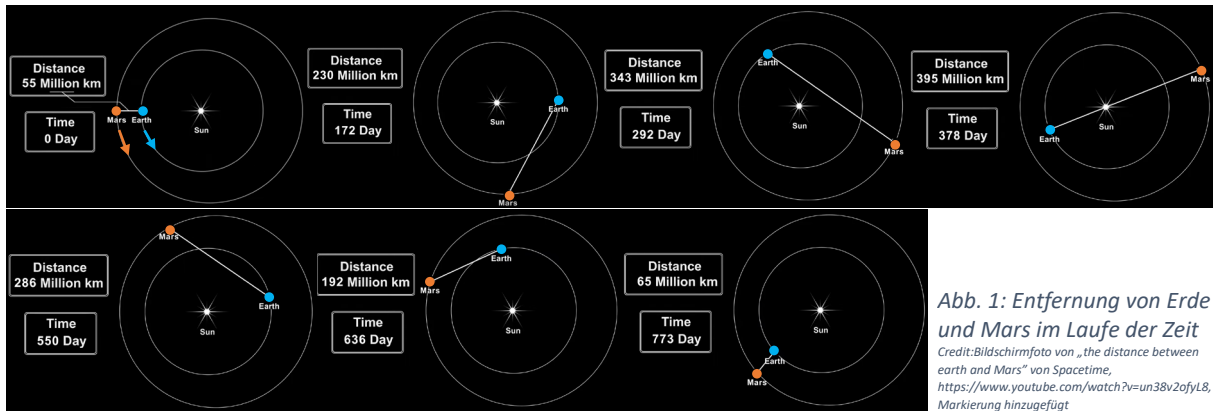


Abb. 1: Entfernung von Erde und Mars im Laufe der Zeit

Credit: Bildschirmfoto von „the distance between earth and Mars“ von Spacetime, <https://www.youtube.com/watch?v=un38v2ofyL8>, Markierung hinzugefügt

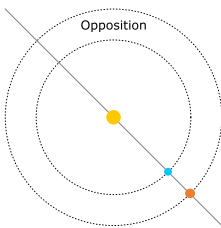


Abb. 2: Opposition des Mars

Credit: Joachim Hertz Stiftung, <https://www.leifphysik.de/astroonomie/planetensysteme/grundwissen/siderische-und-synodische-umlaufzeit>

Für Missionen zum Mars wird aufgrund der hohen Kosten ein möglichst kurzer Reiseweg angestrebt. Erde und Mars sind sich besonders nahe, wenn der Mars in Opposition steht. Das bedeutet, dass die Himmelskörper Sonne, Erde und Mars im Weltraum eine Linie bilden. Dabei ist die Erde in der Mitte, sodass Sonne und Mars auf gegenüber liegenden Seiten stehen. (siehe Abb. 2)

Die Zeit t_{Opp} , die von einer Opposition zur nächsten benötigt wird, kann für kreisförmige Umlaufbahnen durch folgende Formel berechnet werden:

$$\frac{1}{t_{Opp}} = \frac{1}{t_E} - \frac{1}{t_P} \quad t_E \dots \text{Zeit, die die Erde für einen Umlauf um die Sonne benötigt} = 365,24 \text{ d}$$

$$t_P \dots \text{Zeit, die ein äußerer Planet für einen Umlauf um die Sonne benötigt}$$

Nutze dein CAS für die Aufgaben:

- Die Zeit t_{Opp} soll als Funktion $f(x)$ dargestellt werden. Die Zeit t_P ist die Variable x .
Überprüfe, welche Funktionsgleichung zur Formel gehört:

`solve()`

① $f(x) = \frac{365,24 \cdot x}{365,24 - x}$ ② $f(x) = \frac{365,24 \cdot x}{x - 365,24}$ ③ $f(x) = \frac{365,24 \cdot x}{x + 365,24}$

- Bestimme die Zeitspanne von einer Opposition des Mars (Jupiter, Neptun) zur nächsten. Runde auf ganze Tage.

