

1. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. R. Sauerbrey

2. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. A. Tünnermann

Tag der Verleihung des Diploms:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Theoretische Grundlagen	10
2.1	Freies Elektron im intensiven Laserfeld	10
2.1.1	Klassische Bewegung	11
2.1.2	Relativistische Bewegung	13
2.2	Relativistische Autokorrelation	24
2.2.1	Überlagerung gegenläufiger Laserpulse	25
2.2.2	Abstrahlung der zweiten Harmonischen	33
2.2.3	Räumlich gemittelttes Autokorrelationssignal	39
2.3	Laser-Plasma	40
2.3.1	Selbstfokussierung	42
2.3.2	Gasdichtemessungen	53
2.3.3	Lasergetriebene Plasmawelle	55
3	Experimenteller Aufbau	59
3.1	Lasersystem	59
3.1.1	Faraday-Isolator	63
3.2	Meßanordnung	67
4	Experimentelle Messungen	75
4.1	Eigenschaften der fokussierten Laserpulse	75
4.2	Dichteprofil des Gasstrahls	84
4.3	Räumlicher und zeitlicher Überlapp	85
4.4	Einzelschuß-Autokorrelation bei relativistischer Laserintensität	110
5	Zusammenfassung und Ausblick	117

6	Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen	121
6.1	Freies Elektron in einer ebenen Welle	121
6.1.1	Klassische Betrachtung	121
6.1.2	Relativistische Betrachtung	123
6.2	Freies Elektron in einer stehenden Welle	132
6.3	Klassische Plasma-Dispersionsrelation	136
6.4	Ponderomotorische Selbstfokussierung	139
6.5	Relativistische Selbstfokussierung	145
6.6	Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen	146
6.7	Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Pulse	155
6.8	Pulsfrontverkipfung eines Gauß'schen Pulses	162
6.9	Klassische Autokorrelation zweiter Ordnung	163
6.10	Klassische Autokorrelation dritter Ordnung	165
6.11	$q_{1/e}$ -Parameter eines idealen Gauß'schen Pulses	166
6.12	Relativistische Autokorrelation	169
6.13	Laser Wake-Field	177
6.13.1	Laser-Plasma-Welle	177
6.13.2	Approximation	180
6.13.3	Numerische Lösung	182
6.14	Relativistische Bewegungsgleichungen	185
6.15	Lösung der paraxialen Wellengleichung	185
6.16	Lösung der parabolischen Wellengleichung	189
Literaturverzeichnis		198

1 Einleitung

In den vergangenen Jahren ist die Laserentwicklung schnell vorangeschritten. Laser finden heutzutage Anwendung auf vielen verschiedenen Gebieten [1, 2]: Wissenschaft, Forschung und Technik, Wirtschaft und Industrie, Militär- und Waffentechnik, Nachrichtentechnik und Medizin. Die Anwendungen sind vielfältig und reichen von Untersuchungen in der Physik, der Chemie und der Biologie (Laserspektroskopie mit hoher spektraler Auflösung, Laserholographie und -interferometrie, nichtlineare und integrierte Optik, Erzeugung ultrakurzer Laserpulse zur Beobachtung schneller Zeitabläufe mit hoher Zeitauflösung, Erzeugung hochintensiver Laserpulse zur Beobachtung neuartiger Eigenschaften von Materie und laserinduzierte Kernreaktionen- und umwandlungen), Materialbearbeitung (Schneiden, Schweißen und Bohren), schnelle Zündung eines Fusionstargets (engl. : "fast ignitor"), d. h. schnelles Aufheizen eines kleinen Deuterium- oder Tritiumkügelchens durch kurze, energiereiche Laserpulse, Behandlung von Augenkrankheiten (Abdampfen der Hornhautoberfläche zur Behandlung von Kurz- und Weitsichtigkeit und Verschweißen von Rissen auf der Netzhaut), Abstands- und Zeitmessungen mit hoher Genauigkeit bis zu Lasern in elektronischen Geräten (Laserdrucker, -zeiger, Strichcodelesegerät und CD-Spieler).

Zur Zeit gibt es auf der Welt einige wenige Lasersysteme - u. a. auch JETI (Abk. : *Jenaer 10 Hz-Titan:Saphir-Lasersystem, Institut für Optik und Quantenelektronik Jena*) -, welche auf einem Labortisch Platz finden (engl. "table top laser"), und Laserpulse mit einer Pulsdauer von $\tau_L \sim 100$ fs und einer Energie von $E_L \sim 1$ J liefern. Dies entspricht einer Leistung von $P_L = E_L/\tau_L \sim 10$ TW. Laserpulse mit ultrakurzer Pulsdauer lassen sich mittels spektral breitbandiger Materialien wie Titan:Saphir verwirklichen; ihre Verstärkung beruht auf der sog. CPA-Technik¹ (engl. : "chirped pulse amplification technique") [3]. Bei der Fokussierung auf einen winzigen Brennfleck von $A_F \sim 10 \mu\text{m}^2$ ergibt sich eine Laserintensität von $I_L \sim 10^{19}$ W/cm². Wechselwirkt ein intensiver Laserpuls mit Materie, so entsteht ein Laserplasma. Ab Laserintensitäten von $I_{\text{rel}} \sim 10^{18}$ W/cm² oszillieren die Plasmaelektronen nicht mehr klassisch, sondern be-

¹CPA-Technik: Um die Intensitäten klein zu halten und somit unterhalb der Zerstörschwellen der Optiken zu bleiben, werden die Laserpulse zunächst in der Zeit gestreckt, anschließend verstärkt und schließlich wieder verkürzt.

1 Einleitung

wegen sich auf relativistischen Bahnen - dies ist das Gebiet der relativistischen Laser-Plasma-Physik. Unter bestimmten Bedingungen bildet sich während der Wechselwirkung eines intensiven Laserpulses mit einem lasererzeugten Plasma ein Plasmakanal, in welchem das Laserlicht über mehrere Rayleighlängen hinaus fokussiert bleibt. In solch einem Plasmakanal können Elektronen innerhalb weniger hundert Mikrometer auf relativistische Energien ($E_{\text{kin}} > m_e c^2 = 512 \text{ keV}$) beschleunigt werden [4]. Treffen diese laserbeschleunigten Elektronen auf ein (Konverter-)Material mit hoher Kernladungszahl, so entsteht Bremsstrahlung, welche wiederum zur Erzeugung photoinduzierter Kernreaktionen [5, 6] bzw. -umwandlungen genutzt werden kann [7, 8]. Erst kürzlich ist es weltweit einigen Forschergruppen gelungen, lasererzeugte, stark gerichtete und quasi-monoenergetische Elektronenstrahlen mit hoher Ladungsdichte, hoher Energie und geringer Emittanz zu erzeugen [9, 10, 11]. Weitere Arbeiten zeigen, daß Laserplasmen reiche Teilchen- [12, 13] und Photonenquellen [14, 15] darstellen, welche sich durch hohe Energie, hohen Teilchen- bzw. Photonenfluß, kleine Divergenz, kleine Quellgröße und ultrakurze Bündel- bzw. Pulsdauer auszeichnen. Aufgrund ihrer besonderen Eigenschaften sind sie für die Untersuchung schneller biologischer und chemischer Reaktionen, die Entwicklung neuer Lithographieverfahren auf der Basis ultrakurzer Wellenlängen in der Computer- und Chipindustrie, die Gamma-, Neutronen- und Protonenradiographie sowie die Hochenergiephysik von besonderem Interesse. Laserplasmen sind - gleichsam als Teilchenbeschleuniger im Mikrometerbereich - gegenüber großen, oft kilometerlangen Beschleunigeranlagen kostengünstiger, einfacher zu handhaben und sicherer.

Die vorliegende Diplomarbeit beschreibt den Aufbau eines neuen Experimentes zur Überlagerung zweier gegenläufiger hochintensiver Laserpulse ("Zweistrahlexperiment"). Die wesentliche Aufgabe besteht darin, eine Meßanordnung zu entwickeln, die es erlaubt, einen Laserpuls mit relativistischer Intensität² in zwei Teilstrahlen gleicher Energie aufzuspalten und diese aus entgegengesetzten Richtungen aufeinander zulaufen zu lassen, so daß sie sich gleichzeitig in ihrem gemeinsamen Fokus treffen (s. Abb. 1.1). Die angestrebte Genauigkeit des zeitlichen bzw. räumlichen Überlapps liegt dabei im Femtosekunden- bzw. Mikrometerbereich! Zur Realisierung dieser Aufgabe teilen wir den Hauptpuls des Jenaer Lasersystems ($I_L \gtrsim I_{\text{rel}}$) mittels eines Strahlteiler in zwei Teilstrahlen auf und fokussieren diese mittels zweier Parabolspiegel unter einem Winkel von 180° in einen Helium-Gasstrahl. Aufgrund der hohen Laserintensität entsteht ein Laserplasma, welches nicht nur die Fundamentale, sondern auch höhere Harmonische der Laserfrequenz abstrahlt (sog. *Nichtlineare Thomsonstreuung*) [16, 17]. Um die beiden Teilstrahlen räum-

²Als relativistische Intensität bezeichnen wir die Intensität I_L , welche wir benötigen, um freie Elektronen auf relativistische Energien zu beschleunigen ($I_L \gtrsim I_{\text{rel}} = 2.2 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$).

1 Einleitung

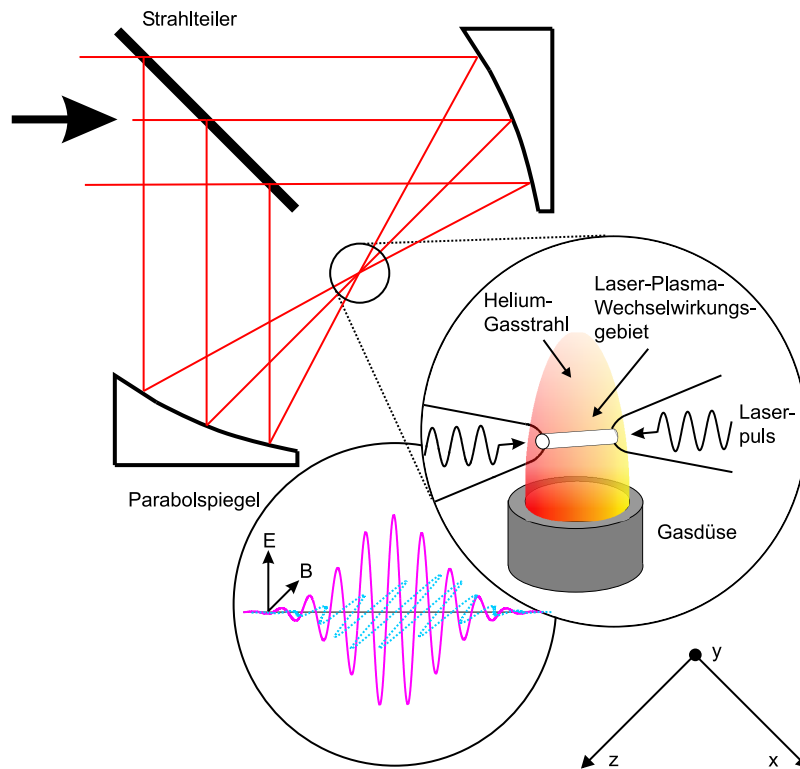


Abbildung 1.1: Zweistrahlexperiment. Ein intensiver Laserpuls (schwarzer dicker Pfeil) wird durch einen Strahlteiler in zwei Teilstrahlen aufgespalten und mittels zweier Parabolspiegel unter einem Winkel von 180° in einen Helium-Gasstrahl fokussiert (vergrößerter Ausschnitt). Dadurch entsteht ein Plasma, in welchem sich die beiden gegenläufigen Teilstrahlen zu einer stehenden Welle überlagern (Kreis links unten, E - und B -Felder).

1 Einleitung

lich und zeitlich zu überlagern, messen wir die zweite Harmonische der Laserfrequenz (2ω -Selbstemission des Plasmas), und zur Beobachtung der Pulsausbreitung nehmen wir zeitaufgelöste Schattenbilder des Plasmas auf. Dazu nutzen wir einen frequenzverdoppelten Abtast(Probe-)puls, dessen zeitliche Verzögerung bzgl. des Hauptpulses veränderlich einstellbar ist. Treffen sich die gegenläufigen (identischen) Teilstrahlen, welche jeweils relativistische Intensität besitzen ($I_{1/2} \gtrsim I_{\text{rel}}$), schließlich mit hoher Genauigkeit in Raum und Zeit, so sind sie (auto-)korreliert. Aus der relativistischen Autokorrelation - relativistisch, da die beteiligten Laserintensitäten relativistisch sind - läßt sich die Pulsdauer bestimmen. Klassische, konventionelle Autokorrelationstechniken [18] beruhen auf der Verwendung nichtlinearer optischer Kristalle wie BBO, KDP oder LBO (β -BaB₂O₄, KH₂PO₄ oder LiB₃O₅); sie können nicht bei relativistischer Laserintensität verwendet werden, da die Kristalle zerstört würden. Üblicherweise wird die Pulsdauer zunächst aus einer klassischen Autokorrelationsmessung bestimmt und für den relativistischen Bereich übernommen. Die relativistische Autokorrelationsmessung hingegen erlaubt es, die Pulsdauer bei voller Laserintensität unmittelbar in der Gegend der Laser-Plasma-Wechselwirkung zu ermitteln [19]. Sie liefert somit einen direkten Zugang zu einem der wichtigsten Parameter der relativistischen Laser-Plasma-Physik - der Pulsdauer.

Mit dem Aufbau, der Erfahrung und dem Wissen aus dem Zweistrahlxperiment lassen sich in Zukunft möglicherweise interessante Experimente durchführen (s. Kap. 5): "Lasererzeugte Compton-Rückstreuung", "Laserbeschleunigte Elektron-Elektron-Kollision" und "Multiphotonenionisation des idealen Vakuums" (Elektron-Positron-Paarbildung aus dem idealen Vakuum).

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

- Kap. 2 beschäftigt sich mit den theoretischen Grundlagen, welche für das Verständnis des Zweistrahlxperimentes wichtig sind. Die theoretischen Grundlagen enthalten die Behandlung der relativistischen Bewegung eines freien Elektrons in einem intensiven Laserfeld, die Berechnung des relativistischen Autokorrelationssignals und die Beschreibung kollektiver Effekte der Elektronen in einem Laserplasma.
- Kap. 3 beschreibt den experimentellen Aufbau. Dazu gehört das JETI-Lasersystem, der zusätzlich eingebaute Faraday-Isolator und die gesamte Meßanordnung zur Überlagerung der beiden gegenläufigen Laserpulse und zur Detektion des relativistischen Autokorrelationssignals.
- Kap. 4 erklärt die experimentellen Messungen und zeigt die aus ihnen ermittelten Meßergebnisse. Die Foki werden im einzelnen charakterisiert, und der Überlapp der beiden gegenläufigen Laserpulse wird in Zeit und Raum verifiziert.

1 *Einleitung*

- Das Zusatzkapitel 6 behandelt die mathematischen Herleitungen zu den theoretischen Grundlagen, wobei die einzelnen Zwischenschritte der Rechnungen angegeben sind.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel diskutieren wir die relativistische Bewegung eines freien Elektrons in einem intensiven Laserfeld (s. Kap. 2.1) und berechnen die daraus resultierende Abstrahlung der zweiten Harmonischen (s. Kap. 2.2.2). Dabei berücksichtigen wir die räumliche und zeitliche Überlagerung zweier gegenläufiger intensiver Laserpulse (s. Kap. 2.2.1). Die Abstrahlung und Detektion der zweiten Harmonischen deuten wir als relativistische Autokorrelation (s. Kap. 2.2). Außerdem betrachten wir zwei Effekte, die i. a. während der Wechselwirkung eines Laserpulses mit einem Plasma stattfinden: die Selbstfokussierung eines Laserpulses in einem Plasma (s. Kap. 2.3.1) und die Erzeugung einer lasergetriebenen Plasmawelle (s. Kap. 2.3.3), in welcher Elektronen beschleunigt werden können. Schließlich berechnen wir noch die Phasenverschiebung, welche ein Laserpuls bei seinem Wege durch ein Laserplasma aufammelt; dies ist wichtig für das Verständnis unserer Messungen zur Gas- bzw. Elektronendichte (s. Kap. 2.3.2).

Die Arbeit ist durchweg im SI-System (franz. : "système international d'unités") geschrieben, und die Raumrichtungen werden wie folgt bezeichnet:

- x ist die Polarisationsrichtung des Lasers (im Falle linear polarisierten Lichtes)
- z ist die Ausbreitungsrichtung des Lasers
- y steht senkrecht auf der x - und der z -Achse (x , y und z bilden ein rechtshändiges Koordinatensystem).

Die in diesem Kapitel dargestellten Bilder verwenden stets die Parameter aus den experimentellen Messungen (s. Kap. 4).

2.1 Freies Elektron im intensiven Laserfeld

Wir behandeln zunächst die klassische und die relativistische Bewegung eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld. Dazu beschreiben wir das Laserfeld als *ebene*, kontinuierliche elektromagnetische Welle, die sich im Vakuum ausbreitet. Bei einer ebenen Welle setzen wir voraus, daß der Strahldurchmesser transversal zur optischen Achse unendlich

2 Theoretische Grundlagen

groß ist, und daß das transversale Intensitätsprofil, d. h. das Profil in der x, y -Ebene, konstant ist. Weiterhin ist eine ebene Welle in Richtung der optischen Achse unendlich weit ausgedehnt. Eine kontinuierliche cw-Welle (engl. : "continuous wave") zeichnet sich dadurch aus, daß sie von unendlicher Zeitdauer ist.

All die obigen Bedingungen sind in unseren Experimenten nicht erfüllt. Wir wählen dennoch zunächst den einfachsten Ansatz einer ebenen Welle, um so viel wie möglich analytisch rechnen zu können. Später werden wir außerdem den endlichen Strahldurchmesser und das transversale Intensitätsprofil realer Laserpulse berücksichtigen und die kontinuierliche Welle durch Laserpulse von endlicher Zeitdauer ersetzen.

2.1.1 Klassische Bewegung

Für das Vektorpotential einer ebenen Welle, die in x -Richtung linear polarisiert ist und sich in positive z -Richtung ausbreitet, gilt¹

$$\mathbf{A}^+ = A_0 \sin \phi^+ \hat{\mathbf{e}}_x, \quad (2.1)$$

wobei $\phi^+ = (\omega_0 t - k_0 z)$ die Phase, A_0 die Amplitude des Vektorpotentials, $\omega_0/2\pi$ die Mittenfrequenz, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ die Wellenzahl und λ_0 die Mittenwellenlänge des Lasers sind. Über die homogenen Maxwellgleichungen [20]

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi_{\text{elek}} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.3)$$

erhalten wir für verschwindendes elektrostatisches Potential ($\nabla \Phi_{\text{elek}} \doteq 0$) die elektrischen und magnetischen Felder

$$\mathbf{E}^+ = E_0 \cos \phi^+ \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.4)$$

$$\mathbf{B}^+ = B_0 \cos \phi^+ \hat{\mathbf{e}}_y. \quad (2.5)$$

Aus der Dispersionsrelation im Vakuum ($\omega_0 = ck_0$) folgt die Verknüpfung der Amplituden $B_0 = E_0/c$. Auf ein freies Elektron wirkt i. a. die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = -e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.6)$$

¹Alle Feldgrößen $\psi(\mathbf{r}, t)$ sind Funktionen von Raum und Zeit. Wir schreiben im folgenden kürzer ψ anstatt $\psi(\mathbf{r}, t)$. Der positive bzw. negative Index an den Größen ψ^\pm, ϕ^\pm steht für positive bzw. negative Ausbreitungsrichtung.

2 Theoretische Grundlagen

wobei e die Elementarladung und \mathbf{v} die Geschwindigkeit des Elektrons sind. Da wir für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c \Rightarrow v/c \ll 1$ den Einfluß des Magnetfeldes vernachlässigen können, erfährt das Elektron nur die elektrische Kraft $\mathbf{F}_{\text{kl}} = -e\mathbf{E}$. In diesem Fall läßt sich die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{kl}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{el}}, \quad (2.7)$$

wobei $\mathbf{p}_{\text{kl}} = m_e\mathbf{v}$ der klassische Impuls ist, direkt zeitlich integrieren. Mit der Anfangsbedingung $\mathbf{v}_{\text{kl}}(\phi^+ = 0) \doteq 0$ erhalten wir die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\text{kl}} = -\frac{eE_0}{m_e\omega_0} \sin\phi^+ \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.8)$$

Nach weiterer zeitlicher Integration mit der Anfangsbedingung $\mathbf{r}_{\text{kl}}(\phi^+ = 0) \doteq 0$ ergibt sich für die Auslenkung des Elektrons

$$\mathbf{r}_{\text{kl}} = \frac{eE_0}{m_e\omega_0^2} (\cos\phi^+ - 1) \hat{\mathbf{e}}_x. \quad (2.9)$$

Das Elektron oszilliert in x -Richtung; sowohl seine Oszillationsgeschwindigkeit als auch seine Auslenkungsamplitude sind proportional zur elektrischen Feldstärke. Wir definieren nun die Laserintensität über den Betrag des Poyntingvektors (\mathbf{S}) im Vakuum, dabei bilden das über eine Laserperiode $T = 2\pi/\omega_0$ zeitliche Mittel² [20]

$$I = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \rangle = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}, \quad (2.10)$$

wobei E_0 die elektrische Feldstärke, c die Vakuumlichtgeschwindigkeit, μ_0 die Permeabilitäts- und ε_0 die Dielektrizitätskonstante sind. Die Intensität ist proportional zum Quadrat der elektrischen Feldstärke ($I \sim E_0^2$). Für die zeitlich gemittelte, klassische Oszillationsenergie erhalten wir schließlich

$$\langle U_{\text{osz}} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{p}_{\text{kl}}^2}{2m_e} \right\rangle = \frac{e^2}{8m_e\varepsilon_0\pi^2c^3} I\lambda_0^2, \quad (2.11)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit, m_e die Elektronenmasse, ε_0 die Dielektrizitätskonstante, I die Intensität und λ_0 die Mittenwellenlänge des Lasers sind. Setzen wir die Werte $I = 10^{19} \text{ W/cm}^2$ und $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ ein, so ergibt sich

$$\langle U_{\text{osz}} \rangle \approx 600 \text{ keV} > 511 \text{ keV}. \quad (2.12)$$

² $\langle \dots \rangle$ bezeichnen wir im folgenden als das zeitliche Mittel.

2 Theoretische Grundlagen

D. h. Ab Laserintensitäten von $I \gtrsim 10^{18} \text{ W/cm}^2$ (vgl. atomare Intensität: $I_{\text{at}} \approx 4 \times 10^{16} \text{ W/cm}^2$; folgt aus der atomaren Feldstärke $E_{\text{at}} = e/4\pi\epsilon_0 a_{\text{B}}^2$ mit Bohr'schem Radius $a_{\text{B}} = 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$) ist die zeitlich gemittelte, klassische Oszillationsenergie in der Größenordnung der Ruheenergie des Elektrons. In diesem Fall ist die klassische Beschreibung nicht mehr gültig.

2.1.2 Relativistische Bewegung

Mit zunehmender Feldstärke bzw. Intensität des Laserfeldes schwingt das Elektron immer schneller in x -Richtung, bis die magnetische Kraft $\mathbf{F}_m = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ nicht mehr vernachlässigbar ist. Zu Beginn schwingt das Elektron in x -Richtung. Da das Magnetfeld in y -Richtung zeigt, wirkt die magnetische Kraft in z -Richtung. Das Elektron gewinnt seine Leistung $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ bzw. kinetische Energie $E_{\text{kin}} = P\Delta t$, wobei Δt ein beliebiges Zeitintervall ist, nur aus der elektrischen und nicht aus der magnetischen Kraft

$$\mathbf{F}_m \perp \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow P_m = 0, E_{\text{kin},m} = 0. \quad (2.13)$$

Die magnetische Kraft bewirkt lediglich eine Richtungsänderung des Elektrons. Die vollständige Bahnkurve des Elektrons erhalten wir, indem wir die relativistischen Bewegungsgleichungen lösen. Dazu wählen wir als Ansatz eine laufende und eine stehende Welle.

In der laufenden Welle finden wir analytische Lösungen, sowohl im Laborsystem als auch in einem lorentztransformierten System, in welchem der zeitlich gemittelte Impuls in z -Richtung verschwindet. In der stehenden Welle, die wir in erster Näherung als Überlagerung zweier gegenläufiger laufender Wellen schreiben, lösen wir die relativistischen Bewegungsgleichungen numerisch.

Relativistische Bewegungsgleichungen

Für die relativistische Bewegung eines freien Elektrons, welches sich in intensiven elektrischen und magnetischen Laserfeldern befindet, gilt allgemein

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m_e \mathbf{v}) = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.14)$$

wobei $\mathbf{p} = \gamma m_e \mathbf{v}$ der relativistische Impuls, γ der Lorentzfaktor, m_e die Ruhemasse und e die Elementarladung des Elektrons sind. Der Lorentzfaktor lautet

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \sqrt{1 + (\mathbf{p}/m_e c)^2}. \quad (2.15)$$

2 Theoretische Grundlagen

Verwenden wir die Operatorbeziehung $d\mathbf{p}^2 = 2\mathbf{p}d\mathbf{p}$ und berücksichtigen zusätzlich, daß der relativistische Impuls parallel zur Geschwindigkeit ist, d. h.

$$\mathbf{p} \parallel \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{p}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.16)$$

so ergibt sich für die zeitliche Änderung der kinetischen Energie bzw. die Leistungsbilanz (s. Anh. 6.14),

$$\frac{d}{dt} E_{\text{kin}} = m_e c^2 \frac{d\gamma}{dt} = -e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.17)$$

Laufende Welle

Setzen wir die Felder der laufende Welle in die relativistischen Bewegungsgleichungen (2.14 und 2.17) ein, so erhalten wir ein gekoppeltes *implizites* System gewöhnlicher Differentialgleichungen (s. Anh. 6.2)

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = a_0 \omega_0 \cos \phi^+ \left(\frac{v_z}{c} - 1 \right) \quad (2.18)$$

$$\frac{d\tilde{p}_y}{dt} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{d\tilde{p}_z}{dt} = -a_0 \frac{\omega_0}{c} v_x \cos \phi^+ \quad (2.20)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -a_0 \frac{\omega_0}{c} v_x \cos \phi^+, \quad (2.21)$$

wobei $a_0 = eE_0/m_e\omega_0c$ der sog. relativistische Parameter und $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/m_e c$ der normierte Impuls sind. Der relativistische Parameter ist definiert als das Verhältnis von klassischem Impuls (\mathbf{p}_{kl}) zu $p_0 = m_e c$ und gibt den Feldstärke- bzw. Intensitätsbereich der Laser-Materie-Wechselwirkung an (s. Anh. 6.1)

$$a_0 = \frac{\max(|\mathbf{p}_{\text{kl}}|)}{p_0} = \frac{e\lambda_0}{m_e\sqrt{2\pi}c^{5/2}} \sqrt{\frac{I}{\varepsilon_0}}. \quad (2.22)$$

Für $a_0 \ll 1$ befinden wir uns im klassischen Bereich. Für $a_0 \approx 1$ erreicht das Elektron bereits innerhalb einer halben Laserperiode die Lichtgeschwindigkeit. Ab $a_0 \gtrsim 1$ ist eine relativistische Betrachtung erforderlich. Der Fall $a_0 = 1$ entspricht einer Laserintensität von $I_{\text{rel}} \approx 2.2 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$ bzw. einer elektrischen Feldstärke von $E_{\text{rel}} = 4 \times 10^{12} \text{ V/m}$.

Integrieren wir die relativistischen Bewegungsgleichungen zeitlich mit der Anfangsbedingung, daß das Elektron bei maximaler Feldstärke ruht, d. h. $\tilde{\mathbf{p}}(\phi^+ = 0) = 0$ und

2 Theoretische Grundlagen

$\gamma(\phi^+ = 0) = 1$, so finden wir die relativistischen Impulse (s. Anh. 6.1)

$$p_x = -a_0 m_e c \sin \phi^+ \quad (2.23)$$

$$p_z = \frac{1}{2} a_0^2 m_e c \sin^2 \phi^+ \quad (2.24)$$

und den Lorentzfaktor (s. Anh. 6.1)

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} a_0^2 \sin^2 \phi^+. \quad (2.25)$$

Die kinetische Energie (E_{kin}), die das Elektron im Laserfeld aufnimmt, lautet

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= (\gamma - 1) m_e c^2 \\ &= \frac{1}{2} a_0^2 \sin^2 \phi^+ m_e c^2 = p_z c. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Sie skaliert mit dem Quadrat der Laserintensität und der Ruhenergie des Elektrons

$$E_{\text{kin}} \sim a_0^2 m_e c^2 \sim I^2 E_{\text{Ruhe}}. \quad (2.27)$$

Über $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\gamma m_e$ berechnen wir die Geschwindigkeiten, (s. Abb. 2.1, s. Anh. 6.1)

$$v_x = -\frac{2a_0 c \sin \phi^+}{2 + a_0^2 \sin^2 \phi^+} \quad (2.28)$$

$$v_z = \frac{a_0^2 c \sin^2 \phi^+}{2 + a_0^2 \sin^2 \phi^+}. \quad (2.29)$$

Für die Geschwindigkeiten gelten die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{a_0 \rightarrow \infty} v_x = 0 \quad (2.30)$$

$$\lim_{a_0 \rightarrow \infty} v_z = c. \quad (2.31)$$

D. h. Das Elektron oszilliert bei sehr hohen Laserintensitäten nicht mehr in x -Richtung, sondern bewegt sich nur noch mit der Lichtgeschwindigkeit in z -Richtung! Integrieren wir die Geschwindigkeiten zeitlich, so ergibt sich die parametrische Bahnkurve des Elektrons

2 Theoretische Grundlagen

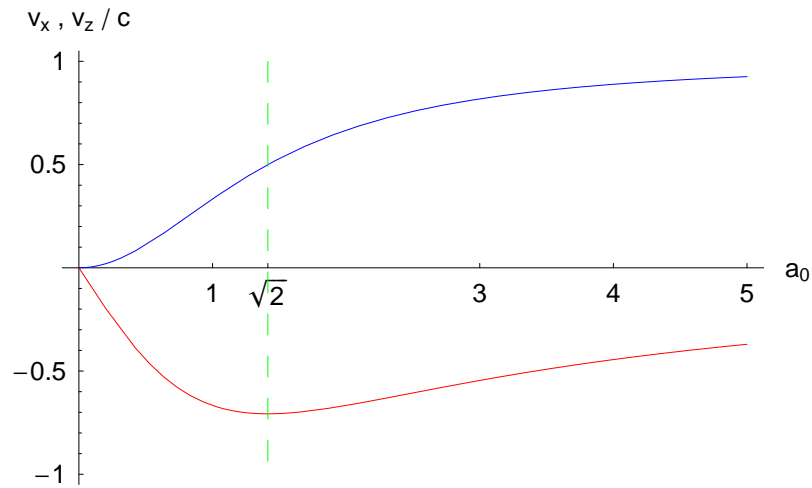


Abbildung 2.1: Geschwindigkeit eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (laufende Welle, Laborsystem). Die Geschwindigkeiten des Elektrons in Polarisations- (rot) und in Ausbreitungsrichtung (blau) des Lasers sind gegen den relativistischen Parameter a_0 , der ein Maß für die Laserintensität ist, aufgetragen. Die Phase beträgt $\phi^+ = \pi/2$. Für hohe Laserintensitäten geht die Geschwindigkeit in Polarisationsrichtung gegen Null, während die Geschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung des Lasers gegen die Lichtgeschwindigkeit geht. Die Beschleunigung des Elektrons in Polarisationsrichtung des Lasers, d. h. $a_x = dv_x/dt$ verschwindet für $a_0 = \sqrt{2}$.

2 Theoretische Grundlagen

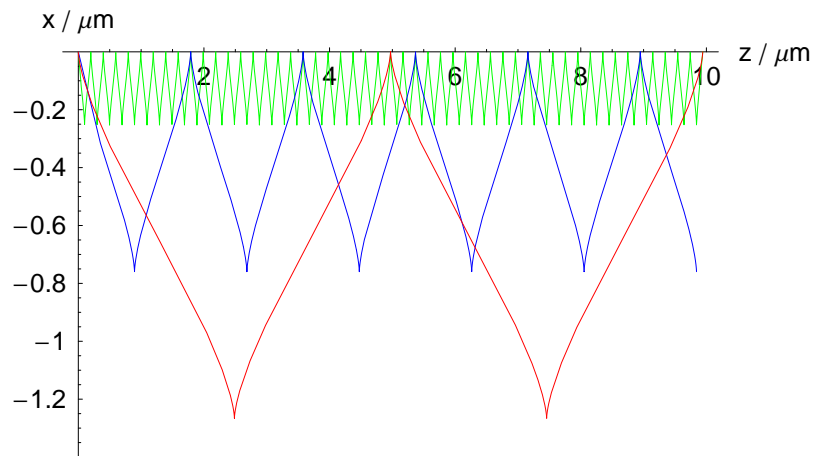


Abbildung 2.2: Relativistische Bahnkurve eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (laufende Welle, Laborsystem). Die parametrischen Trajektorien sind für den gerade relativistischen Fall $a_0 = 1$ (grün) und die stark relativistischen Fälle $a_0 = 3$ (blau) sowie $a_0 = 5$ (rot) aufgetragen. Die Mittwellenlänge des Lasers ist $\lambda_0 = 795$ nm. Mit steigender Laserintensität vergrößert sich sowohl die Oszillationsamplitude als auch die Strecke, die das Elektron während einer Laserperiode in Ausbreitungsrichtung des Lasers zurücklegt.

2 Theoretische Grundlagen

(s. Abb. 2.2, s. Anh. 6.1)

$$x = a_0 \frac{c}{\omega_0} (\cos \phi^+ - 1) \quad (2.32)$$

$$z = \frac{1}{2} a_0^2 \frac{c}{\omega_0} \left[\frac{\phi^+}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\phi^+) \right]. \quad (2.33)$$

Das Elektron oszilliert in x -Richtung, infolge des magnetischen Anteils der Lorentzkraft $\mathbf{F}_m \sim \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ fliegt es gleichzeitig in z -Richtung. Im Laborsystem bewegt es sich daher entlang einer charakteristischen Zickzack-Kurve. Die Oszillationsamplitude ist proportional zur Laserintensität ($x \sim a_0$), während die Strecke, die das Elektron während einer Laserperiode in z -Richtung zurücklegt, proportional zum Quadrat der Laserintensität ist ($z \sim a_0^2$).

Für eine Lorentztransformation des Impulses, bei der sich das System Σ' gegenüber dem System Σ mit einer konstanten Geschwindigkeit v_z bewegt, gilt allgemein [21]

$$p'_x = p_x, p'_y = p_y, p'_z = \gamma_{v_z} (p_z - \gamma m_e v_z), \quad (2.34)$$

wobei $\gamma_{v_z} = 1/\sqrt{1 - (v_z/c)^2}$ der zur Geschwindigkeit v_z gehörige *konstante* Lorentzfaktor ist. Transformieren wir nun so, daß der mittlere Impuls in z -Richtung verschwindet, d. h. $\langle p'_z \rangle = 0$, so erhalten wir die konstante Driftgeschwindigkeit und den Lorentzfaktor des Elektrons (s. Anh. 6.1)

$$v_z = \frac{a_0^2 c}{4 + a_0^2} \quad (2.35)$$

$$\gamma_{v_z} = \frac{4 + a_0^2}{\sqrt{16 + 8a_0^2}}. \quad (2.36)$$

Wegen $\lim_{a_0 \rightarrow \infty} v_z = c$ strebt diese Geschwindigkeit für hohe Laserintensitäten gegen die Lichtgeschwindigkeit. Aus der Transformation des Impulses (2.34) folgt (s. Anh. 6.1)

$$p'_x = -a_0 m_e c \sin \phi^+ \quad (2.37)$$

$$p'_z = -\frac{a_0^2 m_e c \cos(2\phi^+)}{\sqrt{16 + 8a_0^2}}. \quad (2.38)$$

D. h. Das Elektron schwingt doppelt so schnell in z' -Richtung ($p'_z \sim \cos 2\phi^+$) wie in x' -Richtung ($p'_x \sim \sin \phi^+$). Zeitliche Integration liefert die parametrische Bahnkurve im transformierten System (s. Anh. 6.1, s. Abb. 2.3)

2 Theoretische Grundlagen

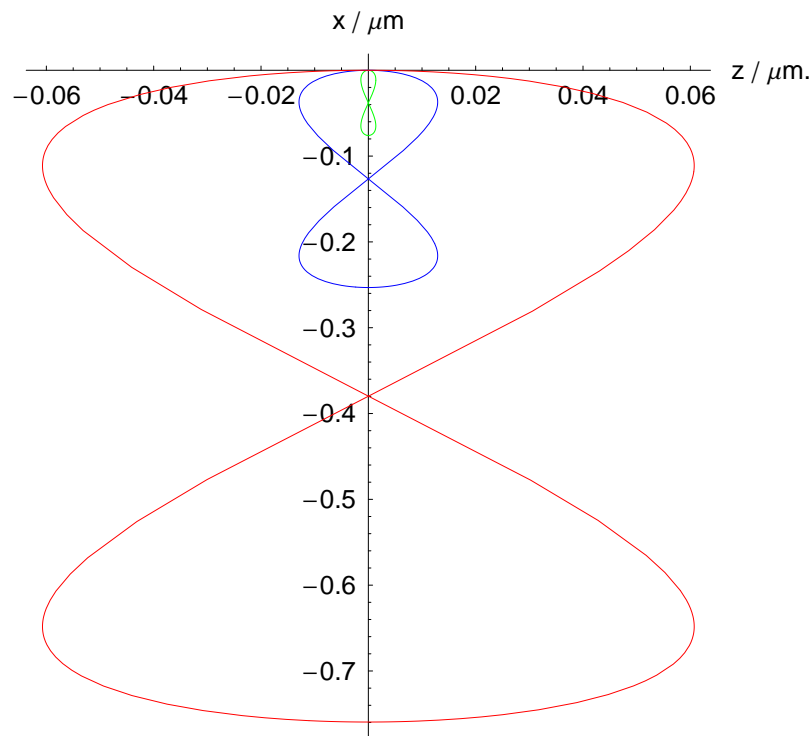


Abbildung 2.3: Relativistische Bahnkurve eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (laufende Welle, lorentztransformiertes System, in dem der mittlere Impuls in Ausbreitungsrichtung des Lasers verschwindet). Die parametrischen Trajektorien sind für den schwach relativistischen Fall $a_0 = 0.3$ (grün), den gerade relativistischen Fall $a_0 = 1$ (blau) sowie den stark relativistischen Fall $a_0 = 3$ (rot) aufgetragen. Die Mittenwellenlänge des Lasers ist $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, und die Phase ϕ^+ läuft von $0 \dots 2\pi$. Das Elektron bewegt sich entlang einer charakteristischen Achterbahn. Es schwingt doppelt so schnell in Ausbreitungs- wie in Polarisationsrichtung des Lasers. Dies führt zur Abstrahlung der in Polarisationsrichtung linear polarisierten Fundamentalen und der in Ausbreitungsrichtung des Lasers linear polarisierten zweiten Harmonischen. Die Abstrahlung höherer Harmonischer wird im Gegensatz zur klassischen, linearen Thomsonstreuung, bei der das Elektron lediglich in Polarisationsrichtung schwingt und nur die Fundamentale der Laserfrequenz emittiert, nichtlineare Thomsonstreuung genannt.