Planet	Mars	Jupiter	Neptun
Umlaufzeit in „Erd-Einheiten“	687 d	11,86 a = 4333 d	164,79 a = 60190 d

- Calculator: Definiere die Funktion und lass dir die Funktionswerte ausgeben. Probiere alle drei Befehle und entscheide, welcher Befehl für dich am einfachsten ist. Achtung: Du musst der Funktion jedes Mal einen neuen Namen geben, z.B. f , g und h . `define` `→` `:=`
- Graphs: Zeichne die Funktion, verändere den Zoom, bis du die Form der Funktion erkennst, und lass dir die Wertetabelle anzeigen. Verändere den Tabellenanfangswert, sodass du den gesuchten Wert schneller in der Tabelle findest.
- Lists and Spreadsheet: Verwende die Spalte A für die gesuchten x -Werte und definiere die Spalte B entsprechend.
- Welches Vorgehen hat sich für diese Fragestellung am besten geeignet und warum?

3. Erde und Mars standen am 27. Juli 2018 in Opposition. Wann müssten laut Formel die nächsten zwei Opposition stattfinden (Datum)? Berechne!

Hinweis: 2020 war ein Schaltjahr mit dem 29. Februar und damit 366 Tagen.

4. Abb. 3 zeigt die tatsächlichen Daten der Oppositionen von Erde und Mars.

a) Berechne für die Jahre 2018 und 2020 wie viele Tage es jeweils bis zur nächsten Opposition dauerte.

b) Warum sind die realen Zeitspannen bis zur nächsten Opposition anders als die mit Formel berechneten?

Denke an die Bedingung für die Gültigkeit der Formel und schaue dir Abb. 3 an.

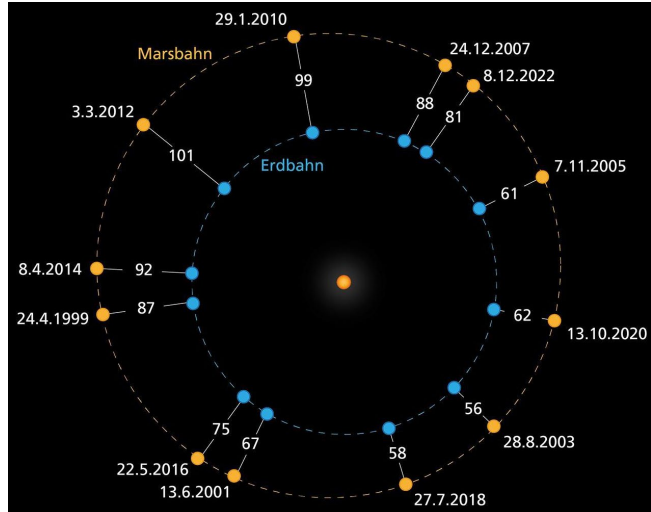


Abb. 3: Oppositionen von Erde und Mars 1999 bis 2022

Credit: DLR, nach einer Vorlage der Wiener Arbeitsgemeinschaft für Astronomie, <https://www.dlr.de/content/de/bilder/2020/04/oppositionen-von-erde-und-mars-1999-bis-2022.html>

Kl. 9, Arbeiten mit dem CAS - Planeten in Opposition - Lösung

1. Antwort ② ist richtig

Als Platzhalter für t_{Opp} und t_p können beliebige Buchstaben verwendet werden – es kommt nur darauf an, die Termstruktur zu vergleichen.

Achtung: „y“ und „x“ dürfen im Dokument (z.B. in Graphen, Tabellen) nicht bereits verwendet/definiert sein.

$$\text{solve}\left(\frac{1}{y} = \frac{1}{365.24} - \frac{1}{x}, y\right) \quad y = \frac{365.24 \cdot x}{x - 365.24}$$

2. Zeit bis zur nächsten Opposition von

Mars: $\approx 780 \text{ d} = 2 \text{ a } 50 \text{ d}$ ($\approx 26 \text{ Monate}$, wird in den Medien oft angebracht)