2 Theoretische Grundlagen

$$x' = a_0 \frac{c}{\omega_0} (\cos \phi^+ - 1) \quad (2.39)$$

$$z' = -\frac{1}{2} a_0^2 \frac{c}{\omega_0} \frac{\sin(2\phi^+)}{\sqrt{16 + 8a_0^2}}. \quad (2.40)$$

Das Elektron bewegt sich entlang einer charakteristischen Achterbahn (s. Lit. [22]).

Wir können uns die Achterbahn als Überlagerung zweier unabhängig schwingender Hertz'scher Dipole vorstellen. Ein Hertz'scher Dipol emittiert ganz allgemein Strahlung, deren Intensität unter einem Winkel von 90° zur Dipolachse maximal ist; parallel dazu verschwindet sie [23, 20, 2]. Die emittierte Strahlung ist in Schwingungsrichtung des Dipols linear polarisiert. In unserem Fall oszilliert der erste Dipol mit der Laserfrequenz in x -Richtung ($x' \sim \cos \omega_0 t$), während der zweite mit der doppelten Laserfrequenz in z -Richtung oszilliert ($z' \sim \sin 2\omega_0 t$). Dies führt zur Abstrahlung einer in x -Richtung linear polarisierten Fundamentalen und einer in z -Richtung linear polarisierten zweiten Harmonischen. Die Abstrahlung höherer Harmonischer heißt nichtlineare Thomsonstreuung [17, 16]. Bei der klassischen, linearen Thomsonstreuung schwingt das Elektron hingegen lediglich mit der Laserfrequenz in x -Richtung ($x_{kl} \sim \sin 2\omega_0 t$) und strahlt nur die Fundamentale der Laserfrequenz ab [20].

Wir weisen noch auf eine Besonderheit hin: In einem Laserpuls, der von endlicher Dauer ist, kann ein Elektron, daß zu Beginn in Ruhe ist, *keine* kinetische Nettoenergie aufnehmen [24].

Stehende Welle

Wir überlagern die elektrischen und magnetischen Felder einer nach links und einer nach rechts laufenden ebenen Welle³

$$\mathbf{E}^\pm = E_0 \cos \phi^\pm \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.41)$$

$$\mathbf{B}^\pm = B_0 \cos \phi^\pm \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (2.42)$$

wobei $\phi^\pm = \omega_0 t \mp k_0 z$ die jeweiligen Phasen sind, und erhalten eine ebene stehende Welle

$$\mathbf{E}_{\text{st}} = 2E_0 \cos(\omega_0 t) \cos(k_0 z) \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.43)$$

$$\mathbf{B}_{\text{st}} = 2B_0 \sin(\omega_0 t) \sin(k_0 z) \hat{\mathbf{e}}_y. \quad (2.44)$$

³Um von einem rechtslaufenden Feld $\psi^+(\mathbf{r}, t)$ zu einem linkslaufenden Feld $\psi^-(\mathbf{r}, t)$ zu kommen, führen wir immer die Transformation $z \rightarrow -z$ durch.

2 Theoretische Grundlagen

Die stehende Welle besitzt eine räumlich feste Struktur. Insbesondere verschwindet das Magnetfeld im Ursprung für alle Zeiten

$$\mathbf{B}_{\text{st}}(z = 0, t) = 0. \quad (2.45)$$

Die Knoten des stehenden elektrischen Feldes bzw. die Bäuche des stehenden Magnetfeldes sind gegenüber den Knoten des stehenden Magnetfeldes bzw. den Bäuchen des stehenden elektrischen Feldes um $\Delta\varphi = \pi/2$ phasenverschoben. In der laufenden Welle sind die elektrischen und magnetischen Feldern phasengleich, d. h. $\Delta\varphi = 0$. Setzen wir die Felder der stehende Welle in die relativistischen Bewegungsgleichungen ein, so lautet die Komponentendarstellung des gekoppelten *impliziten* Differentialgleichungssystem (s. Anh. 6.2)

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = 2a_0\omega_0 \left[\frac{\tilde{p}_z}{\gamma} \sin(\omega_0 t) \sin(k_0 z) - \cos(\omega_0 t) \cos(k_0 z) \right] \quad (2.46)$$

$$\frac{d\tilde{p}_y}{dt} = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{d\tilde{p}_z}{dt} = -2a_0\omega_0 \frac{\tilde{p}_x}{\gamma} \sin(\omega_0 t) \sin(k_0 z) \quad (2.48)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -2a_0\omega_0 \frac{\tilde{p}_x}{\gamma} \cos(\omega_0 t) \cos(k_0 z) \quad (2.49)$$

mit $\gamma = \sqrt{1 + \tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_z^2}$ und $z = c \int \tilde{p}_z / \gamma dt$.

Mit der Anfangsbedingung, daß das Elektron in einem Knoten des stehenden elektrischen Feldes bzw. in einem Bauch des stehenden Magnetfeldes ruht, d. h. $\tilde{\mathbf{p}}(t = 0) = 0$ und $\gamma(t = 0) = 1$ für $\mathbf{E}_{\text{st}} = 0$, $\mathbf{B}_{\text{st}} = \max$, wobei $k_0 z = (m + 1/2)\pi$, $m \in Z$, finden wir die analytische Lösung

$$p_x(t) = 0, p_y(t) = 0, p_z(t) = 0, \gamma(t) = 1. \quad (2.50)$$

Mit der Anfangsbedingung, daß das Elektron in einem Bauch des stehenden elektrischen Feldes bzw. in einem Knoten des stehenden Magnetfeldes ruht, d. h. $\tilde{\mathbf{p}}(t = 0) = 0$ und $\gamma(t = 0) = 1$ für $\mathbf{E}_{\text{st}} = \max$, $\mathbf{B}_{\text{st}} = 0$, wobei $k_0 z = m\pi$, $m \in Z$, finden wir die analytische Lösung

$$p_x(t) = -2a_0 m_e c \sin(\omega_0 t), p_y(t) = 0, p_z(t) = 0, \gamma(t) = \pm \sqrt{1 + 4a_0^2 \sin^2(\omega_0 t)}. \quad (2.51)$$

D. h. In einem Knoten des elektrischen Feldes wirkt auf das Elektron nur die magnetische

2 Theoretische Grundlagen

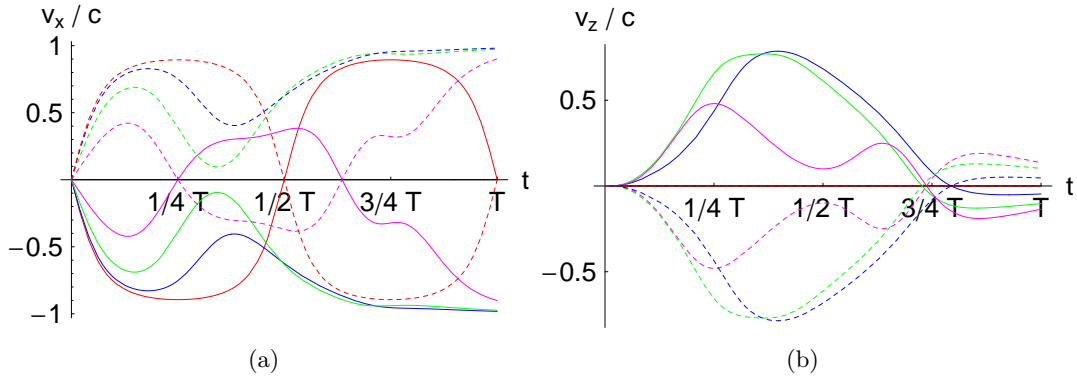


Abbildung 2.4: Geschwindigkeit eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (stehende Welle, Laborsystem). Die Geschwindigkeiten des Elektrons in Polarisations- (a) sowie in Ausbreitungsrichtung des Lasers (b) sind für den gerade relativistischen Fall $a_0 = 1$ aufgetragen. Die Mittenwellenlänge des Lasers ist $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, die Geschwindigkeiten sind in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit angegeben, und die Zeit läuft über eine Laserperiode. Jede Kurve gehört zu einer bestimmten Anfangsposition des Elektrons in der stehenden Welle: 0 (rot), $1/16\lambda_0$ (blau), $\lambda_0/8$ (grün), $3/16\lambda_0$ (rosa), $\lambda_0/2$ (schwarze Nulllinie), $5/16\lambda_0$ (rosa, gestrichelt), $3/8\lambda_0$ (grün, gestrichelt), $7/16$ (blau, gestrichelt) und $1/2\lambda_0$ (rot, gestrichelt). Ab $z_0 > 1/2\lambda_0$ wiederholen sich die Kurven: Die v_x -Kurven wiederholen sich symmetrisch zu $z_0 = \lambda_0/2$, d. h. $9/16\lambda_0 \hat{=} 7/16\lambda_0$, $5/8\lambda_0 \hat{=} 3/8\lambda_0$, $11/16\lambda_0 \hat{=} 5/16\lambda_0 \dots$, die v_z -Kurven wiederholen sich gemäß $z_0 \hat{=} z_0 + \lambda_0/2$, d. h. $9/16\lambda_0 \hat{=} 1/16\lambda_0$, $5/8\lambda_0 \hat{=} 1/8\lambda_0$, $11/16\lambda_0 \hat{=} 3/16\lambda_0 \dots$. Die schwarze Nulllinie bzw. die roten Kurven stimmen mit der analytischen Lösung in einem Knoten bzw. einem Bauch des stehenden elektrischen Feldes überein.

Kraft, daher bleibt das Elektron in Ruhe. In einem Knoten des Magnetfeldes wirkt auf das Elektron nur die elektrische Kraft, so daß das Elektron ausschließlich in x -Richtung oszilliert und keinen Impuls in z -Richtung aufnehmen kann! Wird das Elektron nicht in einem Knoten oder einem Bauch in der stehenden Welle geboren, so müssen wir die relativistischen Bewegungsgleichungen (2.46–2.49) numerisch lösen.

Im folgenden berechnen wir für verschiedene Anfangspositionen die Geschwindigkeiten, den Lorentzfaktor - wegen $E_{\text{kin}}(\gamma) = m_e c^2 (\gamma - 1)$ entspricht der Lorentzfaktor der kinetische Energie - und die Bahnkurve des Elektrons (s. Abb. 2.4, 2.5). Es ist schwierig, sich die Bahnkurve des Elektrons anschaulich vorzustellen. Es wirkt sowohl die elektrische als auch die magnetische Kraft. Die elektrische führt zu einer linearen Schwingung

2 Theoretische Grundlagen

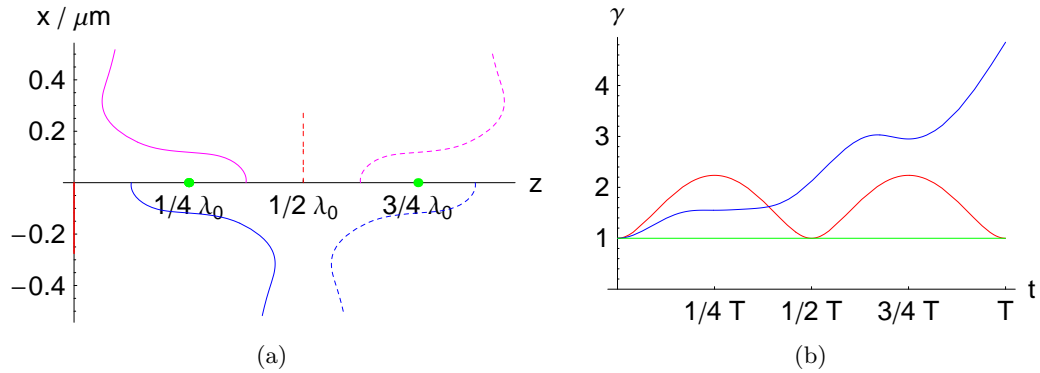


Abbildung 2.5: Bahnkurve und Lorentzfaktor eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (stehende Welle, Laborsystem). Die Bahnkurve und der Lorentzfaktor bzw. die kinetische Energie des Elektrons sind für den gerade relativistischen Fall $a_0 = 1$ aufgetragen. Die Mittenwellenlänge des Lasers ist $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, und die Zeit läuft über eine Laserperiode. Jede Kurve gehört zu einer bestimmten Anfangsposition des Elektrons in der stehenden Welle: 0 (rot), $\lambda_0/8$ (blau), $\lambda_0/4$ (grün), $3/8\lambda_0$ (rosa), $\lambda_0/2$ (rot, gestrichelt), $5/8\lambda_0$ (rosa, gestrichelt), $3/4\lambda_0$ (grün) und $7/8\lambda_0$ (blau, gestrichelt). a) In einem Knoten des stehenden elektrischen Feldes oszilliert das Elektron in Polarisationsrichtung (rote Linien). In einem Bauch des stehenden elektrischen Feldes bleibt es in Ruhe (grüne Punkte). Die blauen und rosa Kurven zeigen die komplizierte Bewegung des Elektrons, falls die Anfangsposition in einem Wendepunkt des stehenden elektrischen Feldes liegt. b) Die blaue Kurve zeigt, daß das Elektron, falls seine Bahn beispielsweise in einem Wendepunkt des stehenden elektrischen Feldes beginnt, während einer Laserperiode Energie aufnehmen kann. Die Beschleunigung des Elektrons führt zur Abstrahlung elektromagnetischer Wellen.

in x -Richtung, und die magnetische zu einer Kreisbewegung in der x, z -Ebene; die Überlagerung ist ziemlich kompliziert. Das wesentliche ist, daß das Elektron u. U. während einer Laserperiode Energie aufnehmen und beschleunigt werden kann. Dies führt zu einer meßbaren Abstrahlung elektromagnetischer Wellen in einer stehenden Welle. Für schwach relativistische Laserintensitäten, d. h. $a_0 \ll 1$, ist der Einfluß der magnetischen Kraft zu vernachlässigen, so daß das Elektron im wesentlichen in x -Richtung oszilliert und keine Ablenkung in der x, z -Ebene erfährt.

2.2 Relativistische Autokorrelation

Zur Bestimmung der Laserpulsdauer verwenden wir die relativistische Autokorrelation. Wir erklären zunächst das allgemeine Prinzip einer Autokorrelationsmessung [18]: Eine Autokorrelation beruht darauf, daß ein einfallender Laserstrahl in zwei Teilstrahlen aufgeteilt wird, welche anschließend in einem nichtlinearen Medium überlappen. Die Teilstrahlen können durch eine Veränderung ihrer optischen Wege in der Zeit gegeneinander verschoben werden. In dem nichtlinearen Medium muß ein nichtlinearer optischer Prozeß stattfinden, welcher ein detektierbares intensitätsabhängiges Signal erzeugt. Das Signal heißt Autokorrelationssignal, da der Laserpuls mit sich selbst in Wechselbeziehung tritt. Die beiden Teilstrahlen können kollinear (parallele Wellenvektoren) oder unter einem bestimmten Winkel zueinander durch das nichtlineare Medium propagieren. Im kollinearen Fall sprechen wir, falls es die räumliche Auflösung der Detektion erlaubt, von einer interferometrische Autokorrelation und im zweiten Fall von einer Intensitätsautokorrelation. In beiden Fällen handelt es sich jedoch um eine Einzelschuß-Autokorrelation (engl. : "single-shot autocorrelation"), bei welcher das Meßsignal von der Intensität und der zeitlichen Verzögerung zwischen den beiden Teilstrahlen abhängt. Ändern wir die zeitliche Verzögerung zwischen mehreren aufeinanderfolgenden Laserpulsen, so handelt es sich um eine Mehrschuß-Autokorrelation (engl. "multi-shot autocorrelation"). Es ist wesentlich, daß der nichtlineare optische Prozeß, der für die Autokorrelation ausgenutzt wird, instantan, d. h. innerhalb einer Zeitdauer, die sehr viel kürzer als die Laserpulsdauer ist, erfolgt.

Wir bezeichnen im folgenden $S(I^n)$ als Autokorrelationssignal n -ter Ordnung, wobei I die Laserintensität ist. Da wir im Gegensatz zu klassischen, konventionellen Autokorrelationstechniken relativistische Laserintensitäten einsetzen, sprechen wir von einer relativistischen Autokorrelation. Die Abstrahlung der intensitätsabhängigen zweiten Harmonischen ist unser nichtlinearer Prozeß. Wir berechnen die abgestrahlte Intensität der zweiten Harmonischen ($S_{2\omega}$) über die relativistische Bewegung eines freien Elektrons in

2 Theoretische Grundlagen

einem intensiven Laserfeld zweier gegenläufiger Laserpulse. Da das Elektron sofort auf das äußere Laserfeld reagiert, können wir den Prozeß als instantan ansehen.

Aus dem letzten Abschnitt kennen wir bereits die Bahnkurven eines freien Elektrons in einer laufenden und einer stehenden Welle. Aus der Bahnkurve erhalten wir ganz allgemein, indem wir zweimal zeitlich ableiten, die abgetrahlte Intensität, die proportional zum Quadrat der Beschleunigung einer bewegten Ladung ist. Da die Abstrahlung der zweiten Harmonischen aus der Bewegung in z -Richtung resultiert, gilt $S_{2\omega} \sim \ddot{z}^2$. Bei der Herleitung der Bahnkurven haben wir zur Vereinfachung ebene, kontinuierliche Wellen vorausgesetzt. Nun beschreiben wir unsere realen Laserpulse jedoch durch eine Faltung von Gauß'schen Strahlen und Gauß'schen Pulsen beschreiben. Dazu ersetzen wir die ebenen Wellen durch Gauß'sche Strahlen und die kontinuierliche Wellen durch Gauß'sche Pulse von endlicher Zeitdauer ersetzen.

Überlagern wir zwei gegenläufige Laserpulse mit Gauß'schem Intensitätsprofil und berücksichtigen zusätzlich, daß die Laserpulse in Raum und Zeit gegeneinander verschoben sein können, so gestaltet sich die vollständige Lösung der relativistischen Bewegungsgleichungen als sehr schwierig. Daher gehen wir zu einer störungstheoretischen Beschreibung über, welche für schwach relativistische Laserintensitäten, d. h. für $a_0 \lesssim \sqrt{2}$, gültig ist. Für den relativistischen Parameter $a_0 = 1.2$ aus unseren Experimenten ist dies gerechtfertigt. Außerdem überprüfen wir, ob unsere vollständige Beschreibung für niedrigere Laserintensitäten auch wirklich in die störungstheoretische übergeht. Schließlich berechnen wir in störungstheoretischer Näherung das relativistische Autokorrelationssignal. Wir werden feststellen, daß es sich um ein Autokorrelationssignal zweiter Ordnung in der Intensität handelt, d. h. $S_{2\omega}(I^2)$.

2.2.1 Überlagerung gegenläufiger Laserpulse

Wir gehen von der Wellengleichung im Vakuum aus. Die Wellengleichung beschreibt allgemein die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Raum und Zeit. Sie lautet [25, 26]

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}^\pm = 0, \quad (2.52)$$

wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit und $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ der Laplace-Operator sind. Lösen wir die Wellengleichung in paraxialer Näherung [25, 26]

$$2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \gg \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.53)$$

2 Theoretische Grundlagen

wobei $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ die Wellenzahl ist, so erhalten wir nach rechts und nach links laufenden Gauß'sche Strahlen (s. Anh. 6.15)

$$\mathbf{E}^\pm(r, z, t) = \frac{E_0 W_0}{W(z)} \exp(-q_\pm(z) r^2) \exp(i\tilde{\varphi}_\pm(z)) \exp(i\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.54)$$

wobei

$$z_0 = \frac{\pi W_0^2}{\lambda_0} \quad (2.55)$$

die Rayleighlänge,

$$r = (x^2 + y^2) \quad (2.56)$$

der radiale Abstand von der optischen Achse,

$$q_\pm(z) = \frac{1}{W^2} \pm \frac{ik_0}{2|R|} \quad (2.57)$$

der q -Parameter⁴,

$$W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right] \quad (2.58)$$

die Strahlbreite,

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \quad (2.59)$$

die Krümmung,

$$\tilde{\varphi}_\pm(z) = \mp k_0 z \pm |\tan^{-1}(z/z_0)| \quad (2.60)$$

die Phase und W_0 die Tailenbreite, d. h. die minimale Strahlbreite, sind. Die Intensität eines einzelnen Gauß'schen Strahles (Gauß'sche TEM₀₀-Mode, Abk. : "Gauß'sche transversal elektromagnetische Nullmode") berechnen wir über das Betragsquadrat der Feldstärke

$$\begin{aligned} I(r, z) &\sim |\mathbf{E}^\pm(r, z, t)| \\ &= \left(\frac{E_0 W_0}{W(z)} \right)^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{W(z)^2} \right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

⁴Dieser q -Parameter unterscheidet sich von dem $q_{1/e}$ -Parameter aus Kap. 6.11!

2 Theoretische Grundlagen

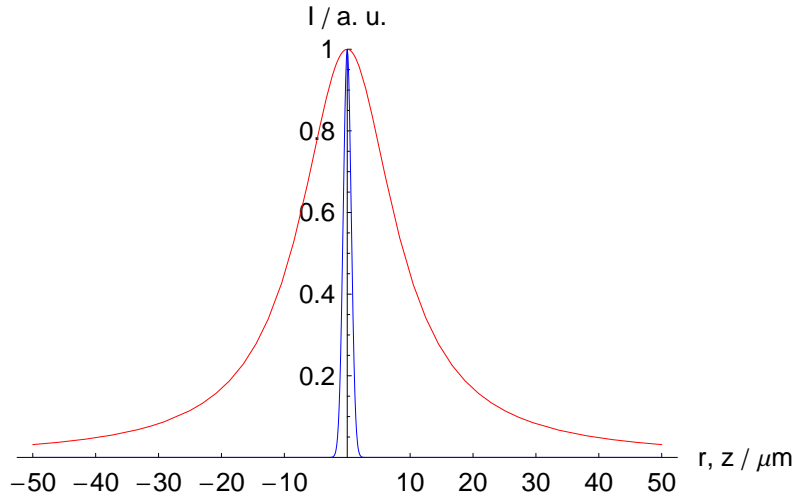


Abbildung 2.6: Longitudinales und transversales Intensitätsprofil eines einzelnen Laserpulses. Longitudinales Lorentzprofil (rot) und transversales Gauß'sches Intensitätsprofil (blau) in Abhängigkeit des radialen Abstandes (r) bzw. des longitudinalen Abstandes (z). Die Rayleighlänge beträgt $z_0 = 9 \mu\text{m}$, die Tailenbreite $W_0 = 1.26 \mu\text{m}$ und die Anfangsintensität $I_0 = 1$ (a. u.). Das longitudinale Intensitätsprofil (Lorentzkurve, rot) nimmt viel schneller ab als das transversale Intensitätsprofil (Gauß'sche Kurve, blau). In transversale Richtung verschwindet die Intensität bereits nach wenigen Mikrometern ($< 10 \mu\text{m}$).

Für die z -Abhängigkeit auf der optischen Achse, d. h. für $r^2 = 0$, erhalten wir

$$I_z \sim \frac{I_0}{1 + z^2/z_0^2} \quad (2.62)$$

und für die r -Abhängigkeit in der x, y -Ebene, die durch den Fokus bei $z = 0$ geht, ergibt sich

$$I_r \sim I_0 \exp\left(-2\frac{r^2}{W_0^2}\right). \quad (2.63)$$

Im ersten Fall handelt es sich um ein Lorentz- und im zweiten Fall um ein Gauß'sches Intensitätsprofil. Das Gauß'sche Intensitätsprofil fällt viel schneller ab als das Lorentzprofil (s. Abb. 2.6). Superposition der nach rechts und der nach links laufenden Felder

2 Theoretische Grundlagen

liefert weiterhin die stehenden elektrischen und die magnetischen Felder (s. Anh. 6.6)

$$E_{\text{st},x} = 2 \frac{E_0 W_0}{W} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right) \cos(\omega_0 t) \cos(A) \quad (2.64)$$

$$B_{\text{st},y} = -2 \frac{E_0 W_0}{cW} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right) \sin(\omega_0 t) \times \quad (2.65)$$

$$\times [B \sin(A) - C \cos(A)] \quad (2.66)$$

mit den Abkürzungen

$$A = \frac{k_0 r^2}{2R} + k_0 z - \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (2.67)$$

$$B = -1 + \frac{r^2}{2R^2} - \frac{r^2 z_0^2}{2R^2 z^2} + \frac{W_0^2}{k_0 z_0 W^2} \quad (2.68)$$

$$C = \frac{W_0^2 z}{k_0 z_0^2 W^2} \left(1 - \frac{2r^2}{W^2}\right). \quad (2.69)$$

Die Momentaufnahmen des stehenden elektrischen Feldes sind immer symmetrisch zur Ordinate und die des stehenden Magnetfeldes antisymmetrisch zum Ursprung (s. Abb. 2.7). Die Intensität des stehenden Laserfeldes berechnen wir über $I \sim EE^*$; es folgt

$$I_{\text{st}}(r, z) \sim 4 \left(\frac{E_0 W_0}{W(z)}\right)^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{W(z)^2}\right) \cos^2(A) \quad (2.70)$$

und im Fokus

$$I_{\text{st}}(r, z)|_{r^2=0, z=0} = 4E_0^2. \quad (2.71)$$

D. h. In z -Richtung entstehen Intensitätsminima und -maxima entlang der optischen Achse (s. Abb. 2.8). Die Intensität in einer stehenden Welle ist im Fokus ($z = 0, r^2 = 0$) vier Mal so groß wie die Intensität einer laufenden Welle. Aufgrund des Gauß'schen Strahlprofils nimmt die Einhüllende der Laserintensität mit größer werdendem Abstand vom Fokus ab

$$\lim_{r, z \rightarrow \infty} I(r, z) = 0. \quad (2.72)$$

In einem linearen Medium lautet die Wellengleichung [25, 26]

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E}^\pm(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^L(\mathbf{r}, t), \quad (2.73)$$

2 Theoretische Grundlagen

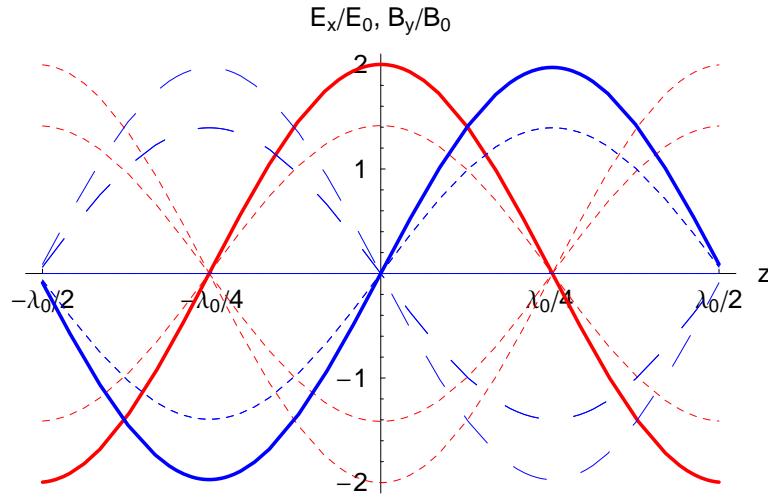
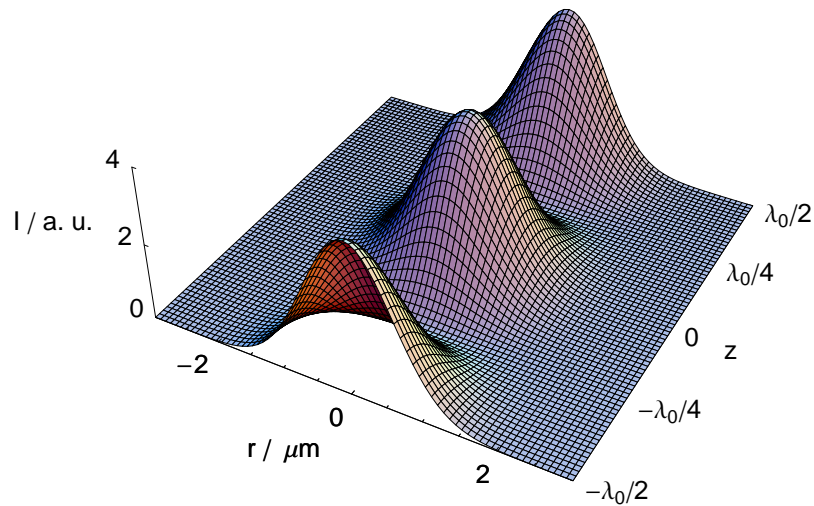


Abbildung 2.7: Stehendes Laserfeld. Stehendes elektrisches Feld (rot) und Magnetfeld (blau) als Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen auf der optischen Achse ($r^2 = 0$). Die Mittenwellenlänge des Lasers ist $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, die Tailenbreite $W_0 = 1.26 \mu\text{m}$ und die Rayleighlänge $z_0 = 9 \mu\text{m}$; wegen $z \lesssim |\lambda_0/2|$ liegen die Felder in der Nähe des Fokus. Sie sind um $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ gegeneinander phasenverschoben und in Einheiten ihrer Amplituden E_0 bzw. $B_0 = E_0/c$ aufgetragen. Die dicken Kurven gehören zu den Zeitpunkten $t = 0$ bzw. $t = T/4$, bei denen das stehende elektrische Feld ($\sim \cos\omega_0 t$) bzw. das stehende Magnetfeld ($\sim \sin\omega_0 t$) maximale Auslenkung besitzen. Die gestrichelten Kurven repräsentieren Momentaufnahmen zu verschiedenen Zeitpunkten während einer Laserperiode T . Es ist eine räumlich feste Struktur mit Knoten und Bäuchen erkennbar. Für verschiedene Zeiten schwanken die Felder zwischen den Knoten auf und ab. Die Momentaufnahmen des elektrischen Feldes sind immer symmetrisch zur Ordinate und die des Magnetfeldes antisymmetrisch zum Ursprung. Das stehende Magnetfeld verschwindet im Fokus ($z = 0$) für alle Zeiten.



(a)

Abbildung 2.8: Intensität eines stehenden Laserfeldes. Intensität eines stehenden Laserfeldes als Überlagerung der elektrischen Felder zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen. Die Mittenwellenlänge des Lasers ist $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, die Taillenbreite $W_0 = 1.26 \mu\text{m}$ und die Rayleighlänge $z_0 = 9 \mu\text{m}$. Entlang der optischen Achse entstehen Intensitätsminima und Intensitätsmaxima. Im Fokus entsteht sowohl in Richtung der optischen Achse als auch senkrecht dazu ein Intensitätsgradient, der in Richtung des Fokus' zeigt (der Gradient zeigt allgemein in Richtung des steilsten Anstiegs). In Fokussnähe $z \lesssim |\lambda_0/2|$ sind alle Intensitätsmaxima gleich hoch. Die Intensität einer stehenden Welle ist im Fokus vier mal so hoch wie in einer laufenden Welle.

2 Theoretische Grundlagen

wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit, μ_0 die magnetische Feldkonstante, $\chi(\omega)$ die Suszeptibilität und $\bar{\mathbf{P}}^{\pm}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}^{\pm}(\mathbf{r}, \omega)$ die lineare Polarisation im Frequenzraum sind. In Näherung einer langsam veränderlichen Einhüllenden der komplexen elektrischen Feldstärke $\tilde{E}(t)$, der sog. SVEA (engl. : "slowly varying envelope approximation") [25, 26]

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}(t) \ll \omega_0 \tilde{E}(t), \quad (2.74)$$

erhalten wir als Lösungen von Gl. 2.73 nach rechts und nach linkslaufenden Gauß'sche Pulse (s. Anh. 6.16)

$$\begin{aligned} E_x^{\pm}(\eta^{\pm}, z) &= E_0 \exp \left[- \left(1 + i \frac{y^{\pm}(z)}{x} \right) \left(\frac{\eta^{\pm}}{\tau_g^{\pm}(z)} \right)^2 \right] \times \\ &\times \exp [i(\omega_0 t \mp k_0 z)] \end{aligned} \quad (2.75)$$

mit den Abkürzungen

$$\eta^{\pm} = t \mp \frac{z}{v_g} \quad (2.76)$$

$$x = \frac{\tau_{g0}^2}{4(1+a^2)} \quad (2.77)$$

$$y^{\pm}(z) = \frac{a\tau_{g0}^2}{4(1+a^2)} \mp \frac{\tilde{D}z}{2}. \quad (2.78)$$

Die Pulsdauer ist gegeben durch

$$\tau_g^{\pm}(z) = \sqrt{\frac{4}{x} (x^2 + y^{\pm 2}(z))}, \quad (2.79)$$

wobei v_g die Gruppengeschwindigkeit, a der Chirp-Parameter (engl. : "to chirp", dtsh. : "zwitschern") und \tilde{D} die Gruppengeschwindigkeitsdispersion (sog. GVD: engl. "group velocity dispersion") der Laserpulse sind. Die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g^{-1} = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \right) \quad (2.80)$$

sowie die GVD

$$\tilde{D} = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big| \quad (2.81)$$

2 Theoretische Grundlagen

sind über Ableitungen der Dispersionsrelation definiert. Wir gehen von dem zeitabhängigen Teil unserer Gauß'schen Pulse aus

$$E(t) = E_0 \exp \left[- (1 + ia) \frac{t^2}{\tau_{g0}^2} \right] \exp(i\omega_0 t) \quad (2.82)$$

wobei $\Delta\omega_{\text{puls}} = \sqrt{8 \ln 2 (1 + a^2)} / \tau_{g0}$ die FWHM-Halbwertsbreite (engl. : "full width at half maximum") der Winkelfrequenz ist, und berechnen die instantane Frequenz. Diese ergibt sich aus der Ableitung der Phase nach der Zeit, d. h. $\omega(t) = d\Phi/dt$. Differentiation der Phase

$$\Phi(t) = -a (t/\tau_{g0})^2 + \omega_0 t \quad (2.83)$$

liefert

$$\omega(t) = \omega_0 - 2at/\tau_{g0}^2. \quad (2.84)$$

Die instantane Frequenz steigt für negativen Chirp-Parameter (sog. "Up-Chirp") und fällt für positiven Chirp-Parameter (sog. "Down-Chirp"). Anschaulich ausgedrückt: Läuft ein Laserpuls mit Up-Chirp bzw. Down-Chirp auf uns zu, so wird das Zwitschern höher bzw. tiefer.

Die SVEA ist erfüllt, falls $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ gilt, wobei $\Delta\omega$ die spektrale Bandbreite und ω_0 die Mittenfrequenz des Lasers sind. Sie besagt, daß Änderungen der Feldeinhüllenden $\tilde{E}(t)$ innerhalb einer Laserperiode $T = 2\pi/\omega_0$ klein sein müssen. Die FWHM-Pulsdauer ist durch $\tau_p = \sqrt{2 \ln 2} \tau_{g0}$ gegeben⁵. Wir können die SVEA auch schreiben als $\tau_p \gg 1/\omega_0$; für unsere Pulsdauer ($\tau_p = 84$ fs, s. Kap. 4.1) und die Mittenfrequenz des Lasers ($\omega_0 = 2 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$), ist die Bedingung erfüllt.

Falten wir schließlich den räumlichen Anteil der idealen Gauß'schen Strahlen (2.54) und den zeitlichen Anteil der idealen Gauß'schen Pulse ohne Chirp (2.82), so erhalten wir für die nach links und nach rechts laufenden Laserpulse

$$E_x^\pm(r, z, t) = \frac{E_0 W_0}{W(z)} \exp(-q_\pm r^2) \exp(i\tilde{\varphi}_\pm) \exp \left[-\frac{t^2}{\tau_{g0}^2} \right], \quad (2.85)$$

wobei E_0 die Amplitude der Laserfeldstärke ist. Für das räumlich *und* zeitlich abhängige

⁵Diese FWHM-Pulsdauer ist über die Feldeinhüllende der elektrischen Feldstärke und nicht über die Intensitätseinhüllende definiert. Bei der Auswertung der Experimente gehen wir stets von der Einhüllenden der Intensität aus. Es gelten daher andere Beziehungen (s. Anh. 6).

2 Theoretische Grundlagen

elektrische Feld unseres von links kommenden Laserpulses gilt somit

$$\begin{aligned}
 E_L(r, z, t) &= \frac{E_{0L}W_0}{W(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2(z)}\right) \times \exp\left(-i\frac{k_0r^2}{2R(z)}\right) \times \\
 &\times \exp\left[-\left(\frac{t-z/c}{\tau_L}\right)^2\right] \exp\left[i\left(\omega_0t - k_0z + \eta(z)\right)\right] \quad (2.86)
 \end{aligned}$$

mit der Abkürzungen

$$W^2(z) = W_0^2\left(1 + (z/z_0)^2\right) \quad (2.87)$$

$$R(z) = z\left(1 + (z_0/z)^2\right) \quad (2.88)$$

$$\eta(z) = -\tan^{-1}(z/z_0). \quad (2.89)$$

Berücksichtigen wir, daß durch unterschiedliche optische Weglängen, d. h. durch einen Gangunterschied Δx , der beiden gegenläufigen Laserpulse eine Laufzeitverschiebung $\Delta\tau$ eintritt, und der Fokus nicht bei Null, sondern bei $z_1 \neq 0$ sitzt, so ergibt sich für das elektrische Feld des von rechts kommenden Laserpulses

$$\begin{aligned}
 E_R(r, z - z_1, t - \Delta\tau) &= \frac{E_{0R}W_0}{W(z - z_1)} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2(z - z_1)}\right) \exp\left(i\frac{kr^2}{2R(z - z_1)}\right) \times \\
 &\times \exp\left[-\left(\frac{t + (z - z_1)/c - \Delta\tau}{\tau_L}\right)^2\right] \times \\
 &\times \exp\left[i\left(\omega(t - \Delta\tau) + k(z - z_1) - \eta(z - z_1)\right)\right]. \quad (2.90)
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen E_{0L} bzw. E_{0R} die Amplituden der von links bzw. der von rechts kommenden elektrischen Laserfelder. Überlagerung der elektrischen Felder liefert schließlich

$$E_{\text{ges}}(r, z, t, z_1, \Delta\tau) = E_L(r, z, t) + E_R(r, z - z_1, t - \Delta\tau). \quad (2.91)$$

2.2.2 Abstrahlung der zweiten Harmonischen

Nehmen wir an, daß der Einfluß des Magnetfeldes schwach ist, und sich das Elektron im wesentlichen in x -Richtung bewegt (schwach relativistischer Fall), so dürfen wir den

2 Theoretische Grundlagen

Lorentzfaktor schreiben als [27]

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{r}}/c)^2}} \approx (1 - \langle \dot{x}^2 \rangle / c^2)^{-1/2} = \text{const.} \quad (2.92)$$

In diesem Fall vereinfachen sich die relativistischen Bewegungsgleichungen (2.14) zu

$$\gamma m_e \frac{d^2 \mathbf{r}^2}{dt^2} = -e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}). \quad (2.93)$$

Berechnen wir das Kreuzprodukt $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = (-\dot{z}B_y, 0, \dot{x}B_y)$, so erhalten wir das vereinfachte Differentialgleichungssystem

$$\gamma m_e \ddot{x} = -eE_x + e\dot{z}B_y \quad (2.94)$$

$$\gamma m_e \ddot{y} = 0 \quad (2.95)$$

$$\gamma m_e \ddot{z} = -e\dot{x}B_y. \quad (2.96)$$

Setzen wir zur Vereinfachung der Rechnung die elektrischen und magnetischen Felder einer *Schwingung* ein

$$E_x = E_0 \cos(\omega_0 t) \quad (2.97)$$

$$B_y = \frac{E_0}{c} \sin(\omega_0 t), \quad (2.98)$$

und vernachlässigen wir weiterhin den Faktor \dot{z}/c - die die Geschwindigkeit in z -Richtung ist wegen des schwachen Magnetfeldes klein -, so ergibt sich

$$\gamma m_e \ddot{x} = -eE_0 \cos(\omega_0 t) \quad (2.99)$$

$$\gamma m_e \ddot{y} = 0 \quad (2.100)$$

$$\gamma m_e \ddot{z} = -e \frac{\dot{x}}{c} E_0 \cos(\omega_0 t). \quad (2.101)$$

In nullter Ordnung Störungstheorie erhalten wir die Beschleunigung und nach zeitlicher Integration mit der Anfangsbedingung $\dot{x}(t=0) = 0$ die Geschwindigkeit in x -Richtung

$$\ddot{x}^{(0)} = -\frac{e}{\gamma m_e} E_0 \cos(\omega_0 t) \rightarrow \dot{x}^{(0)} = -\frac{a_0 c}{\gamma} \sin(\omega_0 t). \quad (2.102)$$

2 Theoretische Grundlagen

Setzen wir dies in den konstanten Lorentzfaktor (2.92) ein

$$\gamma \approx \left(1 - \langle \dot{x}^{(0)2} \rangle / c^2 \right)^{-1/2}, \quad (2.103)$$

so folgt eine nützliche Relation zwischen dem Lorentzfaktor und dem relativistischen Parameter

$$\gamma \approx \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{2}}. \quad (2.104)$$

Der Vergleich mit dem exakten Ausdruck - wobei wir noch über eine Laserperiode zeitlich mitteln -

$$\langle \gamma(\phi^+) \rangle = \left\langle 1 + \frac{1}{2} a_0^2 \sin^2 \phi^+ \right\rangle = 1 + \frac{1}{4} a_0^2 \quad (2.105)$$

zeigt, daß beide Formeln für schwach relativistische Intensitäten, d. h. für $a_0 \lesssim \sqrt{2}$, gut übereinstimmen und näherungsweise konstant sind (s. Abb. 2.9). Über (2.101) bekommen wir schließlich in erster Ordnung Störungstheorie die Beschleunigung in z -Richtung

$$\ddot{z}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{a_0^2 c \omega_0}{\gamma^2} \sin(2\phi^+). \quad (2.106)$$

Außerdem lösen wir die implizite Gleichung für die z -Komponente der "Achterbahn" (2.40) nach z auf

$$z = -\frac{1}{2} a_0^2 \frac{c}{\omega_0} \frac{\sin(2\phi^+(z, t))}{\sqrt{16 + 8a_0^2}} \rightsquigarrow z(t) \quad (2.107)$$

und setzen

$$\sin(k_0 z) \approx k_0 z, \quad \cos(k_0 z) \approx 1. \quad (2.108)$$

Dies ist erlaubt, da die z -Auslenkung der Achterbahn klein ($z \simeq 1/100 \mu\text{m}$, s. Abb. 6.3) und somit bei einer Mittenwellenlänge des Lasers von $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ die Winkel $k_0 z \ll 1$ klein bleiben.

Leiten wir diesen Ausdruck für $z(t)$, welchen wir der besseren Übersicht wegen hier nicht anführen, zweimal zeitlich ab, so erhalten wir die Beschleunigung $\ddot{z}^{(\text{exakt})}$, die wir mit der Beschleunigung $\ddot{z}^{(1)}$ in erster Ordnung Störungstheorie (2.106) vergleichen (s. Abb. 2.10). Für hohe Laserintensitäten $a_0 \gg 1$ weichen die Beschleunigungen voneinander ab, nähern sich aber für niedrigere Laserintensitäten immer weiter an. Für schwach relativistischen Laserintensitäten, d. h. $\gamma \lesssim 1.5$ (s. Abb. 2.9), ist die störungstheoretische Berechnung der Beschleunigung daher sinnvoll. Wir wollen nun konkret die abgestrahlte Intensität der zweiten Harmonischen berechnen. Dazu gehen wir von der Beschleunigung

2 Theoretische Grundlagen

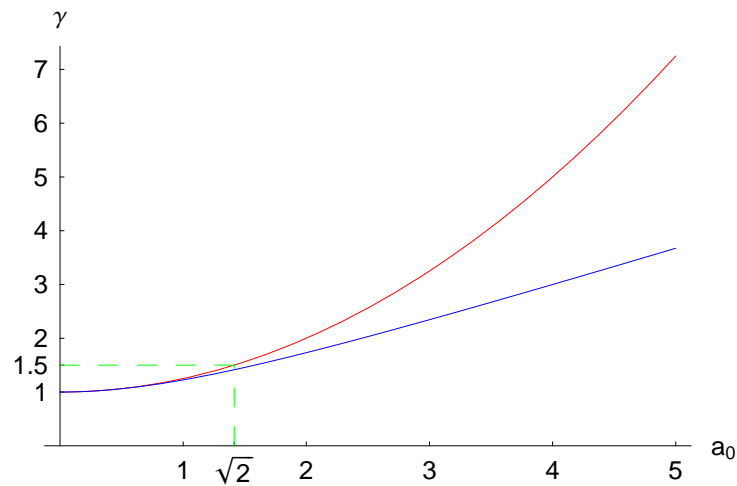


Abbildung 2.9: Exakter Lorentzfaktor und Lorentzfaktor in Störungstheorie. Der exakte, zeitlich gemittelte Lorentzfaktor (rot) und der Lorentzfaktor in Störungstheorie (blau) sind gegen die Laserintensität aufgetragen. Innerhalb des Bereichs $a_0 \lesssim \sqrt{2}$ (links der grün gestrichelten, senkrechten Linie), d. h. für schwach relativistische Intensitäten, stimmen beide Lorentzfaktoren näherungsweise überein und bleiben näherungsweise konstant: $\gamma < 1.5$ (unterhalb der grün gestrichelten, waagrechten Linie). Für hohe Laserintensitäten weichen die verschiedenen Lorentzfaktoren (rote und blaue Kurven für große a_0) voneinander ab. Daher ist eine störungstheoretische Beschreibung nur für den schwach relativistischen Bereich $a_0 \lesssim \sqrt{2}$ geeignet.

2 Theoretische Grundlagen

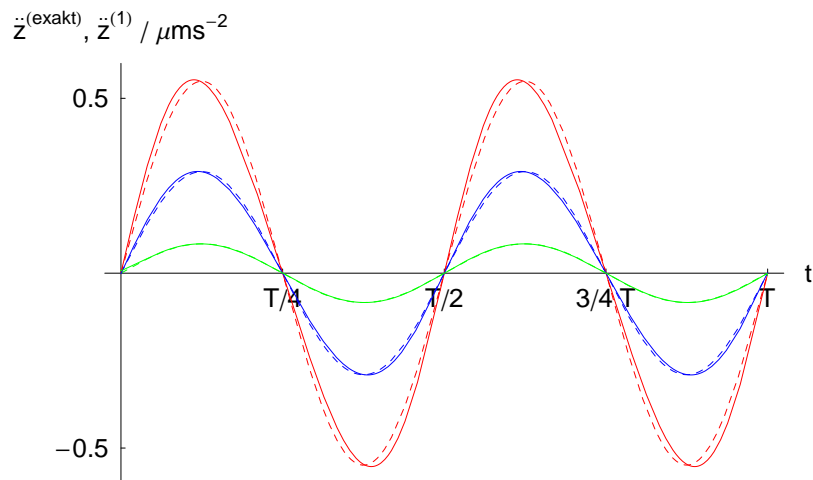


Abbildung 2.10: Exakte Beschleunigung und Beschleunigung in erster Ordnung Störungstheorie im Vergleich. Die exakte Beschleunigung (durchgezogene Kurven) und die Beschleunigung in erster Ordnung Störungstheorie (gestrichelte Kurven) sind für verschiedene Laserintensitäten $a_0 = 1.5$ (rot), $a_0 = 1$ (blau) und $a_0 = 0.5$ (grün) aufgetragen. Die Mittellängewellenlänge des Lasers ist $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, und die Zeit läuft über eine Laserperiode $T = 2.65 \text{ fs}$. Die exakten und die störungstheoretischen Kurven liegen bei hohen Laserintensitäten auseinander. Für niedrigere Intensitäten nähern sich die Kurven einander an und liegen schließlich übereinander (z. B. die gestrichelte grüne und die durchgezogene grüne Kurve). Die störungstheoretische Berechnung der Beschleunigung ist daher für schwach relativistische Intensitäten sinnvoll.

2 Theoretische Grundlagen

in nullter Ordnung Störungstheorie in x -Richtung (2.102) aus

$$\ddot{x}^{(0)} = -\frac{e}{\gamma m_e} E(t) \quad (2.109)$$

und integrieren mit der Anfangsbedingung, daß sich das Elektron zum Zeitpunkt $t = -\infty$ im Maximum des zeitabhängigen elektrischen Feldes $E(t)$ befindet, d. h. $\dot{x}(t = -\infty) = 0$, $x(t = -\infty) = 0$, $\dot{z}(t = -\infty) = 0$ und $z(t = -\infty) = 0$,

$$\dot{x}^{(0)} = -\frac{e}{\gamma m_e} \int_{-\infty}^t E(t') dt'. \quad (2.110)$$

Setzen wir dies in (2.101) ein, so erhalten wir für die Beschleunigung in erster Ordnung Störungstheorie in z -Richtung

$$\ddot{z}^{(1)} = \frac{e^2}{\gamma^2 m_e^2 c} E(t) \int_{-\infty}^t E(t') dt'. \quad (2.111)$$

Die durch Störungsreihenentwicklung vernachlässigten Korrekturen liegen bei ca. 1 %, also im unteren Prozentbereich (s. Anh. 6.12). Da die obige Beziehung (2.111) unabhängig von der Gestalt des elektrischen Feldes $E(t)$ ist, gilt sie sowohl für laufende als auch für stehende Wellen. Das abgestrahlte elektrische Feld eines einzelnen Elektrons lautet allgemein [23]

$$|E_T(\rho, \vartheta, t)| = \frac{e\ddot{z}(t - \rho/c) \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 c^2 \rho}, \quad (2.112)$$

wobei ρ der Beobachtungsabstand und ϑ der -winkel sind. Da wir unter einem Winkel von $\vartheta \approx 90^\circ$ beobachten (s. Abb. 4.19), d. h. $\sin \vartheta \approx 1$, folgt $\rho = \text{const.}$ Setzen wir (2.111) in (2.112) ein, so ergibt sich für das Betragquadrat der Feldstärke

$$|E_T|^2 = \frac{e^2 r_e^2}{m_e^2 c^2 \gamma^4 \rho^2} \left| E(t) \int_{-\infty}^t E(t') dt' \right|^2, \quad (2.113)$$

wobei $r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$ der klassische Elektronenradius ist. Die abgestrahlte Intensität der zweiten Harmonischen lautet somit

$$\begin{aligned} I_{2\omega} &\sim \epsilon_0 c |E_T|^2 \\ &= \frac{\epsilon_0 c e^2 r_e^2}{m_e^2 c^2 \gamma^4 \rho^2} \left| E(t) \int_{-\infty}^t E(t') dt' \right|^2. \end{aligned} \quad (2.114)$$

2.2.3 Räumlich gemittelttes Autokorrelationssignal

Aus dem vorigen Unterabschnitt kennen wir die abgestrahlte Intensität der zweiten Harmonischen ($I_{2\omega}$). Für die auf unsere (zeitintegrierende!) CCD-Kamera (engl. : "charged coupled device") auftreffende Energie erhalten wir damit (s. Abb. 4.19) [19]

$$S_{2\omega}(\Delta\tau, z, z_1) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \left| E(t) \int_{-\infty}^t E(t') dt' \right|^2 dt \quad (2.115)$$

Wenn die Einhüllende des elektrischen Feldes $E(t)$ hinreichend langsam veränderlich und für $t \rightarrow -\infty$ gegen Null geht, dann gilt allgemein die mathematische Beziehung

$$\int_{-\infty}^t E(t') dt' = \frac{1}{i\omega} E(t). \quad (2.116)$$

Mit ihr ergibt sich für das Meßsignal

$$S_{2\omega}(\Delta\tau, z, z_1) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} |E^2(t)|^2 dt \quad (2.117)$$

$$\sim \int_{-\infty}^{+\infty} I^2(t) dt. \quad (2.118)$$

Wegen

$$S_{2\omega} \sim \int_{-\infty}^{+\infty} I^2(t) dt \quad (2.119)$$

handelt es sich um ein intensitätsabhängiges Signal zweiter Ordnung!

Wir berechnen nun

$$S_{2\omega}(\Delta\tau, z, z_1) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} |E^2(t)|^2 dt, \quad (2.120)$$

wobei sich das elektrische Feld aus der Summe der Felder des von links und des von rechts kommenden Laserpulses $E_{\text{ges}}(\Delta\tau, r, z, z_1 t)$ zusammensetzt. Da unsere Abbildung eine räumliche Auflösung von etwa $5 \mu\text{m}$ besitzt (s. Kap. 4.3), ist die Autokorrelationsmessung nicht interferometrisch! Für den Integranden aus (2.120) erhalten wir daher unter Vernachlässigung der räumlich schnell oszillierenden Anteile (s. Anh. 6.12)

$$\begin{aligned} J_I &= \left| (E_L + E_R)^2 \right|^2 \\ &= |E_L^2|^2 + |E_R^2|^2 + 4 |E_R|^2 |E_L|^2. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Weiterhin setzen wir die Felder (2.86) und (2.90) in den Integranden ein und berechnen

2 Theoretische Grundlagen

das (über das Volumen integrierte!) Signal

$$S_{2\omega}(\Delta\tau, z, z_1) \sim \int_0^\infty 2\pi r dr \int_{-\infty}^{+\infty} J_I dt. \quad (2.122)$$

Für das Meßsignal erhalten wir schließlich (s. Anh. 6.12)

$$S_{2\omega}(z, z_1, \Delta\tau) \sim \frac{I_{0L}^2}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} + \frac{I_{0R}^2}{1 + \left(\frac{z-z_1}{z_0}\right)^2} + \frac{4I_{0L}I_{0R}}{1 + \left(\frac{z-z_1/2}{z_0}\right)^2 + \frac{z_1^2}{4z_0^2}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{4}{\tau_L^2} \left(\frac{z - z_1/2}{c} - \frac{\Delta\tau}{2} \right)^2 \right], \quad (2.123)$$

wobei I_{0L} bzw. I_{0R} die Intensitäten des von links bzw. des von rechts kommenden Laserpulses sind. Im Anhang diskutieren wir die Funktion $S_{2\omega}(z, z_1, \Delta\tau)$ genauer (s. Anh. 6.12). Wir passen obigen Ausdruck für das Meßsignal an die experimentelle Kurven an, um Werte für die Rayleighlänge (z_0) und die Pulsdauer (τ_L) zu ermitteln (s. Kap. 4.4).

2.3 Laser-Plasma

Ein Plasma ist ganz allgemein eine gasförmige Ansammlung neutraler und geladener Teilchen (Elektronen, Ionen, Atome und Moleküle), die aufgrund ihrer Ladungen untereinander wechselwirken und sich in starken elektromagnetischen Feldern aufhalten. In unserem Fall erzeugen wir das Plasma dadurch, daß wir Laserpulse mit relativistischer Intensität in einen Helium-Gasstrahl fokussieren (s. Abb. 3.4). Das Laserfeld reißt die Elektronen aus ihren Bahnen heraus. Sie sind nicht mehr an ihre Kerne gebunden, sondern frei; das Heliumgas wird ionisiert. Die Ionisation geschieht ab Laserintensitäten von $I_{\text{ion}} \gtrsim 10^{14} \text{ W/cm}^2$ (vgl. relativistische Laserintensität: $I_{\text{rel}} \simeq 10^{18} \text{ W/cm}^2$).

Zur Abschätzung dieser oberen Grenze für die Laserintensität, bei welcher die Ionisation einsetzt, gehen wir von dem einfachen Modell der Feldionisation aus [28]: Wir betrachten dazu ein Atom im Laserfeld. Die Umlaufzeit des Elektrons auf der ersten Bohr'schen Bahn beträgt $T_a = 2\pi a_B / c\alpha \approx 1.4 \times 10^{-16} \text{ s}$, wobei $\alpha \approx 1/137$ die Feinstrukturkonstante ist. Da bei einer Mittenwellenlänge des Lasers $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ die Laserperiode $T_0 = 2.7 \times 10^{-15} \text{ fs} \approx 20T_a$ beträgt, wirkt das optische Laserfeld näherungsweise wie in statisches Feld auf das Atom. Durch das optische Laserfeld wird das Atompotential abgesenkt. Das effektive Atompotential ergibt sich aus der Summe des Coulombpotentials $V_c = -Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$, wobei Z die Kernladungszahl und r der Abstand vom Kern ist, und

2 Theoretische Grundlagen

des Laserpotentials $V_L = -E_L r$ zu

$$V_{\text{eff}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E_L r. \quad (2.124)$$

Das effektive Potential ist maximal bei $V_{\text{max}} = V_{\text{eff}}(r_{\text{max}})$. Ist die Ionisationsenergie eines Wasserstoffatoms $|V_H| = Z^2 e^2 / 8\pi\epsilon_0 a_B$ so groß wie das maximale effektive Potential $|V_{\text{max}}|$, so tritt Ionisation auf. Daraus ergibt sich schließlich das optische Laserfeld

$$E_{\text{ion, feld}} = \frac{Z^3}{16} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_B^2} = \frac{Z^3}{16} E_{\text{at}}, \quad (2.125)$$

wobei $E_{\text{at}} = e/4\pi\epsilon_0 a_B^2$ das atomare elektrische Feld und a_B der Bohr'sche Radius sind, welches wir benötigen, um ein Elektronen von einem gebundenen in einen freien Zustand (in das Kontinuum) zu heben. Feldionisation findet daher statt, falls die Laserintensität größer ist als

$$I_{\text{ion, feld}} = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_{\text{ion}}^2 = \frac{Z^6}{256} I_{\text{at}}, \quad (2.126)$$

wobei $I_{\text{at}} \approx 4 \times 10^{16} \text{ W/cm}^2$ die atomare Intensität ist. Für $Z = 2$ (Helium) liegt die Ionisationsbarriere bei $I_{\text{ion, feld}} \sim 10^{16} \text{ W/cm}^2$. Multiphotonen- und Tunnelionisationsprozesse setzen jedoch bereits bei kleineren Laserintensitäten ein ($I_{\text{ion}} \sim 10^{14} \text{ W/cm}^2$).

Für niedrige Kernladungszahlen, d. h. für kleine Z , sehen wir die Elektronen in einem Plasma als frei an. Die freien Plasmalektronen werden in dem starken elektrischen Laserfeld beschleunigt und stoßen mit weiteren Elektronen, so daß sich die Ionisation lawinenartig verstärkt (sog. Sekundärionisation). Außerdem werden sie durch die elektrischen und magnetischen Laserfelder auf bestimmte Bahnen gezwungen: lineare Oszillation, Zick-Zack-Bewegung oder Achterbahn (s. Kap. 2.1). Da die Dauer der Laser-Plasma-Wechselwirkung i. a. sehr kurz ($< 1 \text{ ps}$) ist, stellt sich in dieser Zeit noch kein thermisches Gleichgewicht zwischen den Ionen und den Elektronen ein. Daher läßt sich die Temperatur eines Laserplasmas entweder über die Elektronen- oder die (viel kleinere) Iontemperatur festlegen. Wir entscheiden uns für die mittlere Elektronenergie eines lasererzeugten Plasmas, welche in einem Bereich von $10 \text{ eV} \dots 100 \text{ eV}$ liegt. Dies entspricht Temperaturen von $10^7 \text{ K} \dots 10^8 \text{ K}$ ($1/40 \text{ eV} \hat{=} 10^5 \text{ K}$).

Da die typischen Elektronendichten in unserem Plasma bei $n_e \simeq 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ liegen (s. Kap. 4), dürfen wir die Plasmalektronen zwar als frei angesehen, jedoch nicht mehr einzeln betrachten. Weiterhin dürfen wir den positive Hintergrund, der durch die viel schwereren und dadurch trägeren Ionen in einem lasererzeugten Plasma erzeugt wird,

nicht mehr vernachlässigen⁶.

Im allgemeinen finden in einem Laserplasma auch nichtlineare Prozesse statt, die zu einer Selbstfokussierung des Laserlichtes führen können, und zur Folge haben, daß das Laserlicht über mehrere Rayleighlängen ($z_0 = 9 \mu\text{m}$, s. Kap. 4.4) hinaus fokussiert bleibt. Dadurch bildet sich ein über mehrere hundert Mikrometer langer, intensiver Plasmakanal, welcher "relativistischer Kanal" heißt. Die Selbstfokussierung resultiert aus dem kollektiven Verhalten der Plasmaelektronen, die sich in einem intensiven Laserfeld befinden; sie findet nicht im Vakuum statt.

Die Selbstfokussierung von Laserlicht und die daraus resultierende Ausbildung relativistischer Kanäle beobachten wir in unseren Experimenten (s. Kap. 4.3). Die Erzeugung einer lasergetriebenen Plasmawelle, die zur effektiven Beschleunigung von Elektronen auf relativistische Energien, d. h. $E_{\text{kin}} \gg 512 \text{ keV}$, führen können, beobachten wir *nicht*. Wir diskutieren diesen Effekt dennoch, um zukünftige Experimente, welche mit dem Zweistrahlaufbau durchgeführt werden sollen, zu verstehen.

2.3.1 Selbstfokussierung

Wir behandeln zunächst die Ausbreitung eines Laserpulses in einem Laserplasma. Dabei untersuchen wir, unter welchen Bedingungen sich der Laserpuls überhaupt ausbreiten kann. Wir gehen von der klassischen Dispersionsrelation des Plasmas aus, welche uns Auskunft über die Ausbreitungseigenschaften des Laserpulses im Plasma gibt. Die Ausbreitungseigenschaften führen zu einer Einteilung des Plasmas hinsichtlich seiner optischen Eigenschaften (unter- und überdichtetes Plasma); die Transparenz und die Reflektivität eines Plasmas sind von besonderer Bedeutung für die Aufnahme von Schattenbildern in unseren Experimenten (s. Kap. 4). Aus der Dispersionsrelation des Plasmas läßt sich außerdem unmittelbar die Phasengeschwindigkeit ablesen, mit welcher sich der Laserpuls im Plasma ausbreitet.

Wir führen die ponderomotorische Kraft ein, welche die zeitliche gemittelte Lorentzkraft ist. Sie tritt auf, falls ein räumliches Intensitätsprofil $I_L(x, y, z)$ vorhanden ist. Sie ist proportional zum negativen Gradienten der Laserintensität (2.140)

$$\mathbf{F}_{\text{pond}}(x, y, z) \sim -\nabla I_L(x, y, z). \quad (2.127)$$

D. h. In einem transversalen Intensitätsprofil $I_L = I_L(r, z = \text{const})$, wobei r der radiale Abstand von der optischen (z -)Achse ist, und welches mit größer werdendem radialen Abstand von der optischen Achse abnimmt, also $I(r) < I(0)$ (gültig für eine

⁶ $m_p \approx 1836 m_e$, wobei m_p die Protonen- und m_e die Elektronenmasse sind.

2 Theoretische Grundlagen

Gauß'sche TEM₀₀-Mode, Gl. 2.61), werden die Plasmaelektronen durch die ponderomotorische Kraft so weit nach außen gedrückt, bis sich zwischen ihnen und den zurückbleibenden schwereren Ionen ein Gleichgewicht einstellt (sog. "ponderomotorische Verdrängung").

Aus dem resultierenden gleichsam statischen elektrischen Feld läßt sich über die Poissongleichung ("Ladungsdichte ist Quelle des elektrischen Feldes") die räumlich abhängige Elektronendichte $n_e(r, z = \text{const})$ bestimmen; auf jeden Fall sind mehr Elektronen außen als innen: $n_e(r) > n_e(0)$. Der radial abhängige Brechungsindex im Plasma lautet (2.131)

$$n(r) = \sqrt{1 - \omega_p^2(r) / \omega_0^2}, \quad \omega_p = \left(\frac{e^2 n_e(r)}{\varepsilon_0 m_e(r)} \right)^{1/2}, \quad (2.128)$$

wobei e die Elementarladung, n_e die Elektronendichte, ε_0 die elektrische Feldkonstante, m_e die Elektronenmasse, ω_0 die Mittenfrequenz des Lasers und ω_p die Plasmafrequenz sind. Die Plasmafrequenz ist die Eigenfrequenz der gegen den positiv geladenen Hintergrund der schwereren Ionen schwingenden Plasmaelektronen. Sie hängt im wesentlichen von der Dichte bzw. der Teilchenzahl (n_e) und der Masse (m_e) der Plasmaelektronen ab.

Da die Geschwindigkeit der Elektronen bei unseren relativistischen Laserintensitäten nahe der Lichtgeschwindigkeit ist, kommt die relativistische Massenzunahme zum Tragen. In unserem transversalen Intensitätsprofil $I(r) < I(0)$ ist daher die Masse innen, d. h. in der Nähe der optischen Achse, größer als außen $m_e(0) > m_e(r)$. Die ponderomotorische Verdrängung der Elektronen und die relativistische Massenzunahme führen schließlich zu $n(0) > n(r)$, d. h. der Brechungsindex ist in der Mitte des transversalen Strahlprofils höher als am Rand. Daher krümmt sich die Wellenfront eines Laserpulses, welcher sich in z -Richtung ausbreitet, wie bei einer Sammellinse nach innen.

Der Laserpuls fokussiert sich gleichsam selbst (Selbstfokussierung) und bleibt daher länger als im Vakuum fokussiert. Es bilden sich relativistische Kanäle. Wir merken uns, daß die Ursachen für die Selbstfokussierung die ponderomotorische Kraft und die relativistische Massenzunahme der im intensiven Laserfeld schnell oszillierenden Elektronen. Schließlich stellen wir die relativistische und die ponderomotorische Selbstfokussierung in Zusammenhang mit dem nichtlinearen Brechungsindex. Im folgenden Abschnitt gehen wir genauer auf die einzelnen Mechanismen ein.

Ausbreitung eines Laserpulses im Plasma

Ein Laserpuls, der durch ein Plasma läuft, genügt der Dispersionsrelation (s. Abb. 2.11, s. Anh. 6.3)

$$\omega_0^2 = \omega_p^2 + k_0^2 c^2, \quad (2.129)$$

2 Theoretische Grundlagen

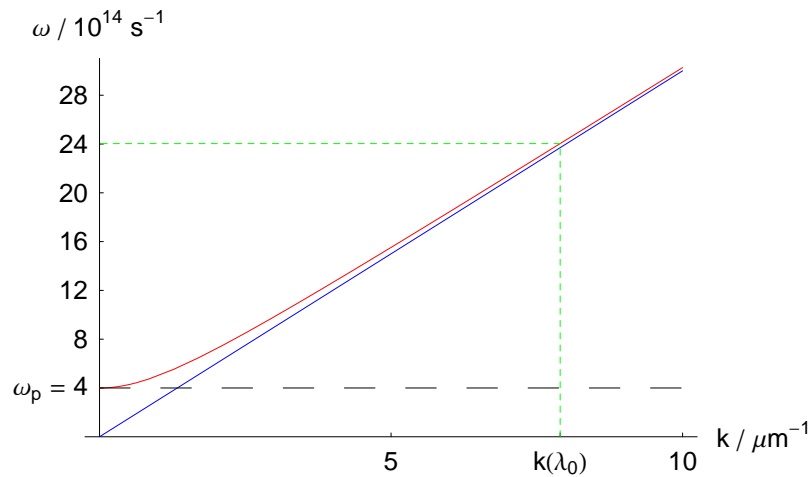


Abbildung 2.11: Klassische Dispersionsrelation des Plasmas. Die klassische Dispersionsrelation des Plasmas (rot) und die Dispersionsrelation im Vakuum $\omega = ck$ (blaue Linie) zum Vergleich sind gegen die Wellenzahl aufgetragen. Die Mittenwellenlänge des Lasers beträgt $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, und die Plasmadichte ist $\omega_p = 4 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ($n_e = 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$). Die Dispersionsrelation gibt die Phasengeschwindigkeit $v_{\text{ph}} = \omega/k$ und die Gruppengeschwindigkeit $v_g = \partial\omega/\partial k$ des Lasers im Plasma an. Für Frequenzen, die größer als die Plasmafrequenz (ω_p) sind, kann der Laserpuls propagieren (oberhalb der schwarz gestrichelten Linie). Bei der Laserwellenlänge (λ_0) überschreitet die Winkelfrequenz $k(\lambda_0) = 7.9 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ die Plasmafrequenz (grün gestrichelte Linien). Im Grenzfall sehr hoher Winkelfrequenzen geht die Dispersionsrelation des Plasmas in diejenige des Vakuums über.

2 Theoretische Grundlagen

wobei k_0 die Wellenzahl und ω_0 die Laserfrequenz sind. Die Plasmafrequenz ist gegeben durch

$$\omega_p = \left(\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e} \right)^{1/2}, \quad (2.130)$$

wobei e die Elementarladung, n_e die Elektronendichte, ε_0 die Dielektrizitätszahl, m_e die Elektronenmasse und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum sind. Die Plasmafrequenz - die nur von der Elektronendichte abhängt - ist die Eigenfrequenz, mit der die leichten Elektronen gegen den positiven Hintergrund der viel schwereren Ionen schwingen. Bei gasförmigen Targets liegen die Elektronendichten bei $n_e \simeq 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ($\omega_p = 2 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$) und bei Festkörpertargets bei $n_e \simeq 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ($\omega_p = 6 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$).

Die dielektrische Funktion des Plasmas lautet $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega_0^2$ (s. Anh. 6.3). Ziehen wir die Wurzel aus der dielektrischen Funktion, so erhalten wir den Brechungsindex im Plasma

$$n = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega_0^2} = \sqrt{1 - n_e/n_{\text{krit}}} \quad (2.131)$$

mit der kritischen Dichte

$$n_{\text{krit}}(\omega_0) = \frac{\varepsilon_0 m_e \omega_0^2}{e^2}. \quad (2.132)$$

Bei der kritischen Dichte ist die Plasmafrequenz gleich der Laserfrequenz. Ist die Laserfrequenz kleiner als die Plasmafrequenz ($\omega_0 < \omega_p$), bzw. ist die Elektronendichte größer als die kritische Dichte ($n_e > n_{\text{krit}}$), so wird der Brechungsindex komplex. Wir sprechen in diesem Fall von einem überdichten Plasma. Der Laserpuls kann sich nicht ausbreiten; er dringt stattdessen evaneszent in das Plasma ein und wird teilweise reflektiert und absorbiert. Ein unterdichtetes Plasma $\omega_0 > \omega_p$ bzw. $n_e < n_{\text{krit}}$ wirkt hingegen wie ein transparentes optisches Medium.

Das Prinzip wird noch von Bedeutung sein für die Aufnahme von Schattenbildern. Für die Mittenwellenlänge unseres Lasers $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ ergibt sich eine kritische Dichte von $n_c = 1.8 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$. Da unsere gemessenen Elektronendichten ($n_e \lesssim 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, s. Kap. 4.2) kleiner sind als die kritische Dichte, kann der Laserpuls im Plasma propagieren.

Ponderomotorische Kraft und Ponderomotorisches Potential

Wir können unsere orts- und zeitabhängigen elektrischen und magnetischen Felder in komplexer Darstellung schreiben als

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega_0 t) \quad (2.133)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{i\omega_0} (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \exp(i\omega_0 t), \quad (2.134)$$

2 Theoretische Grundlagen

wobei $E(\mathbf{r})$ der räumliche Anteil des elektrischen Laserfeldes ist. Für die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und die Verschiebung eines Elektrons im elektromagnetischen Feld gilt nach Newton (betrachte klassischen Fall: $a_0 \ll 1$) und nach zweimaliger zeitlicher Integration

$$\Delta \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{m_e} \exp(i\omega_0 t) \quad (2.135)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{r}} = \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{im_e\omega_0} [1 - \exp(i\omega_0 t)] \quad (2.136)$$

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{im_e\omega_0} t + \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{m_e\omega_0^2} [\exp(i\omega_0 t) - 1]. \quad (2.137)$$

Um der räumlichen Abhängigkeit des elektrischen Laserfeldes, d. h. unserem räumlich abhängigen Intensitätsprofil gerecht zu werden, entwickeln wir das elektrische Feld in eine Taylorreihe bis zur ersten Ordnung, d. h. $\mathbf{E}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathcal{O}^2(\tilde{\mathbf{r}})$. Die ponderomotorische Kraft ist die über eine Laserperiode zeitlich gemittelte Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_{\text{pond}} = -e \langle (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rangle. \quad (2.138)$$

Setzen wir die Felder, die Geschwindigkeit und die Verschiebung ein, so erhalten wir

$$\mathbf{F}_{\text{pond}}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{4m_e\omega_0^2} \nabla [\mathbf{E}^2(\mathbf{r})].$$

Über $\mathbf{F}_{\text{pond}}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_{\text{pond}}(\mathbf{r})$ definieren wir auf natürliche Weise das ponderomotorische Potential

$$\phi_{\text{pond}}(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{4m_e\omega_0^2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{e^2 I(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m_e \omega_0^2}. \quad (2.139)$$

Wegen $I(\mathbf{r}) \sim \mathbf{E}^2(\mathbf{r})$ ist die ponderomotorische Kraft proportional zum negativen Gradienten der Intensität $\mathbf{F}_{\text{pond}} \sim -\nabla I(\mathbf{r})$, wobei ein Gradient allgemein in die Richtung des steilsten Anstiegs zeigt. Das ponderomotorische Potential ist die zeitlich gemittelten kinetische Energie der Elektronen. In unserem Intensitätsprofil spürt das Elektron ein Potentialgefälle (s. Abb. 2.12).