Jupiter: $\approx 399 \text{ d} = 1 \text{ a } 34 \text{ d}$

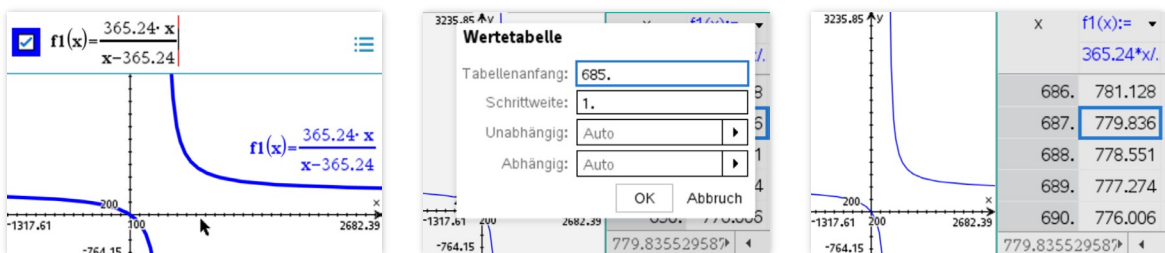
Neptun: $\approx 367 \text{ d} = 1 \text{ a } 2 \text{ d}$

- a. Beim Definieren muss immer „von x“ mit angegeben werden, ansonsten wird es nur als Term gespeichert.

Define $f(x) = \frac{365.24 \cdot x}{x - 365.24}$	Fertig	$g := \frac{365.24 \cdot x}{x - 365.24}$	$\frac{365.24 \cdot x}{x - 365.24}$	$\frac{365.24 \cdot x}{x - 365.24} \rightarrow h(x)$	Fertig
$f(687)$	779.836	$g(687)$	"Fehler: Name verweist nicht auf Funktion."	$h(687)$	779.836
$f(4333)$	398.861	$g(x) := \frac{365.24 \cdot x}{x - 365.24}$	Fertig		
$f(60190)$	367.47	$g(687)$	779.836		

- b. Da die Funktionen im Calculator schon definiert sind, kann man in der Eingabezeile auch $f(x) = f$ (oder g, h) eingeben.

Statt über das Menü zu gehen, kann die Wertetabelle auch mit „ctrl“ + „T“ angezeigt (und entfernt) werden.



- c. Das Kästchen „Konflikte“ auf „Variablenverweis“ setzen, da es fragt, ob man die Spalte X oder den Namen „x“ einer Spalte meint. Das Kästchen „Konflikte“ taucht nicht auf, wenn der Spalte A kein Name zugewiesen wird. In diesem Fall muss in der Gleichung aber a für „Spalte A“ (Groß- und Kleinschreibung irrelevant) verwendet werden.

A	x	B	C
=		Mehrere Konflikte erkannt	
1		=365.24*x/(x-365.24).	36
2		x: Spalte oder Variable?	51
3	6	Alle Variablenverweise	47
4		OK Abbruch	
B		$\frac{365.24 \cdot x}{x - 365.24}$	

A	x	B	C
=		=365.24*x/(x-365.24)	
1	687.		779.836
2	4333.		398.861
3	60190.		367.47
4			
5			
B5			

- d. In dem Fall ist die Verwendung von Calculator und Lists and Spreadsheet am schnellsten. Den Graphen zu zeichnen ist unnötig, da der Graph an sich keinen Mehrwert für die Aufgabenlösung hat.

3. **laut Formel:** 14. September 2020, 3. Nov 2022

offener Lösungsweg

möglicher Lösungsweg:

$$780d = (2 \cdot 365 + 50)d$$

$$27. \text{ Juli } 2018 \xrightarrow{+2 \cdot 365d} 26. \text{ Juli } 2020 \xrightarrow{+50d} 14. \text{ Sep. } 2020$$

...

4. a) **tatsächliche Zeitspannen:**

Opp. 2018 bis Opp. 2020: 810 d

Opp. 2020 bis Opp. 2022: 787 d

- b) Die Formel gilt nur für kreisförmige Bahnen. In Realität liegen Erde und Mars aber auf elliptischen Bahnen. (Die Schüler sollten zumindest die Marsbahn als elliptisch identifizieren.)