Ponderomotorische und relativistische Selbstfokussierung

Wir wissen nun, daß die ponderomotorische Kraft proportional zum negativen Intensitätsgradienten ist

$$\mathbf{F}_{\text{pond}} \sim \nabla I(\mathbf{r}). \quad (2.140)$$

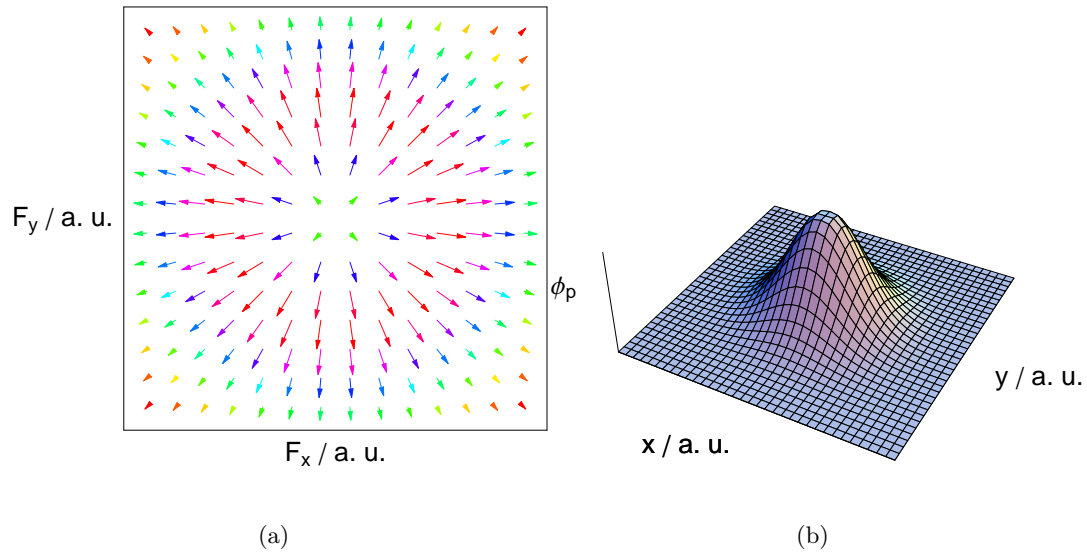


Abbildung 2.12: Ponderomotorische Kraft und ponderomotorisches Potential. Ponderomotorische Kraft (a) und ponderomotorisches Potential (b) in einer Ebene senkrecht zur optischen Achse. Als transversale Intensitätsprofil $I(x, y)$ wird eine Gauß'sche Nullmode (TEM_{00}) angenommen. Die ponderomotorische Kraft, d. h. die zeitliche gemittelte Lorentzkraft, ist proportional zum negativen Gradienten der Laserintensität. Der Gradient zeigt allgemein in die Richtung des steilsten Anstiegs. Daher drückt die ponderomotorische Kraft das Elektron in einer Ebene senkrecht zu optischen Achse radial nach außen. Das ponderomotorische Potential ist die zeitlich gemittelten kinetische Energie der Elektronen. Sie ist im Zentrum, d. h. im Fokus, am größten und nimmt nach außen hin ab. Das Elektron gleitet den Potentialberg herab. Elektronen werden aus dem Gebiet hoher Intensität herausbeschleunigt und gewinnen dabei die ponderomotorische Energie.

2 Theoretische Grundlagen

Für den Ortsanteil des elektrischen Feldes eines Gaußstrahls (TEM₀₀-Mode) gilt nach (2.54)

$$E(r, z) = \frac{E_0 W_0}{W(z)} \exp[-q(z) r^2] \exp[i\varphi_r(z)] \quad (2.141)$$

mit dem komplexen Parameter $q(z) = 1/W(z)^2 + ik_0/2R(z)$ und der Phase $\varphi_{\text{ort}}(z) = -k_0 z + \tan^{-1}(z/z_0)$ ⁷. Das Elektron erfährt die radial nach außen wirkende ponderomotorische Kraft. Wir berechnen sie, indem wir das Feld quadrieren und den Gradienten in Zylinderkoordinaten bilden

$$\mathbf{F}_{\text{pond}}(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{m_e \omega_0^2} \left(\frac{E_0 W_0}{W(z)} \right)^2 q(z) r \exp[-2q(z) r^2] \exp[2i\varphi_{\text{ort}}(z)] \hat{\mathbf{r}} \quad (2.142)$$

Wegen des Intensitätsprofils unserer Laserpulse - mit größer werdendem radialen Abstand von der optischen Achse nimmt die Intensität ab -, entsteht ein Intensitätsgradient, der in der x, y -Ebene radial nach innen zeigt. Die resultierende ponderomotorische Kraft zeigt in entgegengesetzte Richtung und drückt daher das Elektron radial nach außen.

In einem Plasma entfernen sich aufgrund der ponderomotorischen Kraft die Elektronen immer weiter von den viel schwereren Ionen, bis sich schließlich ein Gleichgewicht zwischen anziehender Coulombkraft und abstoßender ponderomotorischer Kraft einstellt. Im Gleichgewicht ergibt sich ein quasi-statisches elektrisches Feld, das in dieselbe Richtung wie die ponderomotorische Kraft zeigt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{stat}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{F}_{\text{pond}}(\mathbf{r})/e \\ &= \frac{e}{m_e \omega_0^2} \left(\frac{E_0 W_0}{W(z)} \right)^2 q(z) r \exp[-2q(z) r^2] \exp[2i\varphi_{\text{ort}}(z)] \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Im Fokus, d. h. bei $z = 0$, finden wir wegen $\lim_{z \rightarrow 0} \varphi_{\text{ort}}(z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} W(z) = W_0$, $\lim_{z \rightarrow 0} q(z) = 1/W_0^2$ weiterhin (s. Abb. 2.13)

$$\mathbf{E}_{\text{F}}(z = 0, x, y) = \lim_{z \rightarrow 0} \mathbf{E}_{\text{stat}}(\mathbf{r}) = \frac{e}{m_e \omega_0^2} \left(\frac{E_0}{W_0} \right)^2 r \exp\left(-2 \frac{r^2}{W_0^2}\right) \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.144)$$

Im Abstand der halben Tailenbreite, d. h. $r_{\text{max}} = W_0/2$, ist das elektrostatische Feld im Fokus maximal

$$\mathbf{E}_{\text{F}, \text{max}} \left(r_{\text{max}} = \frac{W_0}{2} \right) = \frac{e E_0^2}{2\sqrt{e} m_e \omega_0^2 W_0}. \quad (2.145)$$

⁷Zur Vereinfachung der Rechnung gehen wir hier von dem laufenden und nicht von dem stehenden elektrischen Feld Gauß'scher Strahlen aus. In der Nähe des Fokus ist diese Beschreibung ausreichend (vgl. Abb. 2.8)

2 Theoretische Grundlagen

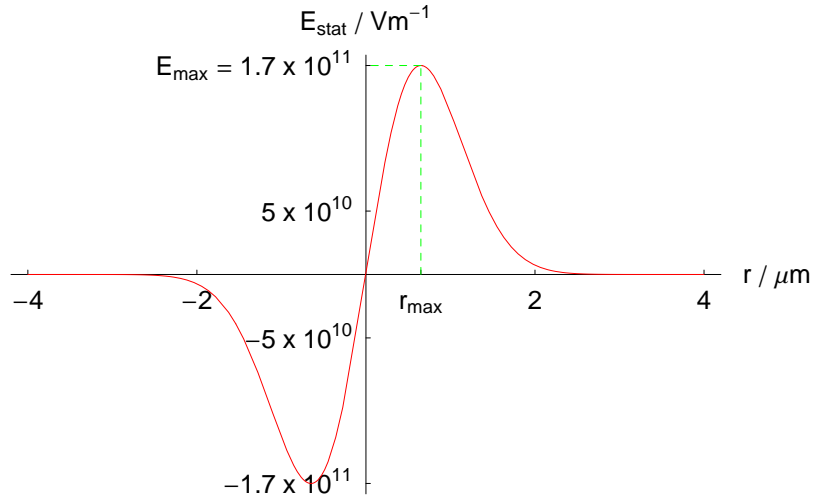


Abbildung 2.13: Quasi-statisches elektrisches Feld im ponderomotorischen Potential. Das elektrische Feld ist in Abhängigkeit des radialen Abstandes von der optischen Achse aufgetragen. Die Laserintensität beträgt $I = 3 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$, die elektrische Feldstärke $E_0 = 4.8 \times 10^{12} \text{ V/m}$, die Mittenwellenlänge des Lasers $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, die Winkelfrequenz $\omega_0 = 2.4 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$, die Wellenzahl $k_0 = 7.9 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$, die Ionendichte $n_i = 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, die Fokussfläche $A_F = 5 \mu\text{m}^2$, die Tailenbreite $W_0 = 1.3 \mu\text{m}$, und die z -Position ist $z = 0$. Bei der ponderomotorischen Selbstfokussierung werden die Elektronen nach außen gedrückt, während der schwereren Ionen zurückbleiben. Zwischen den Elektronen und den zurückbleibenden Ionen entsteht ein quasi-statisches elektrisches Feld. Das elektrische Feld ist auf der optischen Achse ($r = 0$) minimal ($\mathbf{E}_{\text{stat}} = 0$) und hat im Abstand $r_{\text{max}} = 0.7 \mu\text{m}$ sein Maximum $\mathbf{E}_{\text{stat}}(r_{\text{max}}) = 1.7 \times 10^{11} \text{ V/m}$ (grün gestrichelte Kurven). Die elektrischen Felder bei der ponderomotorischen Selbstfokussierung sind somit in der Größenordnung von $E_{\text{pond}} \simeq 10^{11} \text{ V/m}$; dies entspricht GV/cm !

2 Theoretische Grundlagen

Bei einer Laserintensität von $I = 3 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$ ($E_0 = 4.8 \times 10^{12} \text{ V/m}$, s. 4.1) einer Wellenlänge von $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ ($\omega_0 = 2.4 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$) und einer Fokusfläche von $A_F = 5 \mu\text{m}^2$ ($W_0 = 1.3 \mu\text{m}$, s. 4.1) ergibt sich $\mathbf{E}_{F, \max} = 1.7 \times 10^{11} \text{ V/m}$. Die elektrische Feldstärke liegt daher im GV/cm-Bereich!

Die Elektronendichte läßt sich über den Gauß'schen Satz (Poisson- bzw. Maxwellgleichung: "Ladungsdichte ist Quelle des elektrischen Feldes") berechnen

$$\nabla \mathbf{E}_{\text{stat}} = \rho / \varepsilon_0, \quad (2.146)$$

wobei $\rho = e(n_i - n_e)$ die Raumladungsdichte und n_i die Ionendichte sind. Wegen

$$\nabla \mathbf{E}_{\text{stat}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{E}_{\text{stat}}) \quad (2.147)$$

erhalten wir die reduzierte Elektronendichte $\Delta n = n_e - n_i$, die wir auf die Ionendichte normieren (s. Abb. 2.14)

$$\frac{\Delta n}{n_i} = \frac{2}{m_e \omega_0^2} \frac{\varepsilon_0}{n_i} \left(\frac{E_0 W_0}{W(z)} \right)^2 q(z) \exp[-2q(z)r^2] \exp[2i\varphi_{\text{ort}}(z)] (-1 + 2q(z)r^2). \quad (2.148)$$

Wir zeigen nun, daß die ponderomotorische Verdrängung der Elektronen von der optischen Achse zur Selbstfokussierung eines Laserpulses führt. Dazu betrachten wir den Brechungsindex im Plasma (2.131)

$$n(r) = \sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega_0^2} = \sqrt{1 - n_e(r) / n_{\text{krit}}}, \quad (2.149)$$

wobei $n_e = n_e(r)$ der radial abhängige Brechungsindex und $n_{\text{krit}} = \varepsilon_0 m \omega_0^2 / e^2$ die kritische Elektronendichte sind. Bei größer werdendem Abstand von der Strahlachse wird die Elektronendichte größer $n_e(r) > n_e(0)$ und damit der Brechungsindex kleiner $n(r) < n(0)$. Der Strahl krümmt sich wie bei einer Sammellinse - bei einer Sammellinse ist der Brechungsindex auf der Strahlachse größer als am Rand - nach innen, d. h. zum optisch dichteren Medium hin. Der Laserstrahl wird konvergent und fokussiert sich selbst (ponderomotorischer Selbstfokussierung).

Um die relativistische Selbstfokussierung zu erklären, gehen wir von dem genäherten Lorentzfaktor (2.104) aus

$$\gamma(r) \approx \sqrt{1 + a_0^2(r) / 2}, \quad (2.150)$$

wobei nun die Laserintensität bzw. der relativistische Parameter von dem radialen Abstand abhängen sollen. Die relativistische Massenzunahme des Elektrons $m \mapsto \gamma m_0 \Rightarrow$

2 Theoretische Grundlagen

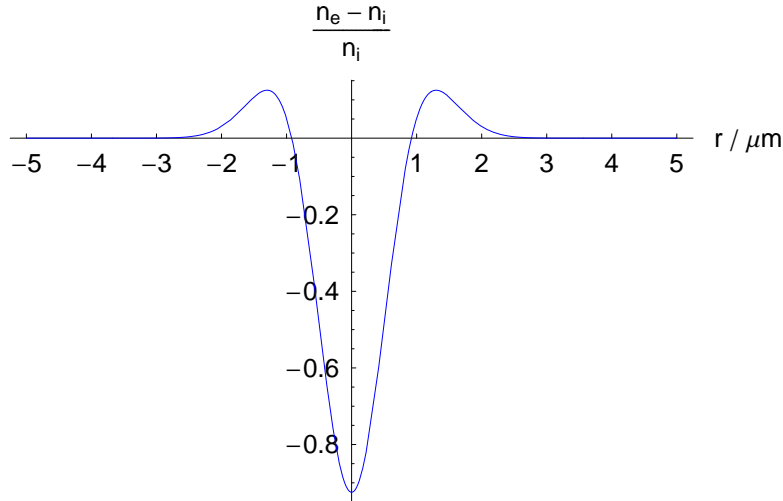


Abbildung 2.14: Elektronendichteverteilung bei der ponderomotorischen Selbstfokussierung. Die reduzierte, auf die Ionendichte normierte Elektronendichte ($n_{\text{red}} = n_e/n_i - 1$) ist gegen den radialen Abstand von der optischen Achse aufgetragen: $n_{\text{red}} = -1$ bedeutet vollständige Elektronenentleerung; $n_{\text{red}} = 0$ (Schnittpunkt mit der Abzisse) bedeutet, daß die Anzahl der Elektronen und Ionen gleich ist. Die Laserintensität beträgt $I = 3 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$, die elektrische Feldstärke $E_0 = 4.8 \times 10^{12} \text{ V/m}$, die Mittenwellenlänge des Lasers $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$, die Winkelfrequenz $\omega_0 = 2.4 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$, die Wellenzahl $k_0 = 7.9 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$, die Ionendichte $n_i = 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, die Fokusfläche $A_F = 5 \mu\text{m}^2$, die Tailenbreite $W_0 = 1.3 \mu\text{m}$, und die z -Position liegt bei $z = 0$. Mit größer werdendem radialen Abstand nimmt die reduzierte Elektronendichte zu. Sie erreicht genau bei der Tailenbreite $W_0 = 1.3 \mu\text{m}$ ihr Maximum. Für noch größere Abstände ($r > W_0$) nähert sie sich asymptotisch der Abszisse. Auf der optischen Achse tritt fast vollständige Elektronenentleerung auf ($n_{\text{red}} \approx 90\%$). Das Elektronendichteprofil erzeugt innerhalb eines radialen Abstandes von wenigen Mikrometern von der optischen Achse ($r < 5 \mu\text{m}$) einen hohen Brechungsindexgradienten. Auf der optischen Achse ist der Brechungsindex $n = 1$.

2 Theoretische Grundlagen

$\omega_p^2 \mapsto \omega_p^2/\gamma(r)$ führt zu

$$n(r) = \sqrt{1 - \omega_p^2/\gamma(r) \omega_0^2}. \quad (2.151)$$

Ist der Lorentzfaktor in der Mitte größer als am Rand, d. h. $\gamma(0) > \gamma(r)$, so ist auch der Brechungsindex in der Mitte größer als am Rand, d. h. $n(0) > n(r)$, und es tritt relativistische Selbstfokussierung auf.

Wir können auch anders argumentieren und betrachten uns dazu die Phasengeschwindigkeit des Laserpulses im Plasma. Die Phasengeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle lautet allgemein $v_{\text{ph}} = \omega_0/k_0$. Einsetzen der klassischen Plasma-Dispersionsrelation (2.129) liefert

$$v_{\text{ph}}(r) = c \left(\frac{1}{1 - \omega_p^2/\omega_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} = c \left(\frac{1}{1 - n_e(r)/n_{\text{krit}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.152)$$

wobei $n_e = n_e(r)$ der radial abhängige Brechungsindex und $n_{\text{krit}} = \varepsilon_0 m \omega_0^2 / e^2$ die kritische Elektronendichte sind. Die relativistische Massenzunahme des Elektrons $m \mapsto \gamma m_0 \Rightarrow \omega_p^2 \mapsto \omega_p^2/\gamma(r)$ geht auch in die Phasengeschwindigkeit ein

$$v_{\text{ph}}(r) = c \left(\frac{1}{1 - \omega_p^2/\gamma(r) \omega_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.153)$$

Da bei größer werdendem Abstand von der Strahlachse der Lorentzfaktor und die Elektronendichte sowie wegen $\omega_p \sim \sqrt{n_e}$ auch die Plasmafrequenz größer werden, wird auch die Phasengeschwindigkeit größer, d. h. $v_{\text{ph}}(r) > v_{\text{ph}}(0)$. Ist die Phasengeschwindigkeit des Laserpulses, welcher sich innerhalb des Plasmas in z -Richtung ausbreitet, am Rand größer ist als in der Nähe der optischen Achse, so krümmt sich die Wellenfront nach innen, und der Strahl wird wieder konvergent.

Schließlich zeigen wir noch, daß die relativistische Selbstfokussierung ein nichtlinearer optischer Effekt ist. Dazu entwickeln wir den Brechungsindex unter der Wurzel (dies gilt für ein unterdichtetes Plasma: $\omega_0 > \omega_p$)

$$n = \sqrt{1 - \omega_p^2/\gamma \omega_0^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\gamma \omega_0^2} \quad (2.154)$$

2 Theoretische Grundlagen

und setzen den genäherten Lorentzfaktor (2.104) ein⁸

$$\begin{aligned}
 n &\approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{a_0^2}{4} \right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{8} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} a_0^2 \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{64} \frac{\omega_p^2 \lambda_0^4}{\varepsilon_0 \pi^4 c^7} \left(\frac{e}{m_e} \right)^2 I.
 \end{aligned} \tag{2.155}$$

Dies verstehen wir als nichtlinearen Brechungsindex

$$n = n_1 + n_2 I, \tag{2.156}$$

wobei n_1 der lineare und $n_2 = \omega_p^2 \lambda_0^4 (e/m_e)^2 / 64 \varepsilon_0 \pi^4 c^7$ der nichtlineare Brechungsindex sind. Die obige Herleitung gilt nur für schwach relativistische Intensitäten ($a_0 \lesssim \sqrt{2}$). Beugung und Ionisation wirken der (Selbst-)Fokussierung entgegen. Für die Selbstfokussierung muß daher eine kritische Leistung überschritten werden.

Kritische Leistung für Selbstfokussierung

Die kritische Leistung, welche zur Selbstfokussierung eines Laserpulses in einem Plasma führt, ist - bei genauer Betrachtung der nichtlinearen Laser-Plasma-Wechselwirkung und unter Berücksichtigung der defokussierender Effekte - gegeben durch [29]

$$P_{\text{krit}} = 16.2 \frac{n_{\text{krit}}}{n_e} \text{ GW}. \tag{2.157}$$

Setzen wir die Elektronendichte von $n_e = 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ (s. Kap. 2.3.2) und die kritische Dichte von $n_{\text{krit}} = 1.7 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ (bei einer Zentralwellenlänge des Lasers von $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$) ein, so erhalten wir eine kritische Leistung von $P_{\text{krit}} = 0.55 \text{ TW}$. Bei bereitgestellten Pulsenergien von 50 mJ bzw. 100 mJ (s. Kap. 2.3.2) sowie einer Pulsdauer von 100 fs (s. Kap. 2.3.2) ergeben sich Laserleistungen von $P_0 = 0.50 \text{ TW}$ bzw. $P_0 = 1 \text{ TW}$. Nur im zweiten Fall ist die kritische Leistung für Selbstfokussierung überschritten - Selbstfokussierung findet daher statt.

2.3.2 Gasdichtemessungen

Breitet sich unser Laserpuls im Plasma aus, so sammelt sie Phasenverschiebung auf. Aus der (integralen) Phasenverschiebung läßt sich der Brechungsindex bestimmen. Die

⁸Potenzreihenentwicklung: $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ und $1/\sqrt{1+x} \approx 1 - x/2$.

2 Theoretische Grundlagen

Phasenänderung, die ein durch ein Plasma wandernder Puls erfährt, ist gegeben durch

$$\Delta\phi = \int (k_p - k_0) ds = \frac{\omega_0}{c} \int (n - 1) ds, \quad (2.158)$$

wobei $k_0 = \omega_0/c$ die Wellenzahl im freien Raum, n der Brechungsindex und $k_p = n\omega_p/c$ die Wellenzahl des Laserpulses im Plasma sind. Die Ausdehnung des Plasmas legt das Integrationsgebiet fest. Wie sehen, daß die Phasenverschiebung die über den Weg integrierte Elektronendichte ist - der Integrationsweg ist der Weg, den der Laserpuls durch das Plasma zurücklegt. Entwickeln wir den Brechungsindex (2.131) unter der Wurzel, so finden wir den vereinfachten Ausdruck

$$n \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{n_e}{n_{\text{krit}}}. \quad (2.159)$$

Setzen wir dies in die Phasenverschiebung ein, so ergibt sich weiterhin

$$\Delta\phi = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{n_{\text{krit}} c} \int n_e ds. \quad (2.160)$$

Aus der Phasenverschiebung, die wir aus Interferogrammen ermitteln, läßt sich der Brechungsindex im Plasma bestimmen [30, 31].

Dazu gehen wir von einer zylindrischen Symmetrie des Plasma aus, wobei die Düsenachse die Symmetrieachse des Zylinders ist (Radius: R). Wir legen ein zweidimensionales Koordinatensystem in den Zylinder hinein - der Ursprung des Koordinatensystems liegt auf der Düsenachse. Weiterhin setzen wir voraus, daß die Strahlen im Plasma keine Ablenkung erfahren. Ein Probestrahl, der durch das Plasma läuft, sammelt Phasenverschiebung auf. Wir betrachten einen unendlich dünnen Probestrahl, welcher in x -Richtung läuft und den Zylinder an zwei Punkten S_1 und S_2 schneidet. Die gemessene (integrale) Phasenverschiebung ϕ ergibt sich, indem wir in x -Richtung über die Strecke $\overline{S_1 S_2}$ integrieren

$$\phi = \frac{\omega_0}{c} \int_{S_1}^{S_2} (n - 1) ds \quad (2.161)$$

Der Satz des Pythagoras liefert

$$\phi(y) = \frac{\omega_0}{c} \int_{-(R^2-y^2)^{1/2}}^{(R^2-y^2)^{1/2}} [n(x) - 1] dx \quad (2.162)$$

Die Phasenverschiebung ist von der y -Koordinate $\Delta\phi = \Delta\phi(y)$ und der Brechungsindex von der x -Koordinate $n = n(x)$ abhängig. Schreiben wir auf Zylinderkoordinaten um,

2 Theoretische Grundlagen

so erhalten wir die Abel'sche Integralgleichung

$$\phi(y) = 2\frac{\omega_0}{c} \int_y^R [n(r) - 1] \frac{r \, dr}{\sqrt{r^2 - y^2}} \quad (2.163)$$

$\Delta\phi(y)$ heißt Abeltransformierte von $2[n(r) - 1]\omega_0/c$. Abelinversion liefert [30]

$$2\frac{\omega_0}{c} [n - 1] = -\frac{1}{\pi} \int_y^R \frac{d\phi}{dy} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - r^2}}. \quad (2.164)$$

Lösen wir dies auf, so erhalten wir

$$n - 1 = -\frac{\lambda_0}{4\pi^2} \int_y^R \frac{d\phi}{dy} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - r^2}} \quad (2.165)$$

Die Auswertung mit der Software "IDEA" [32] liefert schließlich die Werte für den Brechungsindex $n - 1$. Mit dem Brechungsindex für Stickstoff $n_{\text{Stick}} = 1.000298$ bei einem Druck von 1 bar gilt andererseits

$$n - 1|_{1 \text{ bar}} = 3 \times 10^{-4}. \quad (2.166)$$

Setzen wir obige Ausdrücke in das Verhältnis, so erhalten wir den Druck p . Über die allgemeine Gasgleichung

$$p = n_{\text{gas}} k_B T, \quad (2.167)$$

wobei n_{gas} die Gasdichte, k_B die Boltzmann-Konstante und T die absolute Temperatur sind, erhalten wir schließlich die Gasdichte $n_{\text{gas}} = p/k_B T$. Für Zimmertemperatur, d. h. $k_B T = 1/40 \text{ eV}$, folgt daher

$$n_{\text{gas}} [\text{cm}^{-3}] = 2.5 \times 10^{19} p [\text{bar}]. \quad (2.168)$$

2.3.3 Lasergetriebene Plasmawelle

Breitet sich ein Laserpuls in z -Richtung aus, so kann er über sein (longitudinales, nicht transversales) Intensitätsprofil, d. h. $I = I(z)$, eine Plasmawelle anregen. Um das zu verstehen, betrachten wir ein einzelnes Elektron, welches sich zum Zeitpunkt $t = 0$ auf der optischen Achse ($r = 0$) befindet und den Laserpuls auf sich zulaufen sieht. Das Elektron gerät zunächst in die ansteigenden Intensitätsflanke des Pulses und wird durch die ponderomotorischen Kraft, die in Richtung der steilsten Intensitätsabnahme zeigt, nach hinten gedrückt. Da die schweren Ionen vorne zurückbleiben, zieht die Coloumbkraft die

2 Theoretische Grundlagen

Elektronen nach vorne. Gleichzeitig überholt der Laserpuls das Elektron, welches auf der absteigende Intensitätsflanke nach vorne herab gleitet - wie ein Skifahrer, der einen Abhang hinunterfährt. Geschieht dies in Phase mit der Coulombkraft, so erhält das Elektron einen Stoß nach vorne. Dadurch kann die Schwingung des Elektrons, welches gegen den positiv geladenen Hintergrund der trägen Ionen schwingt, resonant angeregt werden. In einem Plasma ist das Elektron jedoch nicht allein, sondern es gibt viele Elektronen. Der Laserpuls, der durch das Plasma läuft, regt die Plasmaelektronen nacheinander an - wie ein Schiff, das eine Kielwelle hinter sich her zieht (engl. : "wake field"). Es entsteht eine Elektronendichteoszillation, die dem Laserpuls mit seiner Phasengeschwindigkeit hinterherläuft; das Ergebnis ist eine Plasmawelle.

Die Resonanzbedingung dafür, daß ein Plasmaelektron gerade zwei Stöße in entgegengesetzter Richtungen erhält, lautet $\tau_L = \tau_p/2$, wobei τ_L die Pulsdauer des Lasers und τ_p die Dauer der Plasmaschwingung sind [4]. Das zeitliche Profil des Lasers lautet (s. Anh. 6.13)

$$a(\chi) = a_0^2 \exp \left[- \left(\frac{\chi}{\sigma} \right)^2 \right], \quad (2.169)$$

wobei $\chi = k_p v_g (t - z/v_g)$ und $\sigma = k_p v_g \tau_{g0}$ dimensionslose Parameter und $k_p = \omega_p/c$ die Wellenzahl des Plasmas sind. Die Elektronendichteoszillation ist mit einem Potential bzw. einem longitudinalen elektrischen Feld (E_z) verbunden. Das elektrische Potential beschreiben wir durch die Poissongleichung (s. Anh. 6.13)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \chi^2} = \gamma_g^2 \left[\frac{\sqrt{1 - \gamma_g^{-2}}}{\sqrt{1 - \frac{1+a^2}{\gamma_g^2(1+\varphi)^2}}} - 1 \right], \quad (2.170)$$

wobei $\gamma_g = (1 - \beta_g)^{-1/2}$ der Lorentzfaktor, $\beta_g = v_g/c$ der Betafaktor und v_g die Gruppengeschwindigkeit sind. Es liefert das longitudinale elektrische Feld gemäß $E_z(\chi) = -\partial\varphi/\partial\chi$. Die Elektronendichteveriation berechnen wir über (s. Anh. 6.13)

$$\Delta n/n_0 = \frac{n - n_0}{n_0} = \tilde{n} - 1, \quad \tilde{n} = \gamma_g^2 \beta_g \left[(1 - \gamma_g^{-2} \psi^{-2})^{-1/2} - \beta_g \right]. \quad (2.171)$$

Die Abbildungen 2.15 und 2.16 zeigen lasergetriebene Plasmawellen für zwei verschiedene Intensitäten. Wir erkennen, daß sowohl die Oszillationsamplitude als auch die Periode der Plasmawelle bei höherer Laserintensität größer werden. Außerdem verläuft das longitudinale elektrische Feld stufenförmiger, bis die Welle schließlich bricht (engl. : "wave breaking"). Die Elektronen reiten auf der brechenden Plasmawelle und werden in longi-

2 Theoretische Grundlagen

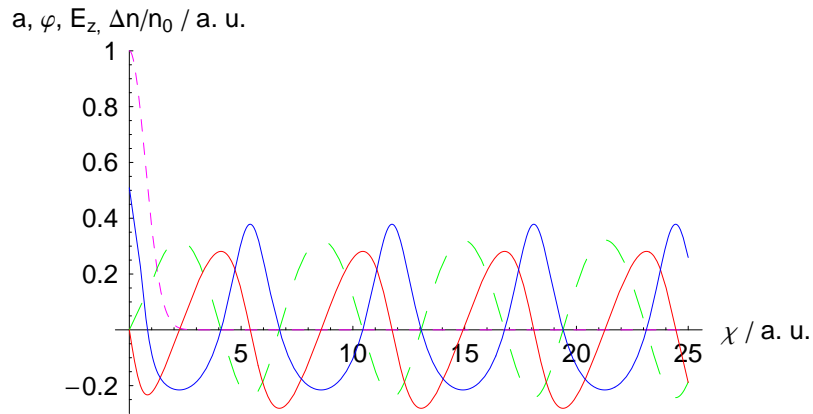


Abbildung 2.15: Lasergetriebene Plasmawelle bei relativ niedrigerer Laserintensität. Laserpuls (violett), Potential der Plasmawelle (grün), longitudinale Komponente des elektrischen Feldes (rot) und Elektronendichteveriation (blau) für $a_0 = 1$. Parameter: $\gamma_g = 10$; $\sigma = 1$.

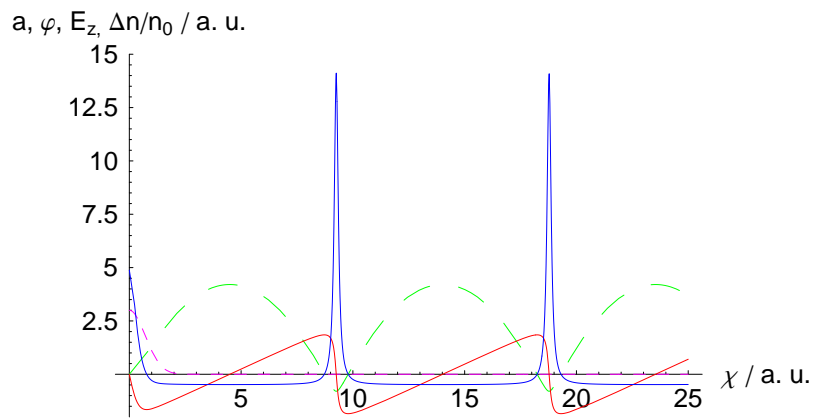


Abbildung 2.16: Lasergetriebene Plasmawelle bei relativ hoher Laserintensität. Laserpuls (violett), Potential der Plasmawelle (grün), longitudinale Komponente des elektrischen Feldes (rot) und Elektronendichteveriation (blau) für $a_0 = 3$ (b). Parameter: $\gamma_g = 10$; $\sigma = 1$.

tudinale Richtung beschleunigt. Wir beschreiben im folgenden kurz die laserinduzierte Elektronenbeschleunigung.

Laserinduzierte Elektronenbeschleunigung

Es gibt im wesentlichen zwei Mechanismen, die zu einer laserinduzierten Elektronenbeschleunigung führen können:

- Prinzip der Laserbeschleunigung in einer Plasma-Kielwelle (engl. : "*Laser Wake Field Acceleration*") [33, 34]: Die ponderomotorische Kraft, die durch das longitudinale Intensitätsprofil des Laserpulses entsteht, regt die Plasmawelle an. Die Plasmawelle führt zu einer longitudinalen Elektronendichteverteilung, die ein longitudinales elektrisches Feld produziert. Das longitudinale elektrische Feld beschleunigt die Elektronen, welche sich in einem relativistischen Kanal befinden.
- Prinzip der direkten Laserbeschleunigung (engl. : "*Direct Laser Acceleration*") [35, 36]: Der beschleunigte Elektronenstrahl kann als Strom interpretiert werden, der von radialen elektrischen Feldern und azimuthalen Magnetfeldern umgeben ist. Die unmittelbare Wechselwirkung zwischen den elektromagnetischen Feldern führt zu einer Beschleunigung der Plasmaelektronen in z -Richtung.

3 Experimenteller Aufbau

In diesem Kapitel beschreiben wir unseren experimentellen Aufbau. Dazu charakterisieren wir das Jenaer Lasersystem, welches in der Lage ist, Laserpulse mit relativistischen Intensitäten zu erzeugen (s. Kap. 3.1). Weiterhin führen wir die technischen Einzelheiten unserer Meßanordnung an (s. Kap. 3.2). Sie gestattet es, zwei gegenläufige Laserpulse mit hoher Genauigkeit in Raum und Zeit zu überlagern und eine Autokorrelationsmessung bei voller Laserintensität durchzuführen.

3.1 Lasersystem

Wir führen unsere experimentellen Messungen mit dem Hochleistungslasersystem am IOQ Jena (Abk. : *Institut für Optik und Quantenelektronik Jena*) durch (s. Abb. 3.1). Der Jenaer Laser ist ein Festkörperlaser, der Ti:Sa-Kristalle (Titan:Sapphir) als aktives Medium benutzt, und kurze Laserpulse ($\tau_p \sim 100$ fs) erzeugt. Mittels CPA-Technik (engl. : "chirped pulse amplification technique") werden diese verstärkt. Die erreichte Energie bzw. Leistung beträgt 1J bzw. 10...15 TW. Als Oszillator dient ein kommerziellen Laser ("Tsunami"), dessen Ti:Sa-Kristall mittels eines diodengepumpten, frequenzverdoppelten Nd : YVO₄-Lasers gepumpt wird (Neodym:Yttrium-Vanadium-Oxid: 5.5 W Leistung bei einer Wellenlänge von 532nm im Dauerstrichbetrieb). Der Oszillator erzeugt durch Kerr-Linsen-Modenkopplung ultrakurze Laserpulse (45 fs) mit einer Wiederholrate von 80 MHz (bei einer Zentralwellenlänge von 795 nm, einer spektralen Bandbreite von 23 nm und einer Pulsenergie von 10 nJ).

Wir schätzen kurz die minimale Pulsdauer ab, welche mit diesem Oszillator erreichbar ist: Für das minimale Produkt aus Pulsdauer und spektraler Bandbreite gilt allgemein (Heisenberg'sche Unschärferelation)

$$\tau_p \Delta\omega_p \geq 2\pi\tilde{c}, \quad (3.1)$$

wobei \tilde{c} eine Konstante ist, die von der jeweiligen Pulsform abhängig ist. Beschreiben wir unseren Puls im besonderen durch eine Gauß'sche Feldeinhüllende, so gelten die Beziehungen $\tau_G \geq 2.355/\Delta\omega_{p,FWHM}$ und $\tau_{p,FWHM} = 1.177 \tau_G$ [25]. Bei der spektralen

3 Experimenteller Aufbau

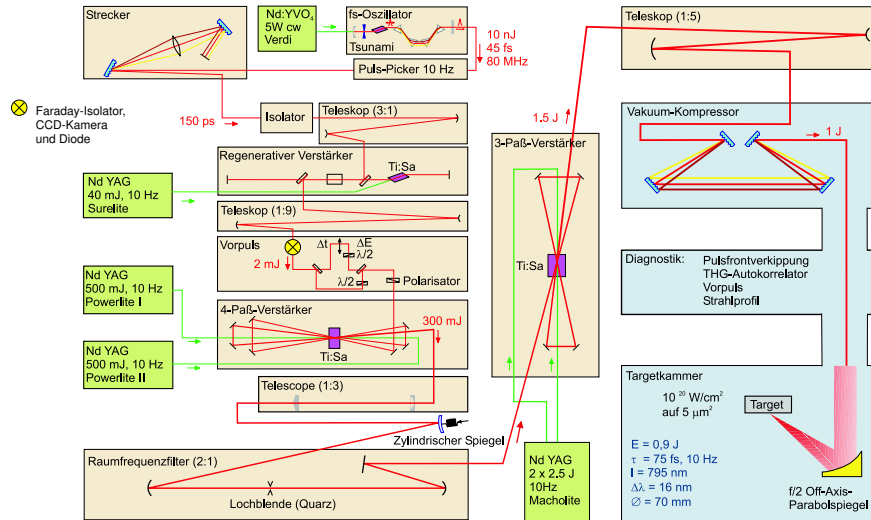


Abbildung 3.1: Jenaer Lasersystem. Ti:Sa-Lasersystem mit eingebautem Faraday-Isolator. Das Lasersystem besteht im wesentlichen aus einem Oszillator, einem regenerativen Verstärker und zwei nachfolgenden Verstärkerstufen - nach der Verstärkung erreichen die Pulse unter bestmöglichen Bedingungen Energien von 2mJ, 300 mJ bzw. 1.5 J (E_p). Nach der Kompression (blau unterlegter Bereich) verkürzt sich ihre Pulsdauer auf $\tau_p \gtrsim 80$ fs. Ein Parabolspiegel bündelt sie auf eine Fokusfläche von $A_F \gtrsim 5 \mu\text{m}^2$. Die Laserintensität beträgt höchstens $I = E_p / \tau_p A_F \simeq 10^{20} \text{ W/cm}^2$ (vgl. relativistische Intensität: $I_{\text{rel}} = 2.2 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$). Das Lasersystem arbeitet nach dem CPA-Prinzip ("chirped pulse amplification"). Die Laserpulse lassen sich hinsichtlich ihrer Pulsfrontverkipfung, ihres räumlichen Strahlprofils sowie ihrer Pulsdauer, -struktur (klassischer Autokorrelator dritter Ordnung) und -energie (Energienmeßgerät) charakterisieren. Ein eingebauter Faraday-Isolator mit einer Apertur von 20 mm (gelber Kreis mit Kreuz) schützt den regenerativen Verstärker vor zurücklaufenden Laserpulsen -auf dem Rückweg durch das Lasersystem werden diese verstärkt und durch das 1 : 9-Teleskop gebündelt.

3 Experimenteller Aufbau

Bandbreite $\Delta\lambda_{\text{FWHM}} = 23 \text{ nm}$ ergibt sich wegen $\Delta\omega_{\text{p,FWHM}} = 2\pi c\Delta\lambda_{\text{FWHM}}/\lambda_0^2 \approx 6.9 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$ eine minimale FWHM-Pulsdauer von $\tau_{\text{p,FWHM}} \approx 40 \text{ nm}$.

Die 80 Millionen Pulse je Sekunde, welche der Oszillator liefert, können nicht unmittelbar verstärkt werden - bei einer unmittelbaren Verstärkung auf eine Energie von 1 J entspräche dies einer Lichtleistung von 0.1 GW -, da dies zu unerwünschten nichtlinearen optischen Prozessen wie Selbstphasenmodulation und Selbstfokussierung sowie zu einer überhöhten thermischen Belastung und dadurch irreversibler Zerstörung der Verstärkerkristalle führen würde. Daher greift sich ein Pockelszelle (engl. : "pulse picker"), kombiniert mit einem Polarisationsfilter, nur jeden acht Millionstel Puls heraus und verringert dadurch die Wiederholrate auf gemäßigte 10 Hz. Bei dieser Wiederholrate werden die Laserpulse nun verstärkt.

Damit die Intensität unterhalb der Zerstörschwellen der Optiken bleibt, werden die Pulse in der Zeit gestreckt; eine zeitliche Verlängerung bewirkt eine niedrigere Intensität ($I \sim 1/\tau_{\text{p}}$). Zur zeitlichen Verlängerung dient ein Gitterstrecker: Dieser besteht im wesentlichen aus zwei parallel stehenden Gitterpaaren. Am ersten Gitterpaar wird der spektral breite Oszillatordpuls ($\Delta\lambda_{\text{FWHM}} = 20 \text{ nm}$) in seine einzelnen Spektralkomponenten zerlegt und durch das zweite Gitterpaar wieder kollimiert. Dies geschieht jeweils durch Reflexion und Dispersion am Gitter. Der Strahlengang wird so eingestellt, daß die kürzerwelligen Farben eine längere Wegstrecke als die längerwelligen durchlaufen und somit gegenüber diesen verzögert sind, d. h. die niederfrequenten Anteile des Pulses verlassen den Strecker früher als die höherfrequenten ("rot vor blau" bzw. Up-Chirp); die Pulsdauer ist schließlich auf 150 ps verlängert.

Ein Faraday-Isolator, der aus einem Faraday-Rotator und einem $\lambda/4$ -Plättchen besteht, verhindert, daß Licht in den Oszillator rückkoppelt und die empfindliche Modenkopplung stört bzw. unterbricht. Eine Pockelszelle koppelt den zeitlich gestreckten Oszillatordpuls (engl. : "seed pulse") in den Resonator des sog. regenerativen Verstärkers ein. Dort läuft er so lange um, bis eine Sättigung der Verstärkung eintritt - nach etwa 20 Umläufen im Resonator. Eine Pockelszelle schaltet den verstärkten Puls, welcher schließlich eine Energie von etwa 2 mJ besitzt, heraus. Ein 1:9-Teleskop weitet den Strahl auf, wobei der Strahldurchmesser von 1 mm auf 9 mm wächst. Die Strahlaufweitung, d. h. die Vergrößerung des Strahlquerschnitts (A_{q}), dient dazu, die Intensität zu verringern und unterhalb der Zerstörschwellen der Optiken zu bleiben ($I \sim 1/A_{\text{q}}$).

Das Lasersystem bietet die Möglichkeit, einen Vorpuls einzustellen. Vorpulse erreichen ihr Zielobjekt (engl. : "target") früher als der Hauptpuls. Um einen Vorpuls zu erzeugen, wird der Laserpuls in Haupt- und Vorpuls aufgespalten. Durch $\lambda/2$ -Platten und geeignete Polarisatoren lassen sich die Vor- sowie die Hauptpulsenergie regeln. Im Lichtweg

3 Experimenteller Aufbau

des Vorpulses befindet sich ein motorisierter Spiegel, welcher einen eindeutigen Gang- und somit Zeitunterschied zwischen Vor- und Hauptpuls einführt.

Die Verstärkung findet in drei Stufen statt: die erste Verstärkerstufe - der regenerative Verstärker ist bereits beschrieben. Die zweite und die dritte Verstärkerstufe sind Vielpaß-Verstärker (engl. : "multi pass amplifier"); das bedeutet, daß der Laserpuls in einer bestimmten Spiegelanordnung mehrere Male durch die jeweiligen Ti:Sa-Verstärkerkristalle läuft. Der Strahlengang durch die Verstärkerkristalle erinnert an die Form von Schmetterlingsflügeln, daher auch der englische Name "butterfly amplifier". Im 4-Paß-Verstärker wird der Laserpuls auf 300 mJ und im 3-Paß-Verstärker auf höchstens 1.5 J verstärkt. Zwischen den beiden Multi-Paß-Verstärkern befindet sich ein Modenreinigungsteleskop, in dessen Fokus eine Quarzblende sitzt, welche den Strahl von hohen Ortsfrequenzen befreit (sog. räumliche Modenfilterung). Indem wir den Puls um den 3-Paß-Verstärker herumleiten, läßt sich die letzte Verstärkerstufe umgehen. Um Besetzungsinversion in den Verstärkerkristallen aufzubauen, werden diese von frequenzverdoppelten, gütegeschalteten Nd : YAG-Lasern gepumpt (blitzlampengepumpte Neodym-Yttrium-Aluminium-Granat Laser bei einer Wellenlänge von 532 nm). Ihre Phase ist dabei fest an das 10 Hz-Triggersignal des Oszillators gekoppelt.

Der verstärkte Puls wird schließlich durch ein 1:5-Teleskop auf einen Strahldurchmesser von etwa 5 cm aufgeweitet und durchläuft einen Gitterkompressor - das Gegenstück zu einem Strecker. Der Kompressor prägt dem Puls durch anormale Dispersion einen Down-Chirp auf, d. h. er gleicht die Laufzeitunterschiede der verschiedenen Farben, die im Strecker erzeugt werden, wieder aus. Dadurch verkürzt sich der Puls fast wieder auf seine ursprüngliche Pulsdauer von etwa 80 fs (FWHM). Die Pulse können dabei nicht ganz auf die ursprüngliche Pulsdauer verkürzt werden, da sich die spektrale Bandbreite beim Durchgang durch die Verstärkerkristalle reduziert (engl. : "gain narrowing"). Die Transmittivität des Kompressors liegt bei 60...70 %. Der Kompressor und die Strahlführung (engl. : "beam line") zur Kammer, in welcher sich die Meßanordnung befindet, ist evakuiert. Dies ist erforderlich, da die Pulse dort bereits eine so hohe Leistung besitzen, daß sie mit der Luft wechselwirken würden. Dadurch würde die Strahlqualität, d. h. das räumliche homogene Strahlprofil, leiden und sich die Ausbreitung möglicherweise ändern.

Die Pulsdauer und die -form untersuchen wir mit einem Dritte-Ordnung Autokorrelator. Ein Autokorrelator dritter Ordnung besitzt gegenüber einem Autokorrelator zweiter Ordnung den Vorteil, daß Vorpulse von Nachpulsen unterschieden werden können (Vorpulse sind Pulse, die dem Hauptpuls zeitlich vorauslaufen und Nachpulse die, die hinterherlaufen). Außerdem messen wir die Verkippung der Pulsfront. Zum Verständnis können wir uns den Laserpuls als eine Lichtscheibe mit einer Dicke von etwa 30 μm

3 Experimenteller Aufbau

Pulsenergie	Pulsdauer	Fokusfläche	Zentralwellenlänge	Intensität
$\lesssim 1 \text{ J}$	$\gtrsim 80 \text{ fs}$	$\gtrsim 5 \mu\text{m}^2$	795 nm	$\lesssim 10^{20} \text{ W/cm}^2$

Tabelle 3.1: Bestmögliche Pulseigenschaften.

(100 fs $\hat{=}$ 30 μm) und einem Durchmesser von etwa 5 cm vorstellen; die Normale der Lichtscheibe zeigt in Ausbreitungsrichtung des Pulses.

Ist die Pulsfront verkippt, so detektieren wir dies mit einem veränderten Michelson-Interferometer. Eine Pulsfrontverkipfung führt zu einer effektiven Verlängerung der Pulsdauer. Die können wir verhindern, indem wir die Kompressorgitter verstellen und so die Lichtscheibe gerade stellen, d. h. die Normale ist parallel zur Ausbreitungsrichtung. Schließlich gelangen die Pulse über die Beamline in die Vakuumkammer und treffen auf einen "off-axis"- Parabolspiegel, welcher sie fokussiert. Es ist vorteilhaft, einen reflektierenden Parabolspiegel zu verwenden, da dadurch ein großer Strahlquerschnitt des spektral breiten Pulses wellenlängenunabhängig (chromatisch fehlerfrei) abgebildet werden kann. Auf diese Weise bleibt der Brennpunkt und somit die Fokusfläche klein.

Bei bester Fokussierung auf eine Fokusfläche von etwa $5 \mu\text{m}^2$ erzielen wir mit einer Pulsdauer von $\tau_p \sim 100 \text{ fs}$ Laserintensitäten von bis zu 10^{20} W/cm^2 . Das Lasersystem arbeitet mit einer Repetitionsrate von 10 Hz. Wir fassen noch einmal die wichtigsten Pulsparameter zusammen (s. Tab. 3.1).

3.1.1 Faraday-Isolator

Aufgrund der Symmetrie unseres Aufbaus (s. Abb. 3.4) laufen Laserpulse direkt in das Lasersystem zurück. Um das Lasersystem zu schützen, bauen wir daher einen zusätzlichen Faraday-Isolator ein, welcher zurücklaufenden Laserpulse den Weg versperrt (s. Abb. 3.2). Wir verfolgen den Weg eines zurücklaufenden Pulses: dieser läuft rückwärts durch die 3- und den 4-Paß-Verstärker und wird dabei verstärkt - genau wie ein gewöhnlicher Puls, welcher in Vorwärtsrichtung läuft. Ob der Puls in Vorwärts- oder in Rückwärtsrichtung durch das Lasersystem läuft, spielt bisher keine Rolle. Es wird erst kritisch, falls die Laserpulse auf dem Rückweg nicht nur verstärkt, sondern auch fokussiert werden! Das 1 : 9-Teleskop vor dem regenerativen Verstärker verringert den Strahldurchmesser um das neunfache (von 9 mm auf 1 mm). Da der Strahldurchmesser quadratisch in die Querschnittsfläche (A_Q) eingeht, und diese umgekehrt proportional zur Intensität $I \sim 1/A_Q$ ist, vergrößert sich die Intensität etwa um das hundertfache, und die Optiken des (empfindlichen) regenerativen Verstärkers sind in Gefahr. Um den regenerativen Verstärker vor den zurücklaufenden Pulsen zu schützen, wird ein Faraday-Isolator

3 Experimenteller Aufbau

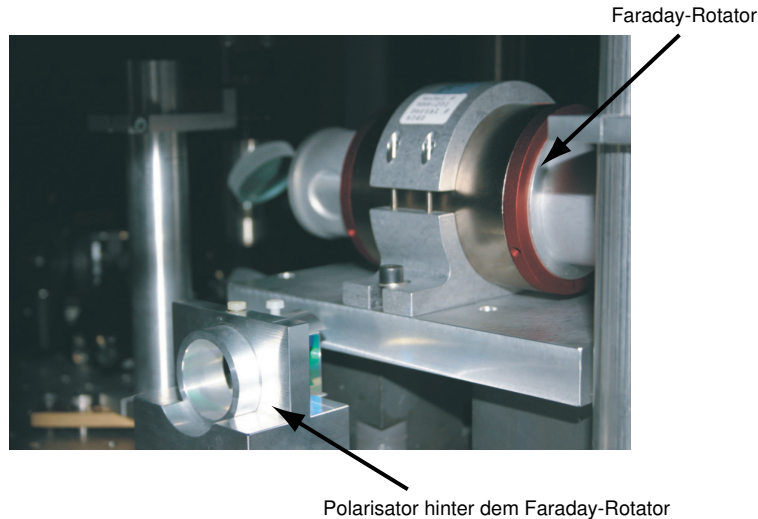


Abbildung 3.2: Eingebauter Faraday-Isolator. Dieses Foto zeigt den Faraday-Isolator mit einer Apertur von 20 mm, der zurücklaufende Pulse blockiert. Der Faraday-Isolator und der Polarisatorwürfel sind gekennzeichnet.

im aufgeweiteten Strahl vor dem 1:9-Teleskop eingebaut.

Ein Faraday arbeitet im allgemeinen so, daß ein Polarisator in einer ausgezeichneten Richtung linear polarisiertes Licht hindurch läßt, dessen Polarisationsvektor anschließend mittels eines Faraday-Drehers um 45° gedreht wird. Die Durchlaßrichtung eines nachfolgenden Analysator ist um 45° gegenüber derjenigen des Polarisators gedreht, so daß Licht, welches vom Polarisator kommt, hindurchtreten kann. In Rückwärtsrichtung wird das Licht durch den Faraday-Dreher in die gleiche Richtung wie vorher gedreht. Da es nun um 90° gegenüber der Durchlaßrichtung des Polarisators linear polarisiert ist, wird es vollständig blockiert. Die Wirkungsweise des Faraday-Isolators beruht auf dem Faraday-Effekt: Als Faraday-Effekt bezeichnen wir die Drehung der Polarisationssebene von linear polarisiertem Licht. Durch einen Stromfluß in einer Spule wird ein homogenes Magnetfeld erzeugt, welches die Drehung der Polarisationssebene bewirkt. Der Drehwinkel ist dabei proportional zur magnetischen Feldstärke, und der Drehsinn stimmt mit der Richtung des Stromflusses in der Spule überein. Das wesentliche ist, daß der Drehsinn unabhängig von der Richtung des hindurchtretenden Lichtes gleich ist, wobei der Drehsinn einer $\lambda/4$ -Platte hingegen richtungsabhängig ist. Im folgenden unterscheiden wir zwischen positivem (+) und negativem (-) Drehsinn.

Unser spezieller Faraday-Isolator (Firma: "Electro-Optics Technology", Typ: "BB8-81") besteht u. a. aus einem Polarisator und einem Faraday-Rotator (Faraday-Dreher

3 Experimenteller Aufbau

aus Quarzkristall), welcher die Polarisationssebene eines einfallenden Pulses um 45° (+) dreht. Dahinter befindet sich eine $\lambda/4$ -Platte, die zusammen mit einem zweiten Polarisator als Analysator wirkt. Die beiden Polarisatoren befinden sich in gekreuzter Stellung zueinander, d. h. die Durchlaßrichtungen unterscheiden sich um 90° . Die $\lambda/4$ -Platte dreht die Polarisationssebene des Pulses in die gleiche Richtung (+) wie der Faraday-Rotator weiter, und der zweite Polarisator läßt ihn passieren. Ein in Vorwärtsrichtung laufender p-polarisierter (parallel polarisierter) Puls verläßt den Faraday-Isolator somit s-polarisiert (senkrecht polarisiert). Ein nachfolgendes Periskop dreht seine Polarisation wieder um 90° , so daß er schließlich wieder p-polarisiert ist. Wir verfolgen nun den Puls auf seinem Rückweg durch den Faraday-Isolator. Der p-polarisierte Puls wird durch das Periskop um 90° gedreht, so daß er s-polarisiert ist. Der s-polarisierte Puls geht durch den zweiten Polarisator, die $\lambda/4$ -Platte dreht seine Polarisationssebene um 45° (-), und der Faraday-Rotator dreht sie wieder zurück (+). Der Puls bleibt s-polarisiert und fliegt am ersten Polarisator heraus. D. h. Der Faraday-Isolator läßt nur Pulse in Vorwärts-, aber nicht in Rückwärtsrichtung passieren und dient daher als optischer Isolator - wie eine Halbleiterdiode, die in Sperrichtung als Isolator und in Durchlaßrichtung als Leiter wirkt. Unser Faraday-Isolator ist spektral breitbandig ($\Delta\lambda = -100/+150$ nm) und besitzt eine weite Apertur von 20 mm. Bei einer Zentralwellenlänge von 800 nm beträgt seine Transmission 93 % und seine Isolationswirkung 30 dB.

Das am ersten Polarisator ausgekoppelte Licht beobachten wir mit einer CCD-Kamera. Dies ist nötig, um das Signal unsere zurücklaufende Pulse während der Experimente beobachten und kontrollieren zu können (s. Abb. 3.3). Es fällt auf, daß das zurücklaufende Signal, welches wir erhalten, falls wir in unserer Meßanordnung zwei gegenläufige Pulse in einen Helium-Gasstrahl fokussieren, um Größenordnungen höher ist als das reflektierte Signal, welches bei üblichen Meßanordnungen mit nur einem Puls reflektiert wird. Die Schicht, mit der die einzelnen Teile des ersten Polarisator zusammengeklebt waren, wurde nach einigen tausend Laserschüssen zerstört. Daraus und aus dem hohen Signal des zurücklaufenden Pulses schließen wir, daß die zurücklaufenden Pulse eine nicht zu unterschätzende Intensität besitzen. Mit Polarisatoren, welche nicht zusammengeklebt sind, sondern einen Luftspalt besitzen, sollte deren Zerstörschwellen um ein Vielfaches höher sein.

Zur Abschätzung der Stärke des zurücklaufenden Pulses verwendeten wir Laserpapier (engl. : "laser burn paper"), welches sich entsprechend der auftreffenden Laserintensität schwärzt. Bei einer Energie von 20 mJ war das Signal eines einzigen Laserschusses in Vorwärtsrichtung vergleichbar mit dem Signal von 10 Laserschüssen in Rückwärtsrichtung. Nehmen wir an, daß sich das Papier linear mit der Anzahl der Laserschüsse schwärzt, so

3 Experimenteller Aufbau

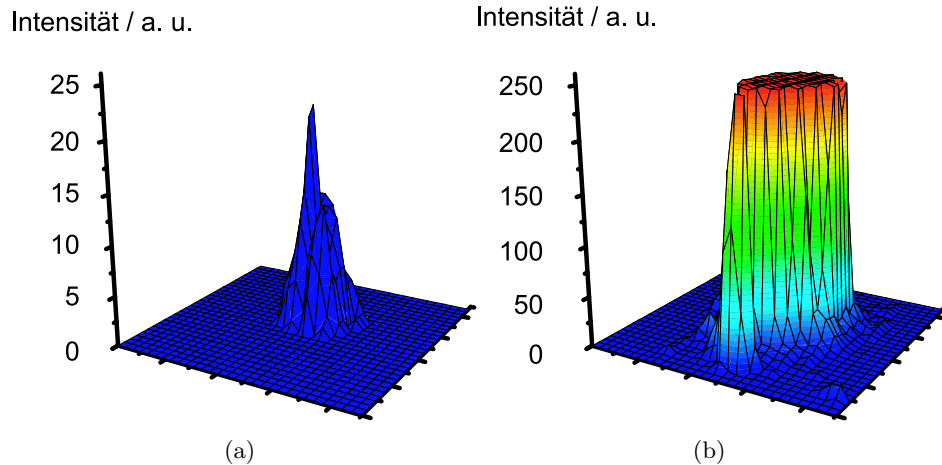


Abbildung 3.3: Zurücklaufender Laserpuls. Mittels einer Diode aufgenommene Intensität des zurücklaufenden Laserpulses. Dieser läuft in Rückwärts- bzw. Sperrrichtung durch einen Faraday-Rotator. Dieser dreht die Polarisationssebene des zurücklaufenden Laserpulses so, daß er an einem Polarisator herausgekoppelt wird. a) Reflektiertes Licht, das entsteht, wenn ein einzelner Laserpuls in das Target (Helium-Gasstrahl) fokussiert wird - dies ist die gewöhnliche experimentelle Situation. b) Zurücklaufender Laserpuls im Zweistrahlexperiment. Der in Vorwärtsrichtung laufende Laserpuls wird durch einen Strahlteiler in zwei Pulse aufgespalten, welche mittels zweier Parabolspiegel unter einem Winkel von 180° in das Target fokussiert werden, nach der Reflexion an dem jeweils gegenüber liegenden Parabolspiegel zurücklaufen und sich am Strahlteiler wieder vereinigen. Dadurch entsteht ein zurücklaufender Puls, welcher auf seinem Wege durch das Lasersystem verstärkt und durch den Faraday-Isolator herausgekoppelt wird. Das Signal ist um Größenordnungen höher als das Signal in (a). Die 8-bit CCD-Kamera (0...255 Farbstufen), die den zurücklaufenden Puls auffängt, ist übersteuert.

ist das Signal in Rückwärtsrichtung etwa zehnmals so schwach wie das Signal in Vorwärtsrichtung. Das bedeutet, daß während dieser einzelnen Messung der rückwärtslaufende Laserpuls an der Stelle des Isolators, d. h. vor der Fokussierung durch das 1 : 9-Teleskop, unkritisch für das Lasersystem war.

Kritisch ist allerdings die relativistische Autokorrelationsmessung, wobei wir die die Foki u. a. entlang der optischen Achse, d. h. in z -Richtung verschieben (s. 4.19): Liegen die Foki auseinander, d. h. der Fokus eines Parabolspiegels liegt jeweils außerhalb der Brennweite des anderen Parabolspiegels, so divergiert der Laserstrahl auf dem Rückweg durch das Lasersystem; liegen sie ineinander, d. h. der Fokus eines Parabolspiegels liegt jeweils innerhalb der Brennweite des anderen Parabolspiegels, so werden sie in das Lasersystem fokussiert. Das Ineinanderschieben ist daher gefährlich für das Lasersystem, und der zerstörte Polarisator läßt sich darauf zurückzuführen. In weiteren Experimenten ist zu überprüfen, wie stark das Signal des zurücklaufenden Pulses ansteigt, falls die letzten Verstärkerstufe, welche eine Verstärkung auf eine Höchstenergie von etwa 1 J leistet, dazu geschaltet wird.

3.2 Meßanordnung

Zunächst zeigen wir die gesamte Meßanordnung im Überblick (s. Abb. 4.14). Hinter dem Kompressor befindet sich ein dielektrischer Spiegel, der unseren ankommenden p -polarisierten, d. h. in x -Richtung linear polarisierten, Ti:Sa-Laserpuls nicht vollständig reflektiert, sondern einen Bruchteil von ungefähr 1/1000 hindurch läßt. Den reflektierten Anteil bezeichnen wir als Hauptpuls und den transmittierten als Abtast- bzw. Probepuls (engl.: "probe pulse") [37, 31].

Der Ti:Sa-Hauptpuls verläßt den Kompressor, läuft durch die Strahlführung und tritt in die Targetkammer ein. Dort trifft er auf einen Strahlteiler, der ihn in zwei Teilstrahlen aufteilt (s. Abb. 3.5). Der Strahlteiler besteht aus einer Quarzplatte mit einer Dicke von 2.5 mm und einem Durchmesser von 100 mm. Da der Strahlteiler genau bei der Zentralwellenlänge des Hauptpulses von 795 nm eine Transmission von 50 % beträgt, besitzen der am Strahlteiler reflektierte und der transmittierte Teilstrahl die gleiche Energie. Die beiden Teilstrahlen treffen auf zwei goldbeschichtete off-axis Parabolspiegel mit einer Brennweite von 120 mm. Zwei schwarz eloxierte Metallbleche mit einem Durchmesser von 70 mm dienen als Schließer (engl. : "shutter"). Sie werden mit mechanischen Drehdurchführung bedient und dazu genutzt, die beiden Teilstrahlen unabhängig voneinander abdecken zu können. Nach der Reflexion an den Oberflächen der Parabolspiegel laufen sie in entgegengesetzte Richtungen, ihre Foki sitzen oberhalb einer zylindrischen Gasdüse.

3 Experimenteller Aufbau

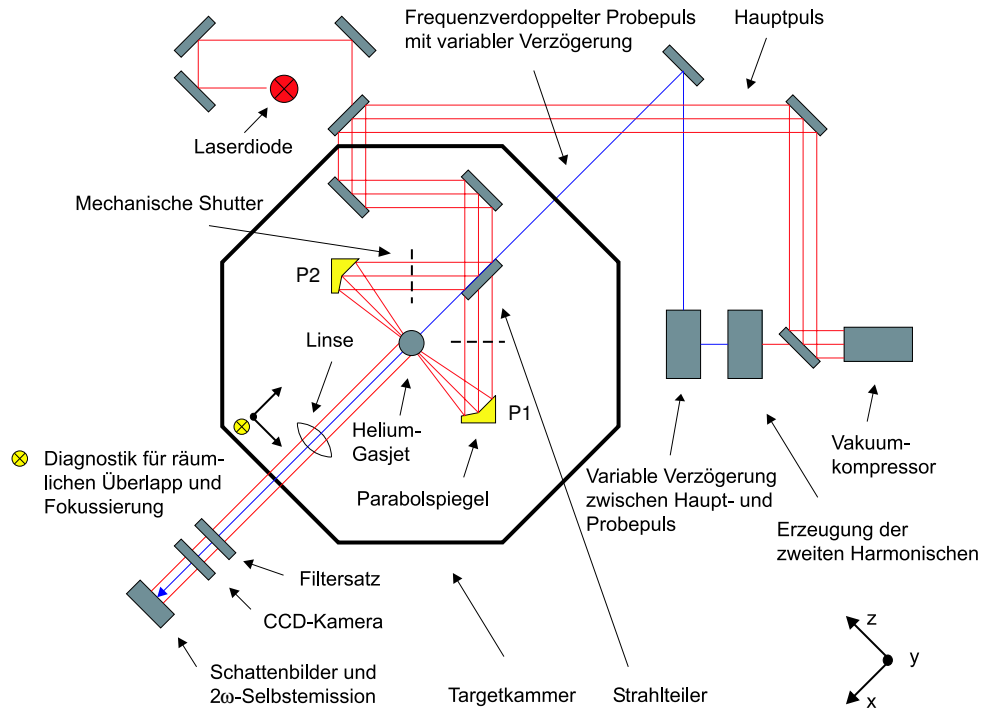


Abbildung 3.4: Experimenteller Aufbau. Eine gewöhnliche Laserdiode (roter Kreis mit Kreuz) wird zur groben Ausrichtung des Aufbaus verwendet. Der verkürzte Ti:Sa-Hauptpuls (rote Linien) tritt in die Vakuumkammer ein, trifft auf einen 50/50-Strahlteiler und wird in zwei Teilstrahlen aufgespalten. Die beiden Teilstrahlen werden durch zwei Parabolspiegel (P1: erster Parabolspiegel, P2: zweiter Parabolspiegel) in entgegengesetzte Richtung in einen gepulsten Helium-Gasstrahl fokussiert. Die beiden Wege lassen sich durch zwei mechanische Shutter unabhängig voneinander öffnen oder schließen. Der gemeinsame Fokus der beiden Parabolspiegel liegt innerhalb des Gasstrahls, d. h. oberhalb der Öffnung der Gasdüse. Ein frequenzverdoppelter Probepuls (blaue Linie), dessen zeitliche Verzögerung (bzgl. des Hauptpulses) veränderlich einstellbar ist, dient dazu, das Gebiet der Laser-Plasma-Wechselwirkung zu untersuchen. Er läuft durch eine Sammellinse, passiert einen 2ω -Interferenzfilter und trifft auf eine CCD-Kamera (Aufnahme von Schattenbildern). Außerdem wird die 2ω -Selbstemission des Plasmas (zweite Harmonische der nichtlinearen Thomsonstreuung) auf eine CCD-Kamera abgebildet. Eine Fokussier- und Überlappdiagnostik ist von innen an die Kammerwand befestigt (gelbes Kreuz). Die Diagnostik kann so verfahren werden, daß die Foki der beiden Laserpulse auf eine CCD-Kamera abgebildet werden; ein Filtersatz verbessert die Fokusmessung. In Wirklichkeit werden sowohl die Bilder der 2ω -Selbstemission als auch die Schattenbilder unter einem Winkel von 84° beobachtet (in der Zeichnung 90°).

3 Experimenteller Aufbau

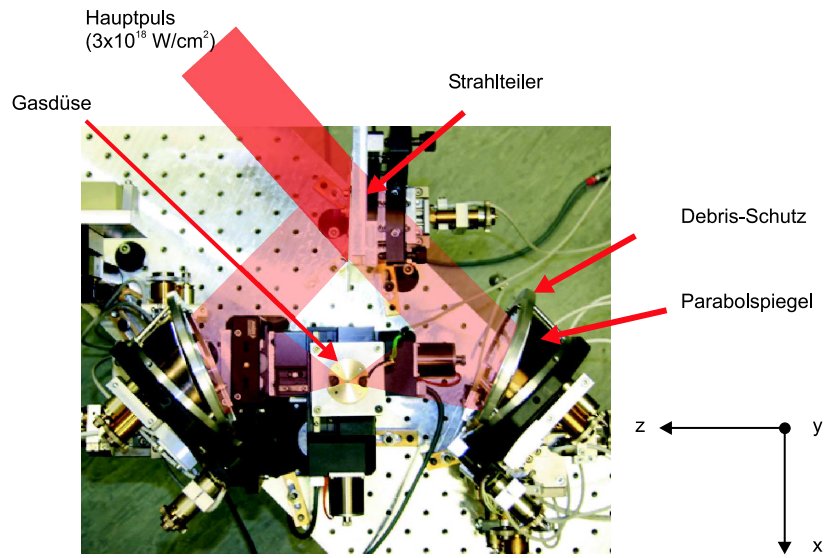


Abbildung 3.5: Strahlteiler, Parabolspiegel und Gasdüse. Das Photo zeigt den Strahlengang des Hauptpulses nach Eintritt in die Targetkammer. Vor den beiden Parabolspiegeln befinden sich abnehmbare und austauschbare Quarzplatten, um die goldbeschichtete Oberflächen der Parabolspiegel vor Verschmutzungen und möglicherweise entstehenden Teilchen zu schützen. Der Strahlteiler, die Parabolspiegel und der Targethalter, welcher die Gasdüse bewegt, sind vollständig motorisiert. Die Motoren sind vakuumtauglich und reproduzierbar rechnergesteuert.

3 Experimenteller Aufbau

Um die goldbeschichteten Oberflächen der Parabeln vor Verschmutzungen (engl. :”debris”) zu schützen, befinden sich vor jedem Parabolspiegel zwei austauschbare Quarzplatten. Zwei Spiegel, die sich unmittelbar hinter dem Eintrittsfenster der Targetkammer befinden, führen nach zweifacher Reflexion zu einem Parallelversatz. Dies ist nützlich, um die Foki in der Mitte der Targetkammer legen zu können.

Der Gasstrahl ist gepulst; wir erzeugen ihn mit einer zylindrischen Gasdüse, die auf dem Targethalter montiert ist. Bei einem Helium-Hintergrunddruck von 50 bar erzeugt sie Gasausstöße mit einer Wiederholrate von 10 Hz. Da sie ist mit dem Lasersystem synchronisiert ist, trifft jeder Laserschuß den Gasstrahl auf die gleiche Weise, und außerdem strömt zwischen aufeinanderfolgenden Laserschüssen kein Gas aus. Wir vermeiden somit, daß der Druck in der Vakuumkammer zu sehr ansteigt und schonen somit die Pumpen, die sonst nach einiger Zeit überlastet wären. Die zweite Harmonische, die bei der Laser-Plasma-Wechselwirkung entsteht, bilden wir in x -Richtung auf eine CCD-Kamera ab.

Nicht nur die Gasdüse und das Lasersystem, sondern auch die CCD-Kamera sind im Gleichlauf, d. h. auf 10 Hz synchronisiert. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Laserschüssen verstreicht eine Zeit von 100 ms ($\hat{=}1/10$ Hz). Die Belichtungszeit der CCD-Kamera liegt bei wenigen Milisekunden. Während dieser Zeit integriert sie sämtliches Licht, welches auf sie trifft. D. h. Sie integriert über einen einzigen Laserschuß. Die Pulse, die wir in das Plasma fokussieren, wechselwirken mit diesem während einer Zeit von einigen Femto- bis Pikosekunden. Das hat zur Folge, daß die Kamera das während dieser kurzen Wechselwirkungszeit ausgesandte Licht vollständig integriert - die aufgenommenen Bilder sind zeitintegriert. Beleuchten wir das Plasma mit einem Probepuls, welcher genauso kurz ist wie der Hauptpuls, so entspricht die Belichtungszeit der gemeinsamen Pulsdauer von $\tau_p \sim 100$ fs - die Aufnahmen sind zeitaufgelöst!

Wir verfolgen nun den Weg des Probepulses. Der Probepuls läuft in einen BBO-Kristall, der durch einen nichtlinearen optischen Prozeß die zweite Harmonische des infraroten Hauptpulses erzeugt (engl. : ”second harmonic generation”, SHG). Sein Lichtweg läßt sich über eine Spiegelanordnung einstellbar verlängern. Wir können somit des frequenzverdoppelten Probepuls bezüglich des Hauptpulses veränderlich zeitlich verzögern. Die zeitliche Verzögerung ist innerhalb einiger Nanosekunden variabel einstellbar - mit einer zeitlichen Auflösung von $\Delta\tau_p = 100$ fs. Dies ist für die zeitaufgelöste Beobachtung der Pulsausbreitung innerhalb des Plasmas und die zeitliche Überlagerung der beiden Teilstrahlen erforderlich (s. Kap. 4).

Um die beiden Teilstrahlen nacheinander fokussieren und ihre Foki räumlich überlappen zu können, verwenden wir die ”Fokussier- und Überlappdiagnostik” (s. Abb. 3.6, 3.7). Die Diagnostik ist von innen an die Targetkammer befestigt und kann in x , y , z -

3 Experimenteller Aufbau

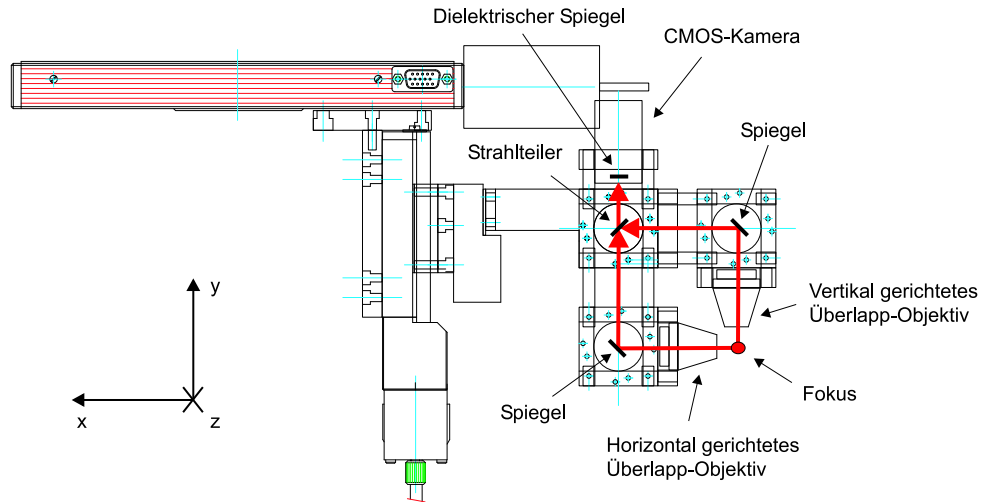


Abbildung 3.6: Fokussier- und Überlappdiagnostik. Die Diagnostik ist an der Innenseite der Vakuumkammer befestigt und kann in alle drei Raumdimensionen bewegt werden. Sie besteht aus zwei Paaren von Mikroskopobjektiven 40-facher Vergrößerung (zwei Fokussier- und zwei Überlappobjektive). Die Fokussierobjektive sind in der Zeichnung der Übersichtlichkeit wegen weggelassen. Die Überlappobjektive werden benutzt, um die Foki der beiden gegenläufigen Laserpulse zu beobachten und räumlich überlagern zu können (die beiden Pulse laufen in z -Richtung). Das horizontale Überlappobjektiv schaut in x -Richtung, und das vertikale schaut in y -Richtung auf den Fokus (roter Punkt). Der gemeinsame Fokus wird auf zwei verschiedenen Lichtwegen (rote Pfeile), die durch einen Strahlteiler wieder vereinigt werden, auf eine CMOS-Kamera abgebildet. Die CMOS-Kamera sitzt oben auf der Diagnostik. In jedem der beiden Lichtwege befindet sich ein Shutter, so daß die Bilder des horizontalen und des vertikalen Überlappobjektivs unabhängig voneinander aufgenommen werden können. Unterhalb der CMOS-Kamera liegt ein dielektrischer Spiegel, welcher für 1ω -Streulicht des Lasers undurchlässig ist. Idee und Aufbau: Kay-Uwe Amthor.

3 Experimenteller Aufbau

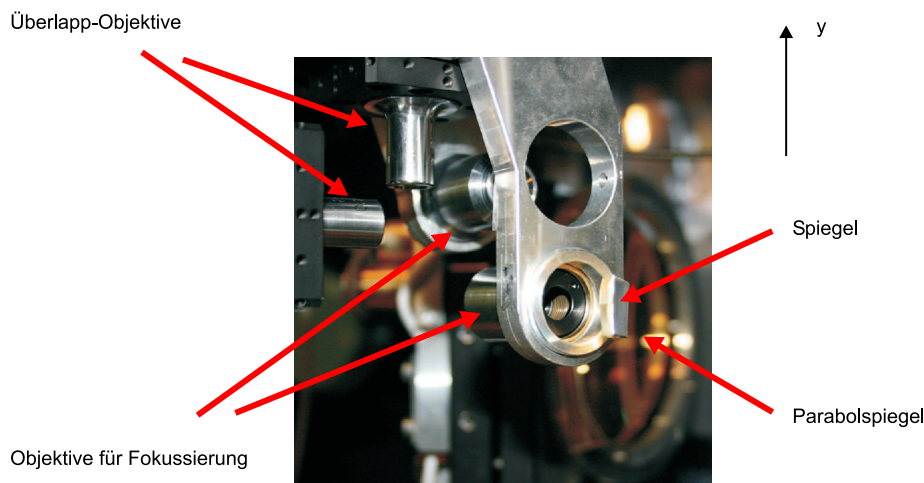


Abbildung 3.7: Fokussier- und Überlappobjektive.

Richtung rechnergesteuert mit einer Motorkalibrierung von $5\ \mu\text{m}/\text{Schritt}$ verfahren werden. Der z -Motor ist zusätzlich mit einem Haltestrom ausgestattet, der verhindert, daß die Diagnostik aufgrund ihres eigenen Gewichtes herunterrutscht und möglicherweise ihre Position verliert. Da sie unmittelbar die Wand der Vakuumkammer berührt, verändert sich ihre Position leicht beim Abpumpen. Während der Fokussierung ist daher darauf zu achten, daß der durch die Fokussierobjektive abgebildete Strahl auf der CCD-Kamera bleibt.

Die Fokussier- und Überlappdiagnostik besteht aus vier Mikroskopobjektiven 40-facher Vergrößerung: Zwei Objektive dienen zur Fokussierung (Fokussierobjektive) und zwei weitere zur Justage des räumlichen Überlapp (Überlappobjektive). Die Fokussierobjektive schauen in entgegengesetzte Richtungen und sind parallel zur z -Achse befestigt, während die Überlappobjektive in x - und y -Richtung ausgerichtet sind. Hinter den Fokussierobjektiven befinden sich jeweils zwei kleine Metallspiegel, die so gebogen sind, daß die Foki auf eine feststehende CCD-Kamera außerhalb der Targetkammer reflektiert und abgebildet werden können. Die Überlappobjektive schauen von oben (vertikales Überlappobjektiv) und von der Seite (horizontales Überlappobjektiv) auf denselben Punkt im Raum (gemeinsamer Fokus). Die Anordnung ermöglicht es, zu überprüfen, ob die Foki der gegenläufigen Strahlen in allen drei Raumdimensionen überliegen. Mit dem vertikalen Überlappobjektiv sehen wir, ob die Foki in x -Richtung übereinanderliegen, mit dem horizontalen Überlappobjektiv, ob sie in y -Richtung übereinanderliegen. Ob die Foki in z -Richtung übereinander liegen, können wir mit beiden Überlappobjektiven

3 Experimenteller Aufbau

erkennen. Wir betrachten nun den Strahlengang von Lichtstrahlen, die von dem gemeinsamen Fokus ausgehen (s. Abb. 3.6): Lichtstrahlen laufen durch das horizontale und das vertikale Überlappobjektiv, werden von kleinen Metall-(Aluminium)spiegeln reflektiert und treffen schließlich auf einen Strahlteiler. Vor den Spiegeln befinden sich jeweils motorisierte, mechanische Shutter, die wir unabhängig voneinander öffnen oder schließen können. Dadurch läßt sich zwischen den beiden Abbildungswegen unterscheiden, und die Bilder können getrennt aufgenommen werden - andernfalls wären sie immer überlagert. Die Lichtstrahlen werden durch den Strahlteiler vereint, laufen durch einen dielektrischen Spiegel und treffen auf eine CMOS-Kamera (engl. : "complementary metal oxide semiconductor"). Der dielektrische Spiegel ist innerhalb einer spektralen Bandbreite von 50 nm um die Zentralwellenlänge des Lasers von 795 nm hochreflektierend. Bei näherungsweise senkrecht einfallendem Strahl, d. h. für einen Einfallswinkel von $0^\circ \dots 20^\circ$, besitzt er eine Reflektivität von 99 %. Aufgrund seiner hohen Reflektivität bei einer schmalen Bandbreite ($0.15 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$) um die Laserfrequenz ($2.47 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$) ist er in der Lage, störendes 1ω -Streulicht des Lasers fast vollständig zu blocken.

Die CMOS-Kamera arbeitet im PAL-Modus (engl. : "phase alternating line", Fernsehstandard) und nimmt 50 Bilder ("frames") je Sekunde auf. Sie kann nicht mit dem Lasersystem synchronisiert werden. Da zwischen zwei aufeinanderfolgenden Laserschüssen eine Zeit von 0.1 s ($\hat{=} 10 \text{ Hz}$) verstreicht, und die Kamera alle 0.02 s ($\hat{=} 50 \text{ Hz}$) ein Bild aufnimmt, sind nur wenige Bilder schwarz. Im PAL-Modus zeichnet die CMOS-Kamera für jedes Bild abwechselnd die ungeraden und die geraden Zeilen auf, d. h. 25 Halb- und 25 Vollbilder. Ein Problem stellt die kurze Laser-Plasma-Wechselwirkungszeit dar, welche im Femtosekundenbereich liegt, und die Belichtungszeit der Kamera angibt. Da die Kamera nur einen kurzen Lichtblitz sieht, ist sie nicht so schnell in der Lage, sowohl die geraden als auch die ungeraden Zeilen aufzunehmen. Um auswertbare Bilder zu erhalten, ziehen wir die Halb- und die Vollbilder zeilenweise auseinander und addieren sie jeweils ("Labview 7", "de-interlacing"). Ein Vorteil ist, daß die CMOS-Kamera wenig Strom verbraucht und daher nicht so heiß wird. Sie arbeitet somit auch im Vakuum - im Gegensatz zu einer CCD-Kameras, die wir nur außerhalb des Vakuums betreiben können. Allerdings müssen wir auch die CMOS-Kamera nach einiger Zeit immer wieder ausschalten, um sie vor Überhitzung zu schützen; bei Vakuumdrücken von 10^{-5} mbar fließt entstehende Hitze nur schlecht ab.

Die optischen Elemente, die sich in der Vakuumkammer befinden, stehen auf einer Bodenplatte, welche auf drei Punkten (kugel-)gelagert ist und die den Boden der Vakuumkammer nicht unmittelbar berührt. Dies hat den Vorteil, daß sich, falls sich die Kammer aufgrund der Druckänderung beim Evakuieren verzieht, die Ausrichtung der

3 Experimenteller Aufbau

Strahlteiler	Targethalter	Parabolspiegel	Überlapp- und Fokussierdiagnostik
0.028 μm /Schritt	5 μm /Schritt	0.03 μm /Schritt	5 μm /Schritt

Tabelle 3.2: Schrittweite der einzelnen Motoren.

optischen Elemente nicht ändert. Der Strahlteiler, die beiden Parabolspiegel und der Targethalter sind motorisiert, um genau und reproduzierbar ausrichten und verfahren zu können. Der Strahlteiler kann in z -Richtung, der Targethalter und die Parabolspiegel in x , y , z -Richtung bewegt werden; die Parabolspiegel rotieren zusätzlich um die x - und die y -Achse. Die beiden Rotationsfreiheitsgrad sind nötig, um die Parabolspiegel zu verkippen und dadurch den Astigmatismus (die strichförmige Verzeichnung) zu beseitigen.

Kleine Schrittweiten, die wir insbesondere für den Strahlteiler und die Parabolspiegel benötigen, erreichen wir durch geeignete Übersetzung der Zahnräder. Die Motorkalibrierung beträgt für den Strahlteiler 0.028 μm , für den Targethalter 5 μm und für die Parabolspiegel 0.03 μm je Schritt (s. Abb. 3.2). Die Motoren arbeiten zuverlässig im Hochvakuum bei einem Druck von 10^{-5} mbar und sind vollständig rechnergesteuert. Zur Steuerung verwenden wir die Programmierumgebung "Labview 7". Die Schnittstelle zwischen den Motoren und den Rechnern können mit einem Programm (sog. "port monitoring program") auf Fehler überprüft werden.

4 Experimentelle Messungen

In diesem Kapitel beschreiben wir die experimentellen Methoden und Messungen und deuten die Meßergebnisse. Dabei erklären wir, wie wir die beiden gegenläufigen Laserpulse mit hoher Genauigkeit in Raum und Zeit überlagern können. Außerdem bestimmen wir die genauen Eigenschaften des räumlichen und zeitlichen Überlapps der beiden Pulse (s. Kap. 4.3). Schließlich ermitteln wir aus der Autokorrelationsmessung bei relativistischer Intensität experimentelle Werte für die Pulsdauer und die Rayleighlänge (s. Kap. 4.4).

4.1 Eigenschaften der fokussierten Laserpulse

Zur Beobachtung der Foki bilden wir diese mit unseren Fokussierobjektiven (s. Abb. 3.6, 3.7) nacheinander vergrößert auf eine infrarotempfindliche CCD-Kamera ab (s. Abb. 4.1). Wir bilden die y, z -Ebene ab und erhalten die transversale Intensitätsverteilung in jedem der Foki. Um unsere Mikroskopobjektive zu schützen, schwächen wir die Laserpulse ab - ein Objektiv, das in einen nicht abgeschwächten fokussierten Strahl schaut, wird blind. Dazu verwenden wir eine Anordnung von zwei drehbaren dielektrischen Spiegel, die so zueinander orientiert werden können, daß sie den Laserpuls um bis zu 10^{-6} , d. h. 6 Größenordnungen, abschwächen. Wir schwächen unsere Energie um $10^{-5} \dots 10^{-6}$ ab. Durch Verkippen der Parabolspiegel, d. h. Drehen um die horizontale und vertikale Achse, verringern wir den Astigmatismus.

Die CCD-Kamera zeigt 8-bit Bilder der Foki (Farbstufen: 0...256). Wir kalibrieren die Bilder, indem wir vor den Strahlteiler, also in den unfokussierten Strahl, ein Gitter stellen und dieses durch die jeweiligen Fokussierobjektive auf die CCD-Kamera abbilden. In der Brennebene der Parabolspiegel, d. h. in der y, z -Ebene auf der CCD-Kamera, entsteht ein Beugungsmuster. Bei einem Gitter sind die Abstände der Beugungsmaxima in z -Richtung (Δz) gegeben durch

$$\Delta z = \frac{\lambda_0 f}{d}, \quad (4.1)$$

wobei λ_0 die Zentralwellenlänge des Lasers, f die Brennweite des Parabolspiegels und

4 Experimentelle Messungen

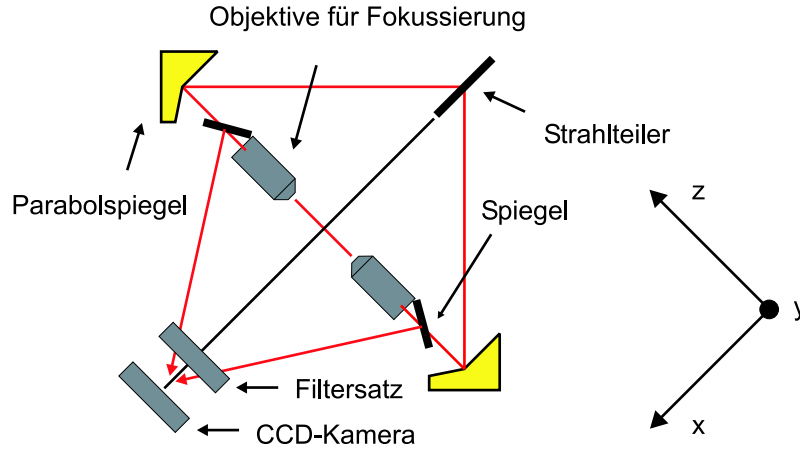


Abbildung 4.1: Fokussierung der beiden Foki. Die Foki der beiden Parabolspiegel werden nacheinander auf die CCD-Kamera abgebildet. Die von den jeweiligen Foki ausgehenden Lichtstrahlen gehen durch Fokussierobjektive, werden mittels gebogener Spiegel reflektiert, laufen durch einen Filtersatz und treffen auf die CCD-Kamera.

Fokusbilder	Überlappbilder	2ω -Bilder
$0.033 \mu\text{m}/\text{pixel}$	$1.326 \mu\text{m}/\text{pixel}$	$1.863 \mu\text{m}/\text{pixel}$

Tabelle 4.1: Kalibrierung der Fokus-, Überlapp- und 2ω -Bilder (Schattenbilder und Selbstemission des Plasmas)

d die Gitterkonstante sind. Bei unserer Zentralwellenlänge von 795 nm , der Brennweite unserer Parabolspiegel von 120 mm und der Gitterkonstanten von 10 mm erhalten wir für die Abstände der Beugungsmaxima $\Delta z = 9.54 \mu\text{m}$. Die Abstände der Beugungsmaxima auf der CCD-Kamera bestimmen wir mit einem Bildverarbeitungsprogramm in "Laview 7" zu $\Delta z = 289 \text{ pixel}$. Daraus ergibt sich die Kalibrierung der Fokusaufnahmen zu $0.033 \mu\text{m}/\text{pixel}$ (s. Abb. 4.1).

Um den Aufnahmebereich der CCD-Kamera zu erhöhen, verwenden wir für verschiedene Aufnahmen unterschiedlich starke Graufilter bekannter Transmission: mit dem stärksten Filter nehmen wir die Intensität auf, so daß die Kamera gerade nicht übersteuert ist. Anschließend verringern wir die Filterstärken nacheinander, nehmen dabei jeweils ein übersteuertes Bild auf. Dadurch erhöht sich der dynamische Bereich der Messung auf etwa drei Größenordnungen. Außerdem werden so auch die schwachen Intensitätsbereiche am Rand erfaßt. Die mit unterschiedlichen Filterstärken aufgenommenen 8-bit Bilder setzen wir zu einem einzigen Bild zusammen. Dabei legen wir alle Flächenelemen-

4 Experimentelle Messungen

	Erster Fokus	Zweiter Fokus
Gemittelte Fokusfläche ($1/e$)	$(5.6 \pm 0.6) \mu\text{m}^2$	$(6.3 \pm 0.6) \mu\text{m}^2$
Gemittelter $q_{1/e}$ -Parameter	0.35	0.40

Tabelle 4.2: Eigenschaften der Foki.

te, deren Pixelwerte größer als das $1/e$ -fache der Maximalintensität sind wie bei einem Puzzle zusammen (s. Abb. 4.2) und ersetzen den Wert eines übersteuerten Bildpunktes durch denjenigen eines nicht übersteuerten Bildpunktes - gewichtet mit der zugehörigen Filterstärke. Schließlich integrieren wir über alle Bildpunkte, deren Pixelwerte über dem $1/e$ -fachen des Maximalwertes liegen, und erhalten dadurch die Energie ($E_{1/e}$). Die Gesamtfläche dieser Bildpunkte bezeichnen wir als $1/e$ -Fläche ($A_{1/e}$), und die Strahltaile (W_0) berechnen wir über $A_{1/e} = \pi W_0^2$ (kreisförmige Querschnittsfläche).

Die Intensität eines Gauß'schen Strahls fällt innerhalb eines radialen Abstandes von der optischen Achse von $r_{1/e} = W(z)/\sqrt{2}$ auf das $1/e$ -fache der Intensität ab (s. Anh. 6.11). In der Ebene, die durch den Fokus geht ($z = 0$), gilt

$$r_{1/e} = W_0/\sqrt{2}, \quad (4.2)$$

wobei W_0 die Breite der Strahltaile ist. Ein Gauß'scher Strahl kann auf eine Fokusfläche von

$$A_{\text{ideal}} = \frac{\lambda_0^2 f^2}{\pi W_0^2} = \frac{\lambda_0^2 f^2}{2\pi r_{1/e}^2} \quad (4.3)$$

fokussiert werden, wobei λ_0 die Zentralwellenlänge des Lasers, f die Brennweite der fokussierenden Optik und $r_{1/e}$ der radiale Abstand von der optischen Achse sind, bei welcher die Intensität auf das $1/e$ -fache abfällt (Herleitung durch Anwendung einer "ABCD-Strahlmatrix" auf einen Gauß'schen Strahl, der mittels einer Linse fokussiert wird, Bedingung: $z_0 \gg f$, Lit. [2]). Für die Brennweite des Parabolspiegels von $f = 120$ mm, die Zentralwellenlänge von $\lambda_0 = 795$ nm und den Strahldurchmesser von $2r_{1/e} = 50$ mm ergibt sich eine minimale $1/e$ -Fokusfläche von $A_{\text{ideal}} = 2.3 \mu\text{m}^2$. Dies entspricht einer minimalen Strahltaile von $W_{0,\text{ideal}} = 0.86 \mu\text{m}$.

Die experimentell bestimmten Flächen des ersten und des zweiten Fokus betragen (s. Tab. 4.2, vgl. Abb. 4.2)

$$\bar{A}_{1,\text{exp}} = (5.6 \pm 0.6) \mu\text{m}^2, \quad \bar{A}_{2,\text{exp}} = (6.3 \pm 0.6) \mu\text{m}^2. \quad (4.4)$$

4 Experimentelle Messungen

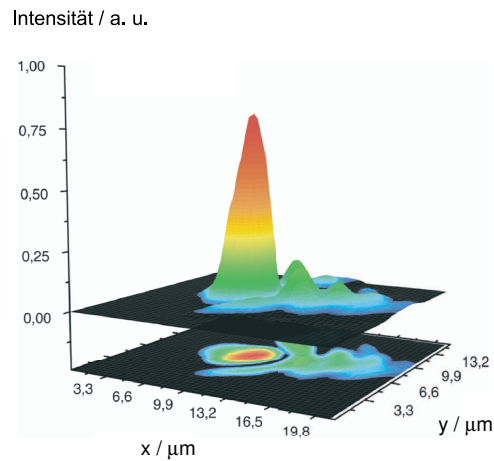


Abbildung 4.2: Intensitäten der Foki. Die Foki der beiden Laserpulse werden mit Mikroskopobjektiven (Vergrößerung: 40-fach) auf eine CCD-Kamera (8-bit) abgebildet. Das dreidimensionale Bild zeigt in linearer Darstellung die Intensität über der Fokusfläche. Das Bild ist aus mehreren 8-bit Bildern mit jeweils unterschiedlicher Filterstärke zusammengesetzt, um auch die Randbereiche der Foki besser erfassen zu können. Die Fokusfläche, bei der die Intensität auf das $1/e$ -fache abfällt, beträgt etwa $6 \mu\text{m}^2$. An den Randbereichen sind Nebenmaxima zu erkennen ($\lesssim 10\%$ des Hauptmaximums) - dies sind Abweichung vom idealen Strahlprofil.

4 Experimentelle Messungen

Daraus ergeben sich die zugehörigen Tailenbreiten

$$W_{0,1,\text{exp}} = (1.3 \pm 0.4) \mu\text{m}, W_{0,2,\text{exp}} = (1.4 \pm 0.4) \mu\text{m} \quad (4.5)$$

Als absoluten Größtfehler ($\Delta A = \pm 0.6$) der Fokusfläche geben wir die maximale Abweichung von den Mittelwerten an (relative Fehler: $\Delta A/A \approx \pm 10\%$).

Ein Maß für die Abweichung eines realen von einer idealen Gauß'schen TEM₀₀-Mode beschreibt die M^2 -Zahl

$$M^2 = \frac{W_{0,\text{exp}}\theta_{\text{exp}}}{W_{0,\text{ideal}}\theta_{\text{ideal}}}, \quad (4.6)$$

wobei $W_{0,\text{exp}}$ bzw. θ_{exp} Fokusradius und Divergenzwinkel des realen und $W_{0,\text{ideal}}$ bzw. θ_{ideal} die des idealen Strahls sind. Die M^2 -Zahl ist immer größer als eins ($M^2 > 1$). Besitzen beide Strahlen vor der Fokussierung die gleiche Divergenz ($\theta_{\text{exp}} = \theta_{\text{ideal}}$), so ergibt sich $M^2 = W_{0,\text{exp}}/W_{0,\text{ideal}}$. D. h. die Tailenbreite des realen Strahls ist um den Faktor M^2 größer als die des idealen Strahls; da die Rayleighlänge quadratisch mit der Tailenbreite geht ($z_0 \sim W_0^2$), ist die Rayleighlänge um den Faktor M^4 größer.

Die M^2 -Zahl unserer Laserstrahlen beträgt

$$M_{P1,\text{exp}}^2 \approx 1.6, M_{P2,\text{exp}}^2 \approx 1.7. \quad (4.7)$$

D. h. Unsere Laserstrahlen sind nicht ganz so scharf fokussiert wie ein idealer Gauß'scher Strahl ($M_{\text{ideal}}^2 = 1$), sondern etwa 2-fach beugungsbegrenzt.

Das Verhältnis der Energie innerhalb der $1/e$ -Fläche zur gesamten Energie, die auf die CCD-Kamera trifft, bezeichnen wir als (s. Anh. 6.11)

$$q_{1/e} = E_{1/e}/E_{\text{CCD}}. \quad (4.8)$$

Der theoretische Wert für einen idealen Gauß'schen Puls beträgt $q_{\text{ideal}} = 0.63$. D. h. Innerhalb der $1/e$ -Fläche liegen 63 % der gesamten Energie, die in einem idealen Gauß'schen Puls enthalten sind. Je höher bzw. niedriger der Wert des $q_{1/e}$ -Parameter ist, desto besser bzw. schlechter ist die Fokussierung. Ein hoher Wert bedeutet, daß viel Energie in der Nähe der optischen Achse vorhanden ist, während ein niedriger Wert anzeigt, daß viel Energie in den Randbereichen des Fokus verloren geht.

Die aus den zusammengesetzten Bildern experimentell bestimmten Werte ergeben: Der Mittelwert des $q_{1/e}$ -Parameters liegt für den Fokus des ersten Parabolspiegels bei $\bar{q}_{P1} = 0.35$ und für den Fokus des zweiten Parabolspiegels bei $\bar{q}_{P2} = 0.40$. Die Schwankung um den Mittelwert ergibt einen relativen Fehler von $\Delta q_{1/e}/q_{1/e} = \pm 10\%$. Die Fokussierung

4 Experimentelle Messungen

des ersten Parabolspiegels ist daher gegenüber der des zweiten Parabolspiegels ein wenig schlechter. Die experimentellen Werte sind kleiner als der theoretische Wert $q_{\text{ideal}} = 0.63$. Dies läßt sich dadurch erklären, daß das reale transversale Strahlprofil von einem idealen Gauß'schen Strahlprofil abweicht. Unser reales Strahlprofil ist daher nicht so homogen wie das einer idealen TEM₀₀-Mode.

Weiterhin bestimmen wir die Energie, die in unseren Foki enthalten sind. Vor dem Kompressor messen wir eine Energie von 290 mJ, wobei die Schwankung von Puls zu Puls etwa 5 % beträgt. Messen wir die Energie beim Eintritt in die Targetkammer und setzen dies in das Verhältnis zur Energie, die wir vor dem Kompressor messen, so erhalten wir eine Transmission von 35 %. Das bedeutet, daß unsere Laserpulse während des Experimentes beim Durchgang durch den Kompressor 65 % ihrer Energie verlieren. Die geringe Transmission und der damit verbundene hohe Energieverlust ist auf einen Schaden auf einem der Kompressorgitter zurückzuführen - normalerweise beträgt die Kompressortransmission 60 . . . 65 % und der damit verbundene Energieverlust 35 . . . 40 %). Solch ein Schaden läßt sich durch Austauschen der Kompressorgitter beheben. Der Strahlteiler besitzt bei der Zentralwellenlänge von 795 nm eine Transmission von 50 %. Daraus folgt, daß nach der Reflexion und der Transmission in jedem der beiden Teilstrahlen nur noch die Hälfte der Energie steckt. Nach Abzug aller Verluste (Gesamttransmission: 18 %) steht uns daher in jedem Teilstrahl eine Energie von etwa $E_{1/2} = 50$ mJ zur Verfügung. Mit einem Energiemesser (engl. : "energy power meter") messen wir nicht nur die Energie der uns interessierenden kurzen Laserpulse, deren Dauer im Femtosekundenbereich liegt, sondern auch die Energie der verstärkten spontanen Emission im Nanosekundenbereich (engl. : "amplified spontaneous emission", ASE). In den Verstärkerkristallen findet spontane Emission statt, die durch das Pumpen verstärkt und mitgemessen wird. Der Energieanteil der ASE an der gemessenen Gesamtenergie liegt bei unter 8 % [38]. Wir messen daher bis zu 4 mJ zu viel, welche nur in der ASE und nicht in dem uns interessierenden Laserpuls enthalten sind

$$E_{1/2} = (50 - 8\%) \text{ mJ} = (50 - 4) \text{ mJ}. \quad (4.9)$$

Da die Dauer der ASE (τ_{ASE}) die des Laserpulses (τ_{p}) um Größenordnungen übertrifft, gilt $I_{\text{ASE}} \sim 1/\tau_{\text{ASE}} \ll I_{\text{p}} \sim 1/\tau_{\text{p}}$; sie trägt daher nur unwesentlich zur Intensität bei und geht nicht in ihren Fehler ein.

Die Pulsdauer messen wir mit einem Autokorrelator dritter Ordnung: Hinter dem Vakuumkompressor teilt ein halbdurchlässiger Spiegel den ankommenden Laserpuls in zwei Teilstrahlen auf: Einer der beiden Teilstrahlen läuft durch einen nichtlinearen BBO-

4 Experimentelle Messungen

Kristall (Bariumbetaborit-Kristall), in welchem die zweite Harmonische erzeugt wird. Der andere durchläuft eine "delay-line", die seine Wegstrecke verändert, und durch die er variabel verzögert werden kann. Beide Pulse werden in einem weiteren BBO-Kristall überlagert, welcher durch THG ("third harmonic generation") die dritte Harmonische erzeugt. Die dritte Harmonische dient als Autokorrelationssignal. Wir messen es mit einer Diode und einer CCD-Kamera.

Es ist zu bemerken, daß wir mit dieser Methode nur die Pulsdauer im aufgeweiteten Strahl messen. Die Autokorrelation ist auf einen kleinen Ausschnitt, d. h. (2×2) mm² des räumlichen Strahlprofils begrenzt und schneidet daher einen Teil der Laserenergie, die über den gesamten Strahlquerschnitt verteilt ist, heraus. Der Vorteil unserer neuen Methode, d. h. unserer relativistische Autokorrelation, ist, daß wir die Pulsdauer unmittelbar im Fokus messen und somit die volle Energie (E_p), die in den Fokus gebündelt wird - und wegen $I_p \sim E_p$ zur Intensität beiträgt -, berücksichtigen. Die Laserintensitäten sind im Fokus so hoch $I \gtrsim 10^{18}$ W/cm² (s. Kap. 4.1), daß sie nichtlineare Kristalle wie BBO, KDP oder LBO (β -BaB₂O₄, KH₂PO₄ bzw. LiB₃O₅), die häufig zum Bau eines Autokorrelators verwendet werden, zerstören würden.

Die Intensität des abgestrahlten Autokorrelationssignals ist von der zeitlichen Überlagerung der beiden Pulse abhängig. Wir verändern die zeitliche Verzögerung zwischen beiden Pulsen über einen Bereich von $-1.5 \dots 1.5$ ps und nehmen die Intensität des 3ω -Signals auf (s. Abb. 4.3). Die Intensität erstreckt sich über $5 \dots 6$ Größenordnungen, d. h. die Dynamik der Messung ist $10^5 \dots 10^6$. Die zeitliche Struktur des Pulses besteht aus dem Hauptpuls ($\Delta t = 0$), möglichen Vor- ($\Delta t < 0$) und Nachpulsen ($\Delta t > 0$) und dem Sockel bzw. Untergrund der ASE. Die Pulsform läßt sich für zeitliche Verzögerungen Δt innerhalb eines Bereichs von $-250 \dots +250$ fs gut durch eine Gauß'sche Kurve annähern (Hauptpuls). Wir sprechen von der Korrelationskurve

$$S_{3\omega}(\Delta t) \sim \exp\left(-2\frac{\Delta t^2}{\sigma_{\text{kor}}^2}\right), \quad (4.10)$$

wobei $\sigma_{\text{FWHM}} = w\sqrt{\ln 4}$ die FWHM-Breite der Korrelationsfunktion ist. Der aus der Korrelationskurve bestimmte Parameter $w \approx 88$ fs liefert eine FWHM-Korrelationsbreite von $\sigma_{\text{FWHM}} \approx 103$ fs. Bei einer klassischen Autokorrelation dritter Ordnung ($S_{3\omega} \sim I_{3\omega}^3$) gilt die Beziehung (Gl. 6.10)

$$\tau_{\text{FWHM}} = \sigma_{\text{FWHM}}\sqrt{2/3} \approx \sigma_{\text{FWHM}}/1.22 \quad (4.11)$$

wobei τ_{FWHM} die FWHM-Pulsdauer und σ_{FWHM} die Korrelationsbreite sind. Mit der

4 Experimentelle Messungen

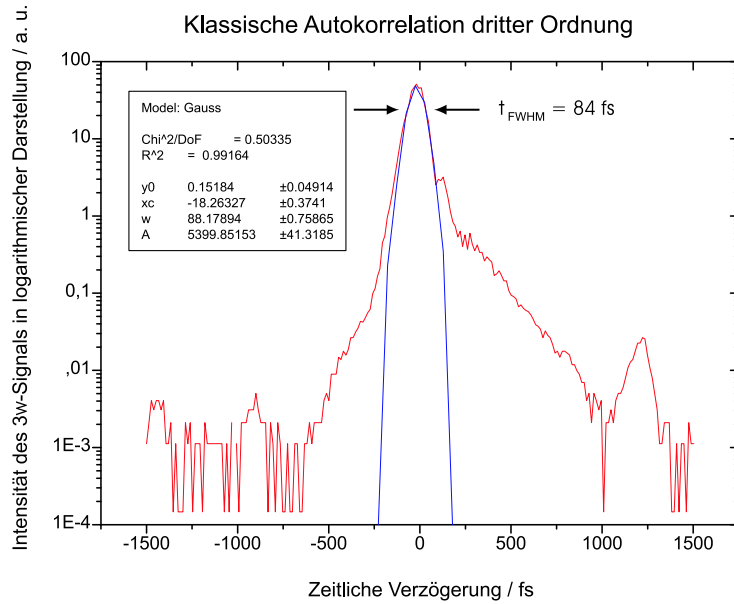


Abbildung 4.3: Klassische Autokorrelation dritter Ordnung. Die Intensität des abgestrahlten 3ω -Signals ist logarithmisch gegen die zeitliche Verzögerung aufgetragen. Die zeitliche Verzögerung läuft über einen Bereich von $-1.5 \dots 1.5$ ps. Der Puls setzt sich aus dem Hauptpuls ($-250 \dots 250$ fs), Vor- und Nachpulsen und dem Untergrund der ASE ("amplified spontaneous emission") zusammen. Negative Zeiten bedeuten frühere Zeiten (vor dem Hauptpuls) und positive Zeiten spätere Zeiten (nach dem Hauptpuls). Die zeitliche Struktur ist symmetrisch zu $\Delta t = 0$; das Verhältnis von Untergrund zu Hauptpuls beträgt etwa 10^4 , und nach ungefähr 1 ps ist ein Nachpuls mit einem Kontrast von etwa $10^{-3} \dots 10^{-4}$ zu erkennen. Die Intensität erstreckt sich über einen Bereich von $10^5 \dots 10^6$ (Dynamik der Messung). In einem Bereich von $-250 \dots 250$ fs läßt sich die Intensität des 3ω -Signals gut durch eine Gauß'sche Kurve annähern; Gauß'scher Standard-Fit in "Origin 7": $y = y_0 + A/w\sqrt{\pi/2} \exp\left(-2(x - x_c)^2/w^2\right)$. Die Korrelationsbreite der Gauß'schen Kurve $\sigma_{\text{FWHM}} = w\sqrt{\ln 4} \approx 88 \text{ fs}\sqrt{\ln 4} \approx 103 \text{ fs}$ liefert eine FWHM-Pulsdauer von $\tau_{\text{FWHM}} \approx 84 \text{ fs}$.

4 Experimentelle Messungen

FWHM-Korrelationsbreite $\sigma_{\text{FWHM}} \approx 103$ fs erhalten wir somit eine FWHM-Pulsdauer von $\tau_{\text{FWHM}} \approx 84$ fs. Die $1/e$ -Pulsdauer ($\tau_{1/e}$) ist allgemein größer als die FWHM-Pulsdauer (τ_{FWHM}). Beide Größen sind verknüpft durch

$$\tau_{1/e} = \tau_{\text{FWHM}} / \sqrt{\ln 2}. \quad (4.12)$$

Mit der FWHM-Pulsdauer $\tau_{\text{FWHM}} \approx 84$ fs ergibt sich schließlich die $1/e$ -Pulsdauer zu $\tau_{1/e} \approx 101$ fs.

Bei mehreren hintereinander durchgeführten Messungen ergibt sich ein relativer Fehler der Pulsdauer von $\Delta\tau/\tau = 10\%$. Ein systematischer Fehler tritt bei der Detektion der Pulsfrontverkipfung auf: Vor der Fokussierung können wir uns den Laserpuls als eine dünne Lichtscheibe (Durchmesser: 70 mm, Dicke $30 \mu\text{m}$) vorstellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet und deren Normale parallel zur Ausbreitungsrichtung ist. Ist die Pulsfront um weniger als $\Delta\alpha_{\text{Kipp}} = 1'$, d. h. eine Bogenminute, verkippt, so können wir dies nicht detektieren. Die effektive Verlängerung der Pulsdauer ist gegeben durch (6.8, [39])

$$\frac{\Delta\tau_{\text{eff}}}{\tau_{\text{p}}} = \sqrt{1 + \left(\frac{d_{\text{FWHM}} \sin \alpha_{\text{Kipp}}}{c\tau_{\text{p,FWHM}}} \right)^2}, \quad (4.13)$$

wobei d_{FWHM} der FWHM-Strahldurchmesser, α_{Kipp} der Kippwinkel der Pulsfront, τ_{p} die Pulsdauer und $\Delta\tau_{\text{eff}} = \tau_{\text{p}} + \Delta\tau_{\text{p}}$ die effektive bzw. verlängerte Pulsdauer sind. Bei einem Strahldurchmesser von 40 mm (FWHM), einem Kippwinkel von $1' = 1/60^\circ$ und einer Pulsdauer von 84 fs (FWHM) erhalten wir $\Delta\tau_{\text{eff}}/\tau_{\text{p}} = 1.10$. Dies entspricht einer relativen Verlängerung von $\Delta\tau_{\text{p}}/\tau_{\text{p}} = +10\%$ (FWHM). Betrachten wir die $1/e$ -Pulsdauer, so ergibt sich $\Delta\tau_{\text{p}}/\tau_{\text{p}} = +7\%$ ($1/e$). Für die mit dem Autokorrelator dritter Ordnung gemessene Pulsdauer erhalten wir schließlich

$$\tau_{\text{FWHM}} = \begin{pmatrix} 84 & +17 \\ & -8 \end{pmatrix} \text{ fs}, \quad \tau_{1/e} = \begin{pmatrix} 101 & +20 \\ & -10 \end{pmatrix} \text{ fs} \quad (4.14)$$

Die Intensität der einzelnen Foki berechnen wir über $I_{1/2} = E_{1/2}/\tau_{\text{p}}A_{1/2}$. Um die Energie zu bestimmen, die in der $1/e$ -Fläche der einzelnen Foki enthalten ist, multiplizieren wir die Energie, die auf der CCD-Kamera ankommt, mit den $q_{1/e}$ -Parametern der jeweiligen Foki

$$I_{1/2} = \frac{E_{1/2}q_{1/2}}{\tau_{\text{p}}A_{1/2}}. \quad (4.15)$$

Mit unseren experimentell bestimmten $1/e$ -Werte für die Energien $E_{1/2} = 50$ mJ, die

4 Experimentelle Messungen

Laserintensität	Elektrisches Feld	Relativistischer Parameter
$\begin{pmatrix} 3 & +0.4 \\ & -0.8 \end{pmatrix} \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$	$\begin{pmatrix} 5 & +0.3 \\ & -0.7 \end{pmatrix} \times 10^{12} \text{ V/m}$	$a_0 = 1.2 \begin{matrix} +0.1 \\ -0.2 \end{matrix}$

Tabelle 4.3: Laserintensität, elektrisches Feld und relativistischer Parameter.

Parameter $q_1 = 0.35$ und $q_2 = 0.40$, die Pulsdauer $\tau_p = 101 \text{ fs}$ und die Flächen $A_1 = 5.6 \mu\text{m}^2$ und $A_2 = 6.3 \mu\text{m}^2$ der Foki erhalten wir für beide Foki die Laserintensität ($1/e$)

$$I_L = \begin{pmatrix} 3 & +0.4 \\ & -0.8 \end{pmatrix} \times 10^{18} \text{ W/cm}^2. \quad (4.16)$$

Diese Intensität ist relativistisch (vgl. $I_{\text{rel}} \approx 2.2 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$). Der Fehler setzt sich aus den einzelnen Fehlern $\Delta I_{1/2}/I_{1/2} = \Delta A/A + \Delta q_{1/e}/q_{1/e} + \Delta \tau_p/\tau_p = (+13\% / -27\%)$ zusammen (ASE-Energiefehler geht nicht ein, Verlängerung der Pulsdauer führt zur Erniedrigung der Intensität).

Das elektrische Feld (E_L) und der relativistische Parameter (a_0) ergeben sich über

$$E_L = \sqrt{2I_L/c\varepsilon_0} \quad (4.17)$$

$$a_0 = eE_L\lambda_0/2\pi m_e c^2 \quad (4.18)$$

zu $E_L = 5 \times 10^{12} \text{ V/m}$ und $a_0 = 1.2$. Die relativen Fehler pflanzen sich gemäß $\Delta E_L/E_L = \frac{1}{2}\Delta I_L/I_L$ und $\Delta a_0/a_0 = \Delta E_L/E_L$ fort. Wir erhalten schließlich (s. Tab. 4.3)

$$E_L = \begin{pmatrix} 5 & +0.3 \\ & -0.7 \end{pmatrix} \times 10^{12} \text{ V/m} \quad (4.19)$$

$$a_0 = 1.2 \begin{matrix} +0.1 \\ -0.2 \end{matrix}. \quad (4.20)$$

Wir befinden uns im Bereich der relativistischen Optik $a_0 \gtrsim 1$!

4.2 Dichteprofil des Gasstrahls

Zur Erzeugung des Gasstrahls verwenden wir eine zylindrische Düse mit einem Innendurchmesser von 0.8 mm und einem Außendurchmesser von 1 mm. Ihre Länge beträgt 3 cm. Im Vergleich zu früheren Experimenten am IOQ verwenden wir eine längere Gasdü-

se, um genügend Platz für die Diagnostik bereitzustellen. Damit wir eine hohen Gasdichte über der Düse erzeugen, legen wir Heliumgas mit einem Hintergrunddruck von 50 bar an. Durch einen kurzen Stromstoß in einer Spule bewegt sich ein Stößel in der Düse auf und ab und sorgt dafür, daß das Heliumgas mit einem hohen Druck herausströmt. Oberhalb der Düsenöffnung dehnt sich eine Gaswolke in das Vakuum aus ($p_{\text{vak}} \sim 10^{-5}$ mbar), und zur gleichen Zeit trifft ein Laserpuls ein, der die Elektronen zum Schwingen anregt. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gasstößen ist an die Wiederholrate des Lasersystems angepaßt (s. Kap. 3). Die Öffnungszeit der Düse ist innerhalb eines Bereichs von einigen Mikro- bis Millisekunden veränderlich regelbar.

Durch eine interferometrische Messung läßt sich die Gasdichte über der Düse messen¹ [31]. An der Stelle der Foki, d. h. in dem Gebiet der Laser-Plasma-Wechselwirkung, herrscht bei einer Öffnungszeit von $500 \mu\text{s}$ eine Elektronendichte von $5 \times 10^{19} \text{cm}^{-3}$ (s. Abb. 4.4). Bei der kürzesten Öffnungszeit von $170 \mu\text{s}$ reduziert sie sich um zwei Größenordnungen auf $2 \times 10^{17} \text{cm}^{-3}$ (s. Abb. 4.5). In Richtung der Düsenachse nimmt die Elektronendichte in guter Näherung exponentiell ab (s. Abb. 4.4 und 4.5).

4.3 Räumlicher und zeitlicher Überlapp

Unser Ziel ist, die beiden gegenläufigen Laserpulse gleichzeitig ihrem gemeinsamen Fokus ankommen zu lassen. Zur räumlichen Überlagerung der beide Foki justieren wir zunächst die optischen Elemente des Aufbaus mittels einer Laserdiode vor, so daß die Foki in allen drei Raumdimensionen bereits weniger als 5 mm auseinander liegen.

Da die Foki im Vakuum nicht sichtbar sind, fluten wir die Targetkammer zunächst mit Luft (Hintergrunddruck: $10 \dots 100$ mbar). Nun fokussieren wir mit einer Pulsenergie von 20 mJ in die mit Luft gefüllte Targetkammer. Wir fokussieren zunächst immer nur einen der beiden Teilstrahlen in den Gasstrahl und versperren dem jeweils anderen durch Shutter, welche zwischen dem Strahlteiler und den Parabolspiegel eingebaut sind (s. Abb. 3.4), den Weg. Dadurch besteht während der Ausrichtung noch keine Gefahr eines Laserpulses, welcher in das Lasersystem zurückläuft. Wir fokussieren erst dann die beiden gegenläufigen Laserpulse in den Gasstrahl, wenn die Foki bereits mit Mikrometergenauigkeit übereinanderliegen. Eine Pulsenergie von 20 mJ entspricht bei unserer Fokussierung einer Laserintensität von etwa $2 \times 10^{17} \text{W/cm}^2$.

¹Wir führen die Messung der Gasdichte mit Stickstoff- und nicht mit Heliumgas durch, da der Brechungsindex von Helium ($n_{\text{He}} = 1.000033$, vgl. Brechungsindex von Stickstoff: $n_{\text{Stick}} = 1.000298$) zu klein ist, um genügend Phasenverschiebung aufzusammeln, welche für die Auswertung nötig ist. Es sollten daher weitere Experimente zur Messung der Gasdichte durchgeführt werden, um den Einfluß unterschiedlicher Gassorten zu berücksichtigen.

4 Experimentelle Messungen

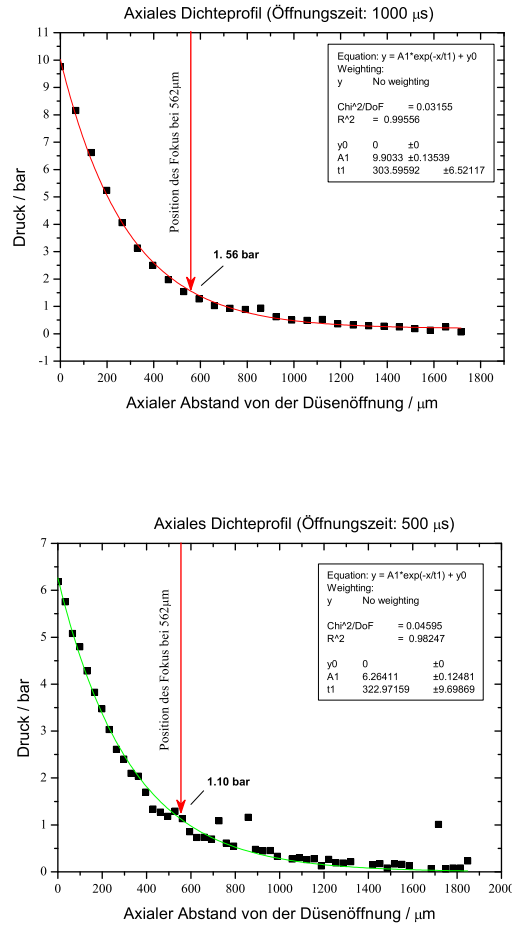


Abbildung 4.4: Hohe Gasdichten. Axiales Dichteprofil für zwei verschiedene Öffnungszeiten (oben: $1000 \mu\text{s}$, unten: $500 \mu\text{s}$). Der Gasdruck über der Düsenachse ist gegen den axialen Abstand (Abstand in y -Richtung, wobei der Ursprung auf der Düsenöffnung liegt), aufgetragen. Mit größer werdendem Abstand von der Düsenachse nimmt der Druck in guter Näherung exponentiell ab (rote Kurve oben, grüne Kurve unten); $p(y) = p_{\text{max}} \exp(-y/t_1)$, wobei p_{max} die maximale Dichte, y der axiale Abstand und t_1 der Abnahmekoeffizient sind. An der Fokusposition (angedeutet durch die roten Pfeile) sind die jeweiligen Drücke gezeigt, welche sich mit der Gasgleichung in die Elektronendichte gemäß $n/\text{cm}^{-3} = 2.4 \times 10^{19} p/\text{bar}$ umrechnen lassen. Bei der Öffnungszeit der Gasdüse von $1000 \mu\text{s}$ beträgt der Druck an der Fokusposition $p = 1.56 \text{ bar}$ und somit die Gasdichte $n_{\text{gas}} \hat{=} 3.7 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. Bei der Öffnungszeit von $500 \mu\text{s}$ beträgt der Druck an der Fokusposition $p = 1.10 \text{ bar}$ und somit die Gasdichte $n_{\text{gas}} = 2.6 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. Unter der Annahme, daß das Heliumgas vollständig ionisiert ist, ist die Elektronendichte doppelt so hoch wie die Gasdichte $n_e = 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$.

4 Experimentelle Messungen

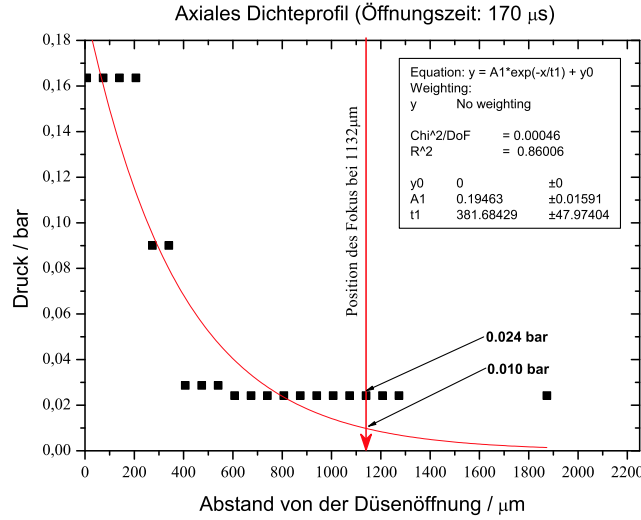


Abbildung 4.5: Niedrige Gasdichte. Axial Dichteprofil bei einer Öffnungszeit der Gasdüse von 170 μs . Aus den Meßpunkten läßt sich wiederum eine exponentiell abfallende Kurve anpassen (rote Kurve). Der R^2 -Parameter ($R^2 = 0.88$) aus der genäherten Kurve weicht von Eins ab, d. h. die Kurvenanpassung ist nicht besonders gut. Der Grund ist, daß bei der kurzen Öffnungszeit der Düse die Werte für die integrale Phasenverschiebung, welche der Probepuls beim Durchlaufen des Gases aufammelt, klein sind. Bei einem Druck von $p = 0.010$ bar (rote Kurve, Fokusposition) bzw. einem Druck von $p = 0.024$ bar (schwarzer Meßpunkt, Fokusposition) ergeben sich die Gasdichten $n_{\text{gas}} = 2.4 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ bzw. $n_{\text{gas}} = 5.8 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Die einzelnen Meßpunkte bei einer kurzen Öffnungszeit (170 μs) sind ziemlich unsicher. Es ist sinnvoller, die Kurve bei einer langen Öffnungszeit (1000 μs) exponentiell nach unten hin fortzusetzen: Der Abnahmekoeffizient t_1 (1000 μs) = 304 μm liefert $p \doteq p_{\text{max}}(170 \mu\text{s}) \exp(-x_{\text{F}}/t_1(1000 \mu\text{s})) = 0.19 \text{ bar} \times \exp(-1132 \mu\text{m}/304 \mu\text{m}) = 4.6 \times 10^{-3} \text{ bar}$. Daraus ergibt sich die Gasdichte $n_{\text{gas}} = 1.1 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Dieser Wert für die Gasdichte liegt etwas unterhalb derer, die sich unmittelbar aus der obigen Kurve ergeben. Unter der Annahme, daß das Heliumgas vollständig ionisiert ist, ist die Elektronendichte doppelt so hoch wie die Gasdichte $n_e \approx 2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$.

4 Experimentelle Messungen

Es entsteht ein heller, weißer Funke, den wir als optischen Luftdurchschlag (engl. : "optical breakdown") bezeichnen. Aufgrund der hohen Intensität werden die Moleküle in der Luft ionisiert und dadurch freie Elektronen erzeugt. Diese entziehen dem Laserfeld Energie, werden beschleunigt, treffen auf benachbarte Moleküle und lösen weitere Elektronen aus (Sekundärionisation). Die Anzahl der Elektronen vervielfacht sich durch weitere Stöße lawinenartig, ein Plasma entsteht. Wir sehen das Licht, das bei der Rekombination emittiert wird. Im Fokus ist die Laserintensität am höchsten. Daher ist der optische Luftdurchschlag an den Positionen der jeweiligen Foki am hellsten. Wir verfahren den Targethalter nun so, daß sich die Öffnung der auf ihm befestigten Gasdüse unmittelbar unterhalb der Foki befindet - das Gas strömt von unten nach oben. Die Positionen der Foki stimmen bei einem Hintergrunddruck von $10 \dots 100$ mbar in Luft nicht genau mit denen bei einem Druck von $10^{-4} \dots 10^{-5}$ mbar im Vakuum überein. Der Grund ist, daß durch die Ionisation der Luftmoleküle eine defokussierende Wirkung auftritt, die die Ausbreitung des Laserpulses störend beeinflusst. Daher evakuieren wir die Kammer auf $10^{-4} \dots 10^{-5}$ mbar und fokussieren mit einer Energie von 290 mJ, welches einer Intensität von 3×10^{18} W/cm² entspricht, in den gepulsten, mit dem Lasersystem synchronisierten Helium-Gasstrahl.

Die obige Vorgehensweise ist vorteilhaft, da es zweckmäßig ist, zuerst die ungefähre Positionen der Foki zu bestimmen anstatt die arbeitende Gasdüse so lange zu verfahren, bis sie an der richtigen Stelle sitzt - die Düsenöffnung muß sich genau 3 ... 5 mm unterhalb der Foki befinden, damit das Plasma zum Leuchten angeregt wird. Sitzt die Gasdüse bereits an der richtigen Stelle, so können wir diesen Schritt überspringen und sofort in den Gasstrahl im Vakuum fokussieren.

Bei einer Öffnungszeit von 500 μ s herrscht an den Positionen der Foki eine Elektronendichte von etwa 5×10^{19} cm⁻³ (4.2). Dadurch entsteht ein Plasmaleuchten, welches wie eine (Plasma-)Flamme aussieht (s. Abb. 4.6). An der untersten Stelle der Plasmaflamme sitzen die Foki - dort leuchtet es hell und weiß, und nach oben hin verlaufen die Farben über rot nach blau. Das Plasmaleuchten hat den gleichen Ursprung wie der optische Luftdurchschlag. Verringern wir die Gasdichte, d. h. die Anzahl der freien Plasmaelektronen, so wird das Plasmaleuchten so schwach, daß wir die Foki nicht mehr abbilden können.

Indem wir das Plasmaleuchten auf die CMOS-Kamera der Überlappobjektive abbilden, können wir die Positionen der einzelnen Foki genau bestimmen. Wir verfahren die Fokussier- und Überlappdiagnostik, bis wir mit beiden Überlappobjektiven genau auf den Fokus des ersten Parabolspiegels schauen. Da die beiden Überlappobjektiv denselben Punkt beobachten (s. Abb. 3.6), wird dieser Fokus sowohl mit dem horizontalen als

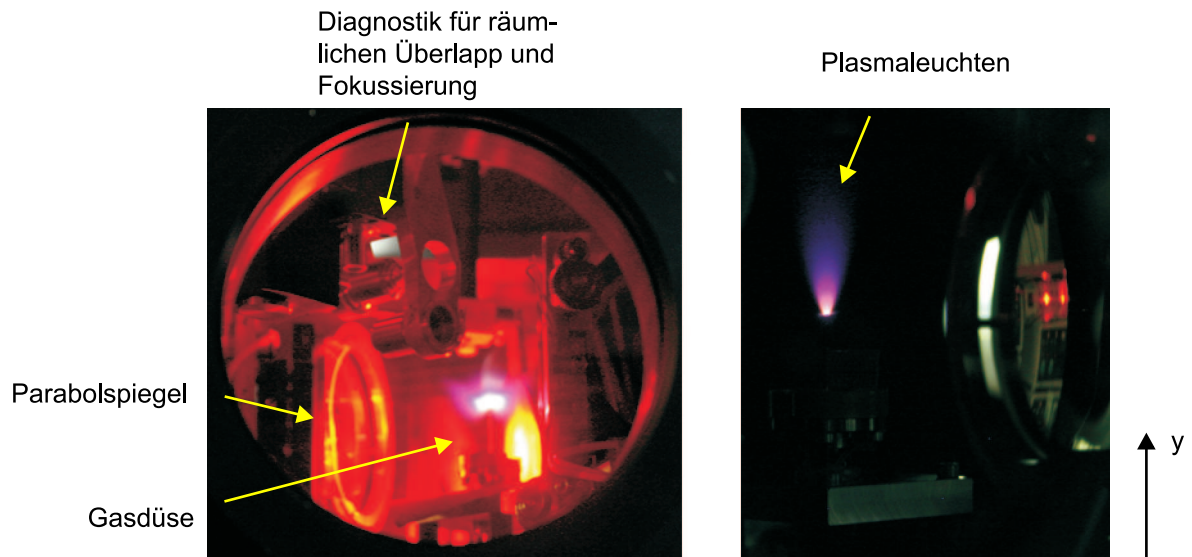


Abbildung 4.6: Fokussierung eines Laserpulses in einen Helium-Gasstrahl. Ein Laserpuls mit einer Intensität von $3 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$ wird in einen Helium-Gasstrahl fokussiert. Der gepulste Gasstrahl ist mit dem Lasersystem synchronisiert (Wiederholrate: 10 Hz). Es entsteht ein hell leuchtendes Plasma, welches mit den Überlappobjektiven abgebildet wird. Aus den mit den Überlappobjektiven aufgenommen Bildern lassen sich die Positionen der Foki (rechtes Bild: hellste Stelle des Plasmaleuchtens am unteren Ende der "Plasmaflamme") ermitteln und dadurch räumlich überlagern. Die Überlappobjektive, welche auf dem Photo leider kaum zu erkennen sind, sind an der Fokussier- und Überlappdiagnostik befestigt.

4 Experimentelle Messungen

auch mit dem vertikalen Überlappobjektiv scharf abgebildet. Die Position der Fokussier- und Überlappdiagnostik bleibt nun fest. Um die Foki zu überlappen, verschieben wir den zweiten Parabolspiegel in x , y , z -Richtung - beim Verschieben der Parabolspiegel ihre Foki mit. Das Wandern beobachten wir im einzelnen sowohl mit dem horizontalen als auch mit dem vertikalen Überlappobjektiv:

- Beobachtung mit dem horizontalen Überlappobjektiv: Das horizontale Überlappobjektiv schaut in x -Richtung auf den Fokus des ersten Parabolspiegels und bildet diesen in der y , z -Ebene scharf ab. Wir verfahren den zweiten Parabolspiegel in y , z -Richtung und legen dadurch den Fokus des zweiten Parabolspiegels genau auf den Fokus des ersten Parabolspiegels. Weiterhin verfahren wir den zweiten Parabolspiegel in x -Richtung und bilden dadurch den Fokus des zweiten Parabolspiegels scharf ab; durch das Verschieben in x -Richtung ändert sich der fokale Abstand zwischen dem Fokus des zweiten Parabolspiegels und dem horizontalen Überlappobjektiv. Beide Foki überlappen.
- Beobachtung mit dem vertikalen Überlappobjektiv: Das vertikale Überlappobjektiv schaut in y -Richtung auf den Fokus des ersten Parabolspiegels und bildet ihn in der x , z -Ebene scharf ab. Wir verfahren den zweiten Parabolspiegel in x , z -Richtung und legen dadurch den Fokus des zweiten Parabolspiegels genau auf den Fokus des ersten Parabolspiegels. Weiterhin verfahren wir den zweiten Parabolspiegel in y -Richtung und bilden dadurch den Fokus des zweiten Parabolspiegels scharf ab; durch das Verschieben in y -Richtung ändert sich der fokale Abstand zwischen dem Fokus des zweiten Parabolspiegels und dem vertikalen Überlappobjektiv. Beide Foki überlappen.

Es ist zu bemerken, daß mit der gerade beschriebenen Vorgehensweise nur eines der beiden Überlappobjektive zur Fokusbeobachtung ausreichen würde. Es ist jedoch genauer, mit beiden Überlappobjektive von der Seite und von oben zu beobachten - auch deshalb, weil dabei das unsichere Einstellen der Schärfe entfällt.

Wir kalibrieren die Abbildung der mit den Überlappobjektiven aufgenommenen Bilder, indem wir einen Draht mit einem Durchmesser von $10\ \mu\text{m}$ von der den jeweiligen Objektiven gegenüber liegenden Seite mit einem Kranz aus Leuchtdioden oder einer Taschenlampe anstrahlen und ihn abbilden. Da die Abbildungswege für beide Überlappobjektive gleich lang sind, erhalten wir sowohl für die mit dem horizontalen als auch mit dem vertikalen Überlappobjektiv eine Kalibrierung der Überlappbilder von $1.326\ \mu\text{m}/\text{pixel}$. Die mit einem gewöhnlichen Auflösungstest gemessene Auflösung beträgt $5\ \mu\text{m}$.

4 Experimentelle Messungen

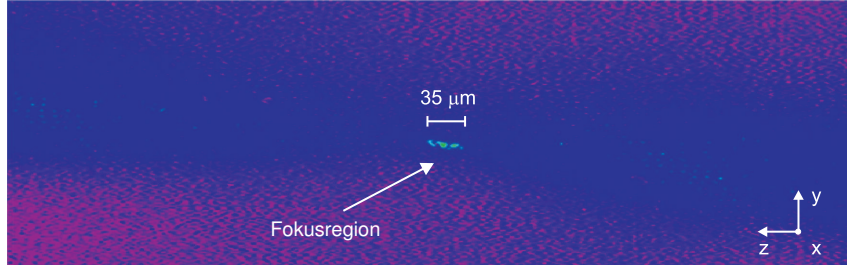


Abbildung 4.7: Überlappbild. Die Foki der beiden gegenläufigen Laserpulse werden nacheinander durch ein horizontales und ein vertikales Überlappobjektiv auf eine CMOS-Kamera abgebildet. Die räumliche Auflösung der Bilder beträgt $5\ \mu\text{m}$. Das obige Beispielbild ist mit dem horizontalen Überlappobjektiv aufgenommen. Die Gasdichte ist so eingestellt, daß das fokale Gebiet seine kürzeste Ausdehnung in z -Richtung von etwa $35\ \mu\text{m}$ erreicht ($n_e = 5 \times 10^{19}\ \text{W/cm}^2$). In der Fokusregion (hellblau, grüne und gelbe Bildpunkte) leuchtet das Plasma am hellsten. Die dunkelblauen Bildpunkte zeigen das Intensitätsprofil des Laserstrahls. Es ist zu erkennen, daß der Fokus ziemlich genau in der Strahltaile sitzt (kleinste Ausdehnung in y -Richtung). Der optische Achse des Strahles ist um 3° bzgl. der z -Achse verkippt.

Die aufgenommenen Überlappbilder zeigen (s. Abb. 4.7), daß das fokale Gebiet (engl. : "focal spot area"), welches durch die Plasmaemission angedeutet ist, in x -, sowie in y -Richtung etwa $5 \dots 10\ \mu\text{m}$ und in z -Richtung wenigstens $35\ \mu\text{m}$ ausgedehnt ist (vgl. Rayleighlänge: $9\ \mu\text{m}$). Da der dielektrische Spiegel, welcher hinter den Überlappobjektiven und vor der CMOS-Kamera angebracht (s. Abb. 3.6), nicht für 1ω -Licht durchsichtig ist, bedeutet das, daß auf den Überlappbildern alle Frequenzen außerhalb der Bandbreite des dielektrischen Spiegels ($\Delta\lambda = 50\ \text{nm}$ bzw. $\Delta\omega = 0.15 \times 10^{15}\ \text{s}^{-1}$) vertreten sind. Die Plasmaemission sieht aus wie eine Nadel, die im wesentlichen in z -Richtung ausgedehnt ist. Die kritische Leistung ist mit einem einzelnen Teilstrahl, welcher nur eine Energie von $50\ \text{mJ}$ (s. Kap. 4.1) besitzt, noch erreicht. Daher ist dies ist noch *kein* relativistischer Kanal (s. Kap. 2.3.1).

Die Ausdehnung der Plasmaemission läßt sich durch ein Gauß'sches Intensitätsprofil erklären (2.62, 2.63, s. Abb. 2.6). Da die Intensität in der x, y -Ebene transversal zur optischen Achse stark absinkt - wie wir aus unserer Charakterisierung der Foki wissen, fällt die Intensität nach einem Radius von $r_0 = W_0/\sqrt{2} \approx 1\ \mu\text{m}$ bzw. einem Durchmesser von $d_0 \approx 2\ \mu\text{m}$ auf das $1/e$ -fache ab - reicht die Intensität bereits nach wenigen Mikrometern nicht mehr aus, um das Plasma zu ionisieren. In z -Richtung ist die Plasmaemission jedoch aufgrund des longitudinalen Intensitätsprofil $I = I(z)$ länger. Die Laserintensität

4 Experimentelle Messungen

nimmt in der x, y -Ebene mit größerem radialen Abstand von der optischen Achse viel schneller ab als in longitudinale z -Richtung mit größerem Abstand vom Fokus.

Die Genauigkeit für den räumlichen Überlapp der beiden Foki, welche mit den Überlappbildern erreichbar ist, ist allgemein durch die räumliche Auflösung der Überlappabbildung ($5 \mu\text{m}$) und die Ausdehnung der Plasmaemission begrenzt. Je ausdehnter die Plasmaemission ist, desto ungenauer ist die räumliche Überlagerung - innerhalb der Ausdehnung der Plasmaemission ist die Lage des Fokus unbestimmt. Aus den Überlappbilder schließen wir daher, daß die Foki in x, y -Richtung höchstens etwa $10 \mu\text{m}$, d. h. ungefähr $\Delta_{x,y} \approx 5 \times d_0$ auseinander liegen, während sie in z -Richtung $35 \dots 50 \mu\text{m}$ auseinanderliegen (einzelner Teilstrahl mit einer Energie von 50 mJ bei einer Gasdichte von $5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$). D. h. Die Genauigkeit liegt im Mikrometerbereich, und der Abstand der Foki in z -Richtung entspricht noch etwa dem 5-fachen der Rayleighlänge (Rayleighlänge: $9 \mu\text{m}$). Das mikrometergroße Gebiet der räumlichen Überlagerung heißt bei uns *gemeinsamer Fokus*.

Da der Aufbau symmetrisch ist und beide Parabolspiegel die gleiche Brennweite besitzen, liegt der gemeinsame Fokus genau in der Mitte zwischen den beiden Parabolspiegeln. Wir stellen uns die jetzige Situation bildlich vor: Der Strahlteiler teilt den Hauptpuls in zwei Teilstrahlen auf. Jeder dieser Teilstrahlen stellt eine Lichtscheibe dar, die nach der Reflexion an den Oberflächen der Parabolspiegel wegen ihrer ($1/e$ -)Pulsdauer von 100 fs (s. Kap. 4.1) in z -Richtung etwa $30 \mu\text{m}$ ausgedehnt ist. Die beiden Lichtscheiben laufen aufeinander zu, treffen und durchdringen sich. Damit sie sich nicht außerhalb ihres gemeinsamen Fokus treffen, ist es erforderlich, daß sie genau die gleiche Wegstrecke vom Strahlteiler bis zu ihrem gemeinsamen Fokus zurücklegen - und gleichzeitig dort ankommen.

Das Gebiet, in dem sich die beiden Lichtscheiben durchdringen, ist nach der Fokussierung in der x, y -Ebene nur noch so groß wie die ($1/e$ -)Fokusflächen von $6 \mu\text{m}^2$ (s. Kap. 4.1) und in z -Richtung immer noch so groß wie die Dicke der Lichtscheibe, d. h. etwa $30 \mu\text{m}$.

Zur Diagnostik des räumlichen und zeitlichen Überlapps nehmen wir zusätzlich zu den Überlappbildern 2ω -Schattenbilder und Bilder der 2ω -Selbstemission auf (s. Abb. 3.4). Dazu erzeugen wir zunächst ein Plasma, indem wir die beiden gegenläufigen Laserpulse nacheinander in den Helium-Gasstrahl fokussieren. Aufgrund der relativistischen Laserintensität von $3 \times 10^{18} \text{ W/cm}^2$ ($1/e$) in einem Teilstrahl (s. Kap. 4.1) bewegen sich die Elektronen auf einer Achterbahn (s. Abb. 2.3). Dabei senden sie Licht der Fundamentalen (1ω) sowie der zweiten Harmonischen (2ω) der Laserfrequenz aus. Das nichtlinear

4 Experimentelle Messungen

gestreute Licht (nichtlineares Thomsonlicht) nennen wir 1ω - bzw. 2ω -Plasmaemission².

Als zu untersuchendes Signal ist die 1ω -Plasmaemission nicht geeignet, da sie vom starken 1ω -Streulicht des Lasers überstrahlt wird. Wir beobachten stattdessen 2ω -Bilder, da wir diese mittels eines 2ω -Interferenzfilter vom 1ω -Laserstreulicht trennen können - der 2ω -Interferenzfilter ist nur für Licht der zweiten Harmonischen durchlässig.

Die 2ω -Bilder, d. h. die 2ω -Schattenbilder und die Bilder der 2ω -Plasmaemission, kalibrieren wir, indem wir die Gasdüse mit einem äußeren Durchmesser von $1\ \mu\text{m}$ durch einer Linse in x -Richtung auf die CCD-Kamera abbilden. Dazu fahren wir die Gasdüse in den gemeinsamen Fokus der gegenläufigen Pulse. Der Durchmesser der Düse entspricht auf der CCD-Kamera einem Bildausschnitt von 537 pixel in z -Richtung, so daß wir eine Kalibrierung der 2ω -Abbildung von $1.863\ \mu\text{m}/\text{pixel}$ erhalten.

Wir betrachten nun die Bilder der 2ω -Selbstemission (s. Abb. 4.8). Fokussieren wir bei einer hohen Elektronendichte von $5 \times 10^{19}\ \text{cm}^{-3}$ einen einzelnen Teilstrahl mit einer Energie von 50 mJ in den Plasma, so ist die 2ω -Plasmaemission in y -Richtung $10 \dots 20\ \mu\text{m}$ und in z -Richtung $35 \dots 60\ \mu\text{m}$ ausgedehnt. Die Ausdehnung und die Form der 2ω -Selbstemission schwanken von Laserschuß zu -schuß innerhalb weniger Mikrometer. Bei der verwendeten Energie von 50 mJ und der gemessenen Pulsdauer von 100 fs ist die kritische Leistung für Selbstfokussierung nicht erreicht. Daher bilden sich keine relativistischen Kanäle aus. Die Helligkeit der 2ω -Selbstemission ist etwa in der Mitte am höchsten und nimmt nach außen hin ab. Dies läßt sich wieder durch ein Gauß'sches Intensitätsprofil erklären (2.62, 2.63, s. Abb. 2.6).

Zur Aufnahme von 2ω -Schattenbildern strahlen wir mit unserem frequenzverdoppelten Probepuls einstellbarer zeitlicher Verzögerung in x -Richtung durch das Plasma und bilden es in der y , z -Ebene mittels einer Linse auf eine CCD-Kamera ab (s. Abb. 3.4). Die Linse steht bezüglich der Ausbreitungsrichtung des Probepulses etwa 30 cm hinter der Fokusposition.

Wir erklären im folgenden, wie ein Schattenbild entsteht. An der ansteigenden Intensitätsflanke ($I \sim 10^{10}\ \text{W}/\text{cm}^2$) des Hauptpulses setzt Multiphotonenionisation des Heliumgases ein, so daß die Elektronendichte steil ansteigt. Es entsteht eine Ionisationsfront, welche in z -Richtung vor dem Hauptpuls herläuft. Dies ist wie bei einem Plug, der Schnee aufschaufelt und vor sich herschiebt. Da die Elektronendichte an der Ionisationsfront steil ansteigt, fällt der Brechungsindex steil ab (2.128). Die Ablenkung des

²Wir unterscheiden zwischen vier verschiedenen Lichtquellen unterschiedlichen Ursprungs: das 1ω -Streulicht (ungeordnete Streuung und diffuse Reflexion des Laserlichtes am Gasstrahl), die 1ω - bzw. 2ω -Plasmaemission (Abstrahlung höherer Harmonischer aufgrund der relativistischen Bewegung von Elektronen im intensiven Laserfeld) und das 2ω -Problicht (Erzeugung der zweiten Harmonischen im nichtlinearen BBO-Kristall).

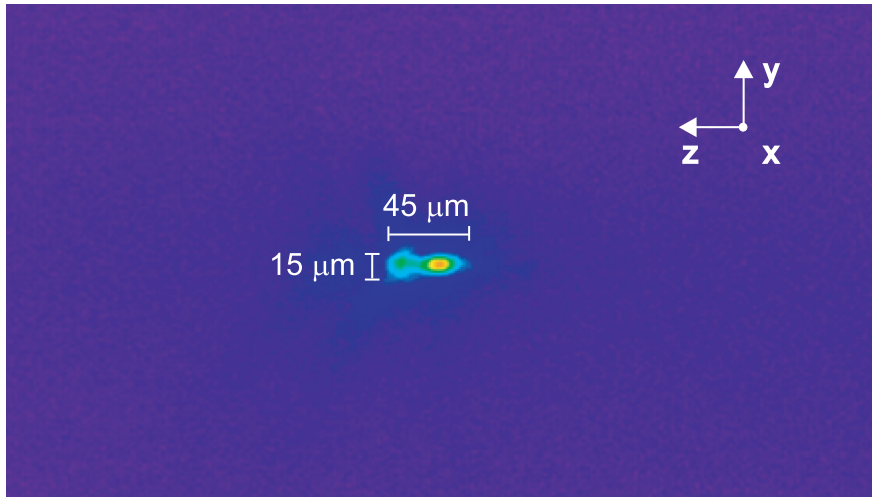


Abbildung 4.8: 2ω -Selbstemission eines Laserpulses. Gezeigt ist die 2ω -Selbstemission bei Fokussierung eines einzelnen Laserpulses in einen Helium-Gasstrahl (Energie des Laserpulses: 50 mJ, hohe Elektronendichte: $5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$). Die Ausdehnung der Plasmaemission beträgt etwa $15 \mu\text{m}$ in y - und $45 \mu\text{m}$ in z -Richtung. An der hellsten Stelle der 2ω -Selbstemission ist der Fokus zu sehen (roter, gelber Fleck); nach außen hin nimmt die Helligkeit gemäß eines Gauß'schen Intensitätsprofils ab. Bei einer Energie von 50 mJ und einer Pulsdauer von 100 fs ist die kritische Leistung für Selbstfokussierung nicht erreicht, so daß keine relativistischen Kanäle entstehen.

4 Experimentelle Messungen

2ω -Probepulses, der in y , z -Richtung einige Millimeter ausgedehnt ist und in x -Richtung auf die CCD-Kamera zuläuft, ist ganz allgemein proportional zum Gradienten des Brechungsindex. Im folgenden beschreiben wir kurz die Strahlablenkung. Heliumgas besitzt einen Brechungsindex von $n_{\text{He}} = 1.000033$. Für den 2ω -Probepuls lautet der Brechungsindex im Plasma (2.131)

$$n_{2\omega} = \sqrt{1 - n_e/n_{\text{krit}}(2\omega_0)}, \quad (4.21)$$

wobei $n_{\text{krit}}(2\omega_0)$ die kritische Dichte für den frequenzverdoppelten Probepuls ist. Setzen wir die im Fokus gemessene Elektronendichte ($n_e = 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$) und die kritische Dichte des Probepulses $n_{\text{krit}}(2\omega_0) = 7 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ (Wellenlänge des Probepulses: 400 nm) ein, so ergibt sich für den Brechungsindex im Plasma $n_{\text{pl}} = 0.996$. Die Elektronendichte ist kleiner als die kritische Dichte; somit ist das Plasma unterdicht, und der 2ω -Probepuls propagiert durch das Plasma. Der Probepuls, welcher aus dem Helium kommt und in das Laserplasma eindringt, sieht einen abnehmenden Brechungsindex (von $n_{\text{He}} = 1.000033$ nach $n_{2\omega} = 0.996$, $\Delta n = 4 \times 10^{-3}$) und läuft somit vom optisch dichteren in das optisch dünnere Plasma. Da dies wie eine Zerstreuungslinse wirkt, wird der Probepuls in y -Richtung abgelenkt. Wir zerlegen nun den Probestrahl, welcher in der y , z -Ebene ausgedehnt ist, in Gedanken in einzelne Probeteilstrahlen. Jeder dieser Probeteilstrahlen breitet sich nicht geradlinig durch das Plasma aus, sondern wird unterschiedlich stark abgelenkt. Bei größer werdendem Abstand von der x -Achse nimmt die Elektronendichte exponentiell ab (s. Abb. 4.5), d. h. $n_e(x) > n_e(0)$, und der Brechungsindex nimmt somit zu, d. h. $n(x) < n(0)$. Bezüglich der x -Achse werden somit achsenferne Teilstrahlen weniger stark abgelenkt als achsennahe - dies ist umgekehrt wie bei der Selbstfokussierung. Durchquert der Probestrahl daher das unterdichte Plasma, so entsteht in der y , z - (Abbildungs-)Ebene der CCD-Kamera schließlich ein Schattenbild, welches die Brechungsindexverteilung im Plasma widerspiegelt.

Die mit dem Probepuls aufgenommenen (zeitaufgelösten!) 2ω -Schattenbilder und die Bilder der (zeitintegrierten!) 2ω -Selbstemission sind überlagert. Indem wir in die Verzögerungseinheit des Probepulses eine $\lambda/4$ -Platte einbringen, können wir dessen Polarisation um 90° drehen. Die Polarisations Ebene des Probepulses (s-polarisiert) steht somit senkrecht zur der des Hauptpulses (p-polarisiert). Dadurch ist es möglich, zwischen 2ω -Schattenbildern und den Bildern der 2ω -Selbstemission zu unterscheiden.

Die Schattenbilder dienen dazu, das Plasma gleichsam zu filmen, wobei die Belichtungszeit eines einzigen Bildes durch die Dauer des Probepulses gegeben ist (100 fs) ist. Die zeitliche Verzögerung des Probepulses bezüglich des Hauptpulses ist mit einer Zeitauflösung von 100 fs veränderlich einstellbar. Wir gehen so vor, daß wir eine bestimm-

4 Experimentelle Messungen

te zeitliche Verzögerung einstellen und einen Schnappschuß des Plasma aufnehmen. Dabei photographieren wir jeweils für 10 Laserschüsse 10 zugehörige 2ω -Schattenbilder, so daß sich Schwankungen von Laserschuß zu -schuß feststellen lassen. Anschließend verändern wir in 100 fs-Schritten die zeitliche Verzögerung und nehmen wiederum für jede Einstellung 10 Schattenbilder auf. Die auf diese Weise entstehende Bilderserie zeigt Momentaufnahmen der (Haupt-)Pulsausbreitung in einem zeitlichen Abstand von 100 fs.

Zur zeitlichen Überlagerung der beiden gegenläufigen Laserpulse nutzen wir das obige Verfahren aus und ändern in 100 fs-Schritten die zeitliche Verzögerung zwischen dem Probe- und dem Hauptpuls. Dabei beobachten wir nur zunächst nur die Ausbreitung des transmittierten Teilstrahles und versperren der Weg des reflektierten Teilstrahles³.

Die Auflösung der CCD-Kamera beträgt 640×480 pixel. Dies entspricht bei unserer Kalibrierung der 2ω -Abbildung ($1.863 \mu\text{m}/\text{pixel}$) einem Bildausschnitt von $1190 \mu\text{m} \times 890 \mu\text{m}$. D. h. Der transmittierte Puls benötigt 4 ps, um von rechts nach links durch das Bild zu laufen ($30 \mu\text{m} \hat{=} 100 \text{ fs}$). Während dieser Zeit wechselwirkt er mit dem Plasma und erzeugt eine Brechungsindexstruktur, die sich mit der Zeit verändert. Erreicht der Probepuls das Plasma früher oder mehr als 4 ps später als der transmittierte Teilstrahl, so überschneiden sie sich nicht. Wir stellen daher zunächst die zeitliche Verzögerung zwischen dem Probepuls und dem transmittierten Teilstrahl grob ein, bis die Ionisationsfront auf dem Bildausschnitt zu sehen ist - und sich der Probepuls und der transmittierte Teilstrahl überschneiden. Anschließend verändern wir die zeitliche Verzögerung in 100 fs-Schritten, bis die Ionisationsfront die hellste Stelle der 2ω -Selbstemission, d. h. den Fokus, erreicht - die Ionisationsfront wandert wegen der Zeitauflösung durch den Bildausschnitt, während der Fokus an der hellsten Stelle des relativistische Kanals sitzen bleibt (Zeitintegral). Die Fokusposition ist schließlich höchstens innerhalb der Ausdehnung des relativistischen Kanals in z -Richtung unbestimmt, d. h. weniger als 200 fs (entspricht $60 \mu\text{m}$ maximaler Ausdehnung der 2ω -Selbstemission), (s. Abb. 4.9). Befindet sich die Ionisationsfront des transmittierten Pulses im Fokus, so setzen wir die zugehörige zeitliche Verzögerung als Referenz auf $\Delta\tau_p = 0$.

Wir öffnen nun den Weg des reflektierten und versperren denjenigen des transmittierten Pulses. Als nächstes verschieben wir den Strahlteiler parallel zur z -Achse, d. h. unter einem Winkel von 45° zum einfallenden Hauptpuls (s. Abb. 4.19). Die Referenzverzögerung bleibt fest auf Null. Durch das Verschieben des Strahlteilers ändert sich die Wegstrecke, die der reflektierte Puls bis zum gemeinsamen Fokus zurücklegt, während sich die des transmittierten Pulses nicht ändert. Der Strahlteiler führt eine zeitliche Ver-

³Wir unterscheiden zwischen dem reflektierten und dem transmittierten Teilstrahl, die bei der Reflexion und der Transmission an der Oberfläche des Strahlteilers entstehen.

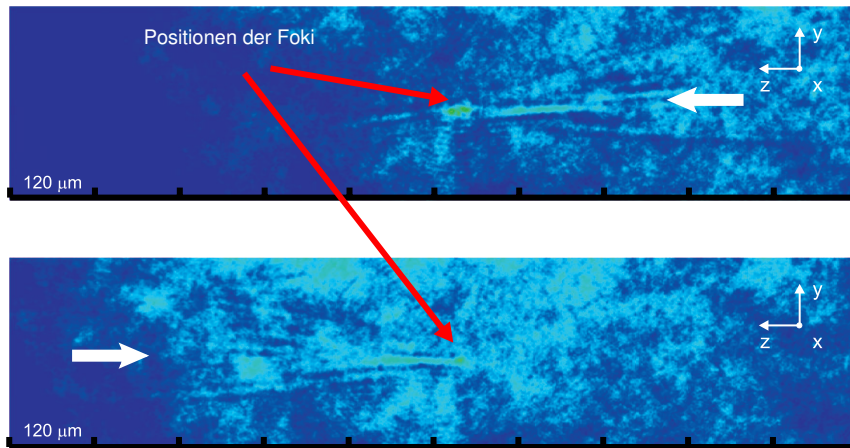


Abbildung 4.9: Schattenbilder des Überlapps. Zwei gegenläufige Pulse werden nacheinander in einen Helium-Gasstrahl fokussiert (Gasdichte: $n_e \approx 5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$). Obwohl die 2ω -Selbstemission des lasererzeugten Plasmas mittels eines Polarisationsfilters unterdrückt wird, ist in der Mitte beider Bilder ein heller Fleck zu erkennen. Dieser stammt von der 2ω -Plasmaemission an der Stelle der jeweiligen Foki. Da die Intensität in den Foki am höchsten ist, ist die Plasmaemission dort am hellsten. Die Foki sind bereits räumlich überlagert. Die Schattenbilder sind zu einem festen Zeitpunkt aufgenommen - oben ist ein Schnappschuß des von rechts kommenden unten ein Schappschuß des von links kommenden Pulses zu sehen. Es sind pfeilartige Strukturen zu erkennen, die zur Mitte der Bilder hin spitzer werden - die Pfeilspitzen geben die Position der Ionisationsfront an. Die Strukturen entstehen durch Ablenkung des Probestrahls aufgrund hoher Plasmagradien. Der Probestrahl durchleuchtet das Plasma in x -Richtung. Die Pfeilspitzen und die hellste Stelle der 2ω -Plasmaemission liegen übereinander, d. h. die Ionisationsfront des jeweiligen Pulses liegt im gemeinsamen Fokus der beiden gegenläufigen Pulse. Die Pulse sind räumlich und zeitlich überlagert.

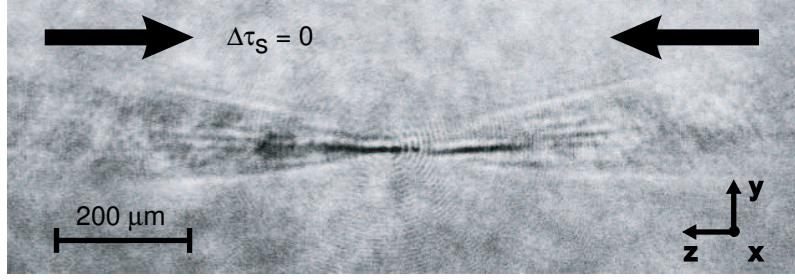


Abbildung 4.10: 2ω -Schattenbild und 2ω -Selbstemission des Überlapps. Von den 2ω -Schattenbildern (Elektronendichte: $5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$) werden geeignete Hintergrundbilder - dabei werden Bilder des Probestrabes aufgenommen, ohne daß der Hauptpuls ein Plasma erzeugt - abgezogen, damit die Strukturen besser sichtbar sind. Die hintergrundsfreien Schattenbilder und die Bilder der 2ω -Selbstemission sind überlagert. Auf dem Schattenbild sind pfeilartige Strukturen zu erkennen, welche zur Bildmitte hin spitz zulaufen. Diese entstehen dadurch, daß der 2ω -Probepulses, welcher in x -Richtung durch das Plasma läuft, aufgrund hoher Plasmagradienten abgelenkt wird. Für verschwindende zeitliche Verzögerung zwischen dem am Strahlteiler reflektierten und dem transmittierten Teilstrahl treffen sich die beiden Pulse gleichzeitig in ihrem gemeinsamen Fokus. Deutlich zu erkennen sind die relativistischen Kanäle (schwarze, in z -Richtung jeweils etwa $200 \mu\text{m}$ ausgedehnte 2ω -Selbstemission). Das Bild zeigt, daß die Pulse bei einer hohen Elektronendichte nicht bestmöglichst überlagert sind. Die relativistischen Kanäle liegen in y - und in z -Richtung etwas auseinander, und der nach links laufende Teilstrahl läuft unter einem kleinen Winkel zur z -Achse etwas in y -Richtung nach unten. Außerdem sind Ringe holographischen Ursprungs zu erkennen.

zögerung ($\Delta\tau_s$) zwischen dem transmittierten und dem reflektierten Teilstrahl ein. Sie beträgt (s. Abb. 4.19)

$$\Delta\tau_s(45^\circ) = \frac{\Delta x_s}{\cos(\pi/4) c}. \quad (4.22)$$

Die Motorkalibrierung des Strahlteilers von $\Delta x_s = 0.028 \mu\text{m}/\text{Schritt}$ liefert $\Delta x_s(45^\circ) = 0.1 \text{ fs}/\text{Schritt}$. Wir verschieben den Strahlteiler nun so, bis sich der reflektierte Teilstrahl auch im Fokus befindet und setzen die zugehörige zeitliche Verzögerung als Referenz für die Strahlteilerverschiebung ($\Delta\tau_s = 0$). Da die beiden Pulse die gleiche Wegstrecke zurücklegen, treffen sich gleichzeitig in ihrem gemeinsamen Fokus (s. Abb. 4.10). Der zeitliche Überlapp ist dabei in der Größenordnung der Pulsdauer von 100 fs (im ungünstigsten Fall: 200 fs). Die Pulse sind nun in Raum und Zeit bei einer hohen Elektronendichte von $5 \times 10^{19} \text{ W}/\text{cm}^2$ überlagert.

4 Experimentelle Messungen

Die Genauigkeit des räumlichen Überlapps ist durch die hohe Gasdichte gegeben und noch nicht durch die Genauigkeit des experimentellen Aufbaus (räumlicher Überlapp: $0.03 \mu\text{m}/\text{Schritt}$, zeitlicher Überlapp: $0.1 \text{ fs}/\text{Schritt}$, räumliche Auflösung: $5 \mu\text{m}$, zeitliche Auflösung: 100 fs) begrenzt. Die hohe Elektronendichte hat zur Folge, daß die 2ω -Plasmaemission - wie oben schon erwähnt - in x , y -Richtung bis zu $20 \mu\text{m}$ und insbesondere in z -Richtung bis zu $60 \mu\text{m}$ ausgedehnt ist.

An dieser Stelle öffnen wir beide Shutter, so daß die Pulse zum ersten Mal aufeinanderprallen. Dabei arbeiten wir nicht mit einer Repetitionsrate von 10 Hz , sondern zunächst nur mit Einzelschüssen (engl. : "single-shot mode") und später mit 10 Laserschüssen je Einstellung. Wir verwenden insgesamt einige tausend Laserschüsse.

Nachdem die Pulse bei hoher Gasdichte räumlich und zeitlich überlappen, können wir uns die Schattenbilder betrachten. Zunächst stellen wir eine positive zeitliche Verzögerung ($\Delta\tau_p > 0$) in einem Bereich von $\Delta\tau_p = 0 \dots 500 \text{ fs}$ ($0 \dots 0.5 \text{ ps}$) zwischen dem Probepuls und dem Hauptpuls ein und betrachten Schattenbilder der gegenseitigen Durchdringung (s. Abb. 4.11 und 4.12).

Bei der Durchdringung der Pulse sehen wir auf jeder Momentaufnahme ineinanderliegende konzentrische Ringe, wobei der äußerste Ring einen Durchmesser von mehreren hundert Mikrometern in der y , z -Ebene besitzt. Die Zentren der Ringe breiten sich innerhalb des relativistischen Kanals etwa mit der Lichtgeschwindigkeit in z -Richtung aus; außerhalb des relativistischen Kanals verschwinden sie. Eine Erklärung ist, daß es sich hierbei um eine holographische Abbildung handelt: Der Hauptpuls erzeugt ein leuchtendes Objekt, welches sich in z -Richtung bewegt und durch den Probepuls beleuchtet wird. Von dem kleinen Objekt gehen kugelförmige Wellenfronten aus, die mit den ebenen Wellenfronten des Probestrals interferieren. Dadurch entsteht auf der CCD-Kamera eine holographische Abbildung. Außerhalb des relativistischen Kanals ist die Intensität des Lasers und daher die Leuchtkraft des Objekts nicht hoch genug - die Ringe verschwinden. Bei einer Wellenlänge des Probepulses von $\lambda_p = 400 \text{ nm}$ sind seine Wellenfronten 400 nm voneinander entfernt. Aufgrund seiner Pulsdauer von etwa 100 fs ist er in Ausbreitungsrichtung rund $30 \mu\text{m}$ ausgedehnt. Das bedeutet, daß etwa 75 Wellenfronten interferieren und Ringe bilden. Diese Zahl stimmt gut mit aus den Schattenbildern beobachteten überein.

Weiterhin stellen wir verschiedene zeitliche Verzögerungen ($\Delta\tau_s = 0 \dots 366 \text{ fs}$, in 122 fs -Schritten) zwischen dem reflektierten und dem transmittierten Teilstrahl ein und betrachten Schattenbilder des Zusammenstoßes (s. Abb. 4.13). Zuletzt schauen wir uns noch die 2ω -Selbstemission, die bei der Fokussierung der beiden gegenläufigen Laserpulse entsteht. Bei einer Gesamtenergie der beiden Teilstrahlen von 100 mJ ist die kritische

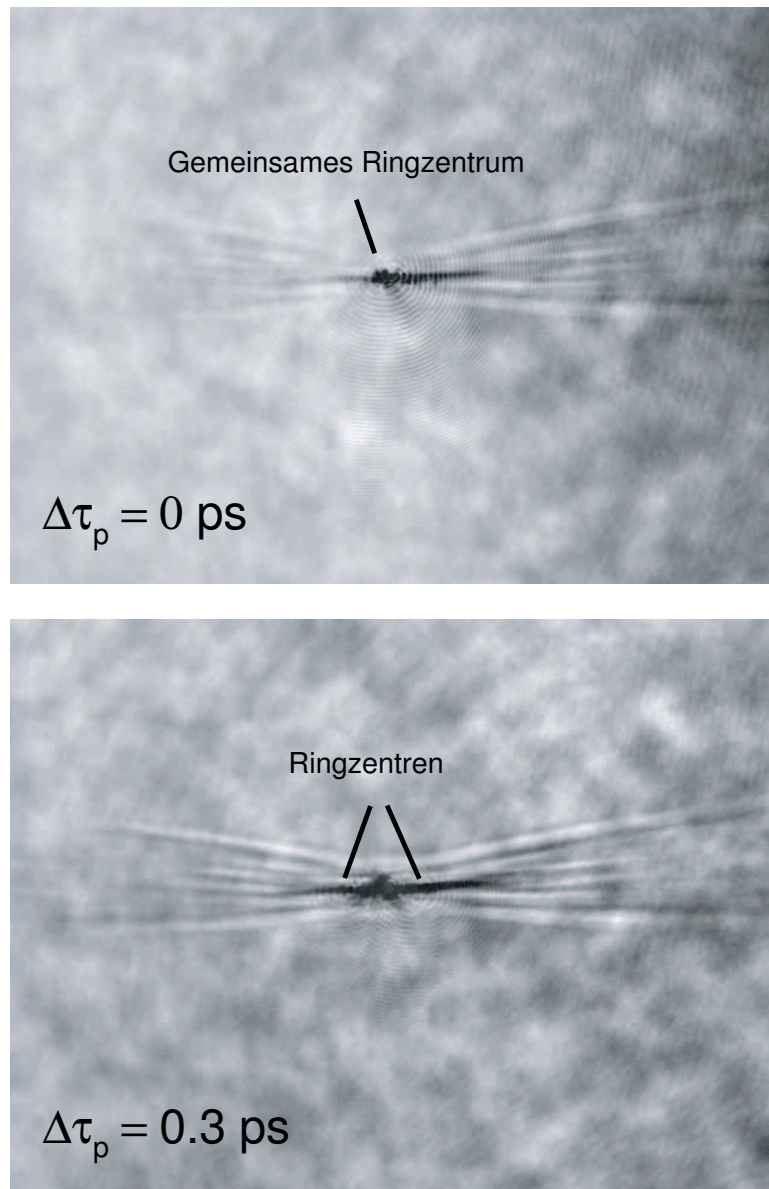


Abbildung 4.11: Durchdringung zweier gegenläufiger Laserpulse $1/2$. Die Pulse sind im voraus räumlich und zeitlich überlagert. Die zeitliche Verzögerung zwischen dem Haupt- und dem Probepuls beträgt $\Delta\tau_p = 0 \text{ ps}$ (gleichzeitiges Eintreffen der beiden Pulse im gemeinsamen Fokus) und $\Delta\tau_p = 0.3 \text{ ps}$; $\Delta\tau_p > 0$ bedeutet Beobachtung zu späteren Zeiten. Die (hintergrundsfreien) Schattenbilder und die Bilder der 2ω -Selbstemission sind überlagert. An den Zentren der (interferierenden) Ringe ist zu erkennen, daß sich die Pulse für spätere Zeiten durchdringen.

4 Experimentelle Messungen

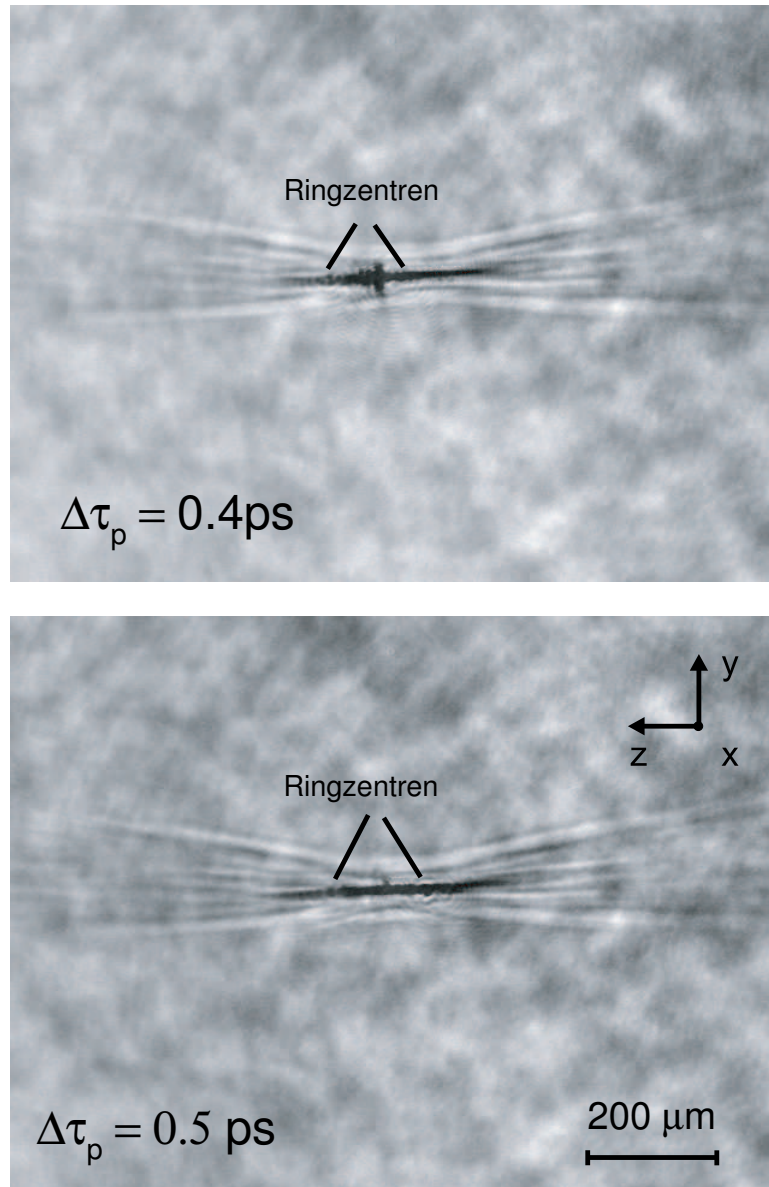


Abbildung 4.12: Durchdringung zweier gegenläufiger Laserpulse 2/2. Die zeitliche Verzögerung zwischen dem Haupt- und dem Probepuls beträgt $\Delta\tau_p = 0.4\text{ps}$ und $\Delta\tau_p = 0.5\text{ps}$; $\Delta\tau_p > 0$ gehört zu späteren Zeiten. Nach 0.5ps wandern sie ca. $150\text{ }\mu\text{m}$ in z -Richtung (vgl. Maßstab).

4 Experimentelle Messungen

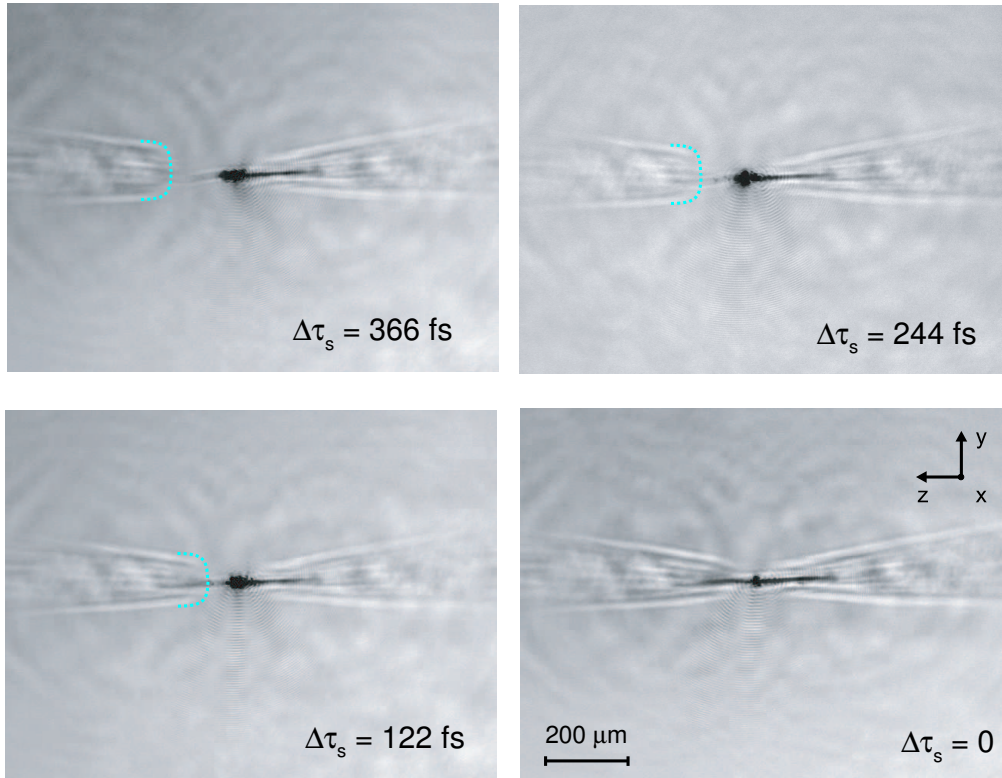


Abbildung 4.13: Schattenbilder der Strahlteilerverschiebung. Durch eine Strahlteilerverschiebung parallel zur z -Achse - dies entspricht einer Verschiebung unter einem Winkel von 45° zur Einfallsrichtung des Hauptpulses - verändert sich die Wegstrecke, die der am Strahlteiler reflektierte Puls durchläuft (von nach links nach rechts laufender Puls). Die Wegstrecke des am Strahlteiler transmittierten Pulses ändert sich nicht (von rechts nach links laufender Puls). Es sind vier 2ω -Schattenbilder zu sehen - aufgenommen für unterschiedliche zeitliche Verzögerungen ($\Delta\tau_s = 0 \dots 366 \text{ fs}$, in 122 fs -Schritten). Die Schattenbilder sind hintergrundfrei und mit der 2ω -Selbstemission des Plasmas überlagert. Die relativistischen Kanäle sind deutlich zu erkennen (schwarze, in z -Richtung ausgedehnte 2ω -Selbstemission mit einer Länge von hunderten von Mikrometern sowie dickem Fleck in der Mitte). Es ist zu sehen, wie sich die Ionisationsfront des reflektierten Pulses von links nach rechts ausbreitet (hellblau gestrichelte Linie; ein Zeitschritt von $\Delta\tau_b = 122 \text{ fs}$ entspricht einer Wegstrecke von etwa $36 \mu\text{m}$ in z -Richtung, vgl. $200 \mu\text{m}$ -Maßstab). Für verschwindende zeitliche Verzögerung ($\Delta\tau_s = 0$) erreichen die Pulse gleichzeitig ihren gemeinsamen Fokus.

4 Experimentelle Messungen

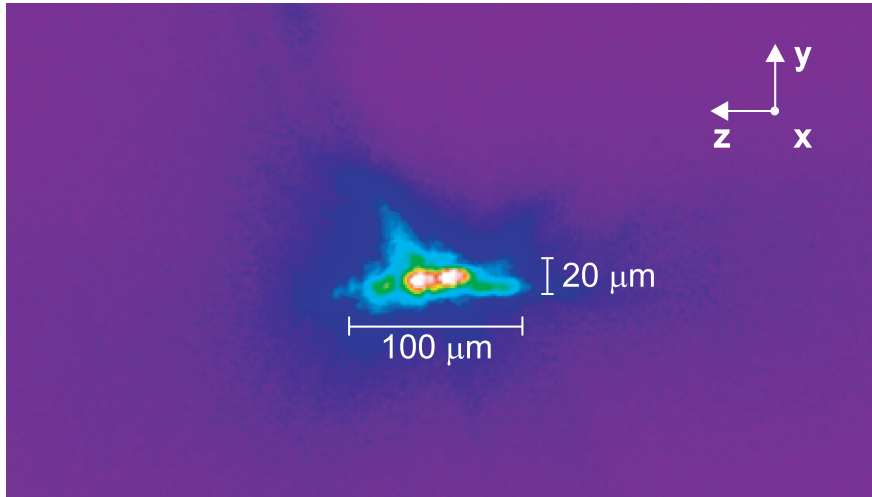


Abbildung 4.14: 2ω -Selbstemission und Selbstfokussierung zweier gegenläufiger Laserpulse. Gezeigt ist die 2ω -Selbstemission des Plasmas bei der Fokussierung zweier gegenläufige Laserpulse in den Helium-Gasstrahl (Energie insgesamt: 100 mJ, hohe Elektronendichte: $5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$). Die Ausdehnung der Plasmaemission beträgt etwa $20 \mu\text{m}$ in y - und $100 \mu\text{m}$ in z -Richtung. An der hellsten Stelle der 2ω -Selbstemission sind die Positionen der Foki zu erwarten (zwei weiße Flecken); nach außen hin nimmt die Helligkeit ab. Da bei einer Energie von 100 mJ und einer Pulsdauer von 100 fs die kritische Leistung für Selbstfokussierung überschritten ist, nimmt insbesondere die Ausdehnung der 2ω -Selbstemission in z -Richtung zu. Es entstehen relativistische Kanäle mit einer Länge von mehreren hundert Mikrometern (Rayleighlänge: $9 \mu\text{m}$).

Dichte erreicht, so daß Selbstfokussierung auftritt und relativistische Kanäle zu erkennen sind (s. Abb. 4.14).

Um die Genauigkeit des räumlichen Überlapps in x , y - und besonders in z -Richtung zu vervollkommen, verringern wir die Gasdichte und messen das relativistische Autokorrelationsignal, d. h. die zweite Harmonische der nichtlinearen Thomsonsstreuung, welches von der Intensität und daher von dem räumlichen und zeitlichen Überlapp der beiden gegenläufigen Pulse abhängt. Dazu verkürzen wir die Öffnungszeit der Gasdüse und verringern dadurch die Elektronendichte auf $2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ (s. Abb. 4.5).

Wir sehen, daß das 2ω -Signal schwächer wird und der relativistischen Kanals im wesentlichen in z -Richtung kürzer wird. Dies ist einsichtig, da die kritische Leistung für Selbstfokussierung umgekehrt proportional zur Elektronendichte ist $P_{\text{krit}} \sim 1/n_e$, und sich bei einer Elektronendichte von $2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ auf $P_{\text{krit}} (n_e = 2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}) =$

4 Experimentelle Messungen

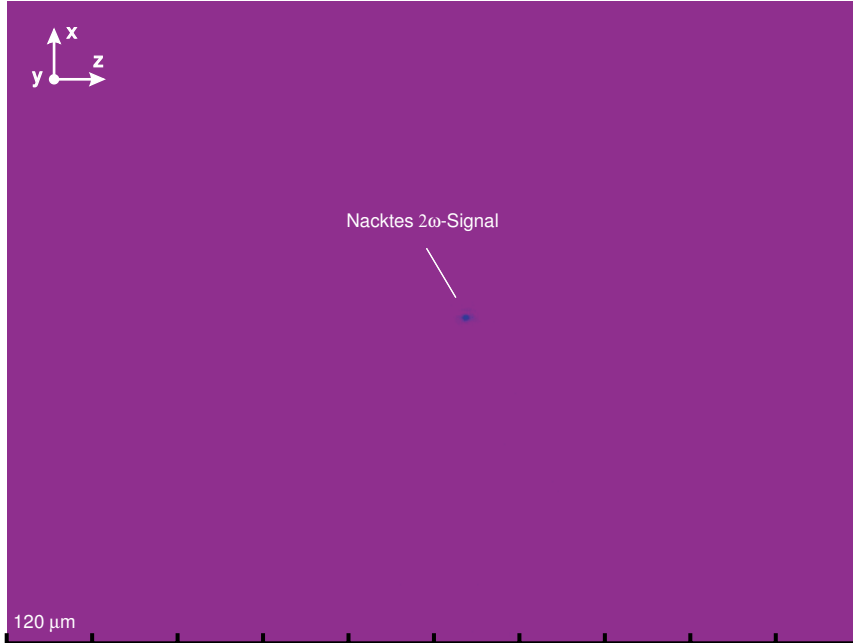


Abbildung 4.15: 2ω -Signal bei niedriger Elektronendichte. Gezeigt ist die 2ω -Selbstemission bei einer niedrigen Gasdichte von $2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ (2ω -Signal). Das nackte 2ω -Signal ist nur wenige Mikrometer in x - und in z -Richtung ausgedehnt. Es dient als relativistisches Autokorrelations-signal zweiter Ordnung.

130 TW erhöht. Wir erreichen in unseren Experimenten jedoch nur eine Laserleistung von 1 TW. Selbstfokussierung findet daher nicht statt, und das Laserlicht wird nicht mehr entlang der optischen Achse gebündelt. Wir verringern das 2ω -Signal bis zur Detektionsgrenze der CCD-Kamera. Schließlich ist das 2ω -Signal sehr schwach und winzig (s. Abb. 4.15).

Das 2ω -Signal ist das zeitintegrierte Signal, welches alle Elektronen, die im intensiven Laserfeld in z -Richtung beschleunigt werden, ausstrahlen. Es wird schwächer, da sich die Elektronenanzahl um 26 Größenordnungen pro Kubikmikrometer ($10^2 \text{ cm}^{-3} = 10^{26} \mu\text{m}^{-3}$) verringert. Je weniger Elektronen vorhanden sind, desto schwächer ist auch die gesamte abgestrahlte Leistung. Da das nackte 2ω -Signal sehr schwach ist, integrieren wir es entlang der y -Achse mit einer Integrationsweite von 10 pixel ($\hat{=} 18.6 \mu\text{m}$) in z -Richtung, d. h. wir integrieren über alle Pixel, die sich in einem Streifen einer Breite von 10 pixel befinden. Das in y -Richtung integrierte sowie zeitintegrierte 2ω -Signal tragen wir räumlich aufgelöst gegen die z -Achse auf (räumliche Auflösung: $5 \mu\text{m}$). Dabei nehmen wir jeweils 10 Bilder des 2ω -Signals auf und lassen währenddessen die experimentellen

4 Experimentelle Messungen

Bedingungen gleich (engl. : "set"), d. h. 10 Laserschüsse je Set.

Wir erkennen, daß die Kurve des 2ω -Signals zwei Intensitätsmaxima zeigt, die in z -Richtung etwa $44 \mu\text{m}$ voneinander entfernt sind (s. Abb. 4.16), und ungefähr gleich hoch sind. Die Ausdehnung in z -Richtung beträgt insgesamt $60 \mu\text{m}$. Wir deuten die beiden Intensitätsmaxima als die Foki der beiden gegenläufigen Laserpulse. Da der Abstand der beiden Foki größer ist als die Pulsbreite ($\approx 30 \mu\text{m}$), wechselwirken sie nicht miteinander, d. h. sie sind nicht korreliert. Zwischen beiden Peaks verschwindet die Intensität fast vollständig.

Nach Verschieben des Strahlteilers verschmelzen beide Intensitätsmaxima zu einem einzigen Intensitätsmaximum (s. Abb. 4.16b). Die FWHM-Pulsbreite des einzelnen Peaks liegt unterhalb der Pulsbreite ($< 30 \mu\text{m}$). Das bedeutet, daß die Pulse räumlich und zeitlich überlappt sind. Die räumliche Auflösung in z -Richtung beträgt $5 \mu\text{m}$. Die Integration entlang der y -Achse hat keinen Einfluß auf die räumliche Auflösung in z -Richtung. Die Auswertung zeigt, daß die Intensität des 2ω -Signals von Laserschuß zu -schuß um bis zu 100 % schwankt

$$|S_{2\omega,i}(z) - S_{2\omega,j}(z)| \leq 100 \%, \quad (4.23)$$

wobei $S_{2\omega,i}(z)$ und $S_{2\omega,j}(z)$ diejenigen Kurven des 2ω -Signals sind, die zu verschiedenen Laserschüssen gehören. Aufgrund der hohen Schwankung mitteln wir über sämtliche Laserschüsse eines Sets gemäß

$$\overline{S_{2\omega}(z)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S_{2\omega,i}(z)}{n}, \quad (4.24)$$

wobei $S_{2\omega,i}(z)$ die Kurve des 2ω -Signals ist, die zu einem bestimmten Laserschuß gehört, und n die Gesamtanzahl der Laserschüsse in einem Set bezeichnet. Aus der gemittelten Kurve des 2ω -Signals eines Sets, d. h. $\overline{S_{2\omega}(z)}$, bestimmen wir die z -Position (z_{max}) und die Höhe $\overline{S_{2\omega}(z_{\text{max}})}$ des Intensitätsmaximums

$$\overline{S_{2\omega}(z)} \doteq \max \rightarrow z_{\text{max}}, \overline{S_{2\omega}(z_{\text{max}})}. \quad (4.25)$$

Zur Bestimmung der Peakposition und -höhe verwenden wir ein Programm, welches einen quadratischen, polynomialen Fit in der Gegend des Peaks durchführt ("Labview 7: Peak Detector"). Als Fehler(balken), sowohl für die Peakposition (σ_{pos}) als auch die Peakhöhe (σ_{hhe}), geben wir die Standardabweichung an. Dazu bilden wir zunächst die

4 Experimentelle Messungen

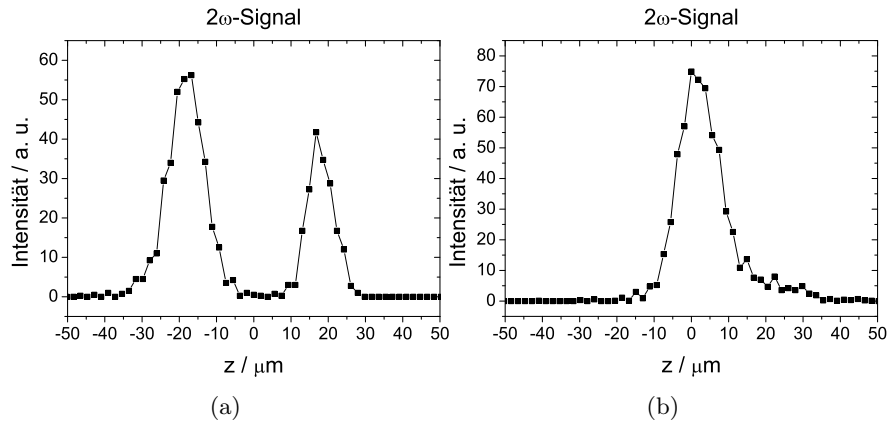


Abbildung 4.16: Überlapp der beiden gegenläufigen Laserpulse. Die Intensität des 2ω -Signals ist gegen die z -Achse aufgetragen. Das 2ω -Signal ist über sämtliche Laserschüsse derselben Einstellung gemittelt, in y -Richtung mit einer Integrationsbreite von $10 \text{ pixel} \hat{=} 18.6 \mu\text{m}$ integriert und in z -Richtung mit einer Genauigkeit von $5 \mu\text{m}$ räumlich aufgelöst. a) Zwei Intensitätsmaxima (Peaks) mit einem Abstand von $44 \mu\text{m}$ auf der z -Achse sind zu erkennen (maximale Ausdehnung in z -Richtung: $\approx 60 \mu\text{m}$). Die Intensitätsmaxima lassen sich als Foki der beiden gegenläufigen Laserpulse deuten. Der Abstand der beiden Foki größer als die Pulsbreite ($\approx 30 \mu\text{m}$) ist, so daß die Pulse nicht miteinander wechselwirken. Die Position $z = 0$ zeigt die Mitte der beiden Peaks an. Die Peakhöhen unterscheiden sich um etwa 30% (Foki liegen nicht genau symmetrisch zur y -Achse des Gasstrahl). Zwischen beiden Peaks verschwindet die Intensität fast vollständig. b) Nach Verschieben des Strahlteilers verschmelzen beide Intensitätsmaxima zu einem einzigen Intensitätsmaximum. Die Pulsbreite (FWHM) liegt unterhalb der Pulsbreite ($< 30 \mu\text{m}$). Die Pulse sind räumlich und zeitlich überlappt (Autokorrelation).

4 Experimentelle Messungen

Mittelwerte (μ_{pos} , μ_{hhe}) der Peakpositionen und -höhen

$$\mu_{\text{pos}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z_i}{n}, \quad \mu_{\text{hhe}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{S_i}{n}, \quad (4.26)$$

wobei z_i die Peakposition und S_i die Peakhöhen sind, die zu einzelnen Laserschüssen gehören und berechnen anschließend die jeweilige Standardabweichung

$$\sigma_{\text{pos}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(z_i - \mu_{\text{pos}})^2}{n-1}}, \quad \sigma_{\text{hhe}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(S_i - \mu_{\text{hhe}})^2}{n-1}}. \quad (4.27)$$

Die Peakpositionen deuten wir als Fokuspositionen unserer beiden gegenläufigen Laserpulse. Schließlich verändern wir die z -Position des zweiten Parabolspiegels. Durch dessen Verschieben lassen sich die Foki der beiden gegenläufigen Pulse schließlich mit einer hohen Genauigkeit von $5 \mu\text{m}$ in z -Richtung (!) überlagern.

Um dies zu verdeutlichen, tragen wir die Peakposition z_{max} gegen die jeweilige z -Position des zweiten parabolischen Spiegels auf. Wir erkennen, daß sich der Fokus des ersten Parabolspiegels nicht ändert, während der Fokus des zweiten Parabolspiegels in z -Richtung wandert (s. Abb. 4.17). Die Foki liegen zuerst etwa $44 \mu\text{m}$ auseinander, und es sind jeweils zwei Intensitätsmaxima zu sehen. Verschieben wir die Parabolspiegel um $\Delta z_{p2} = 12 \mu\text{m}$ aufeinander zu, so verringert sich der Abstand der beiden Foki auf etwa $35 \mu\text{m}$, und bei weiterer Verschiebung verschmelzen die Peaks zu einem einzigen. Die Fehler für die Peakpositionen ergeben sich aus der Standardabweichung (σ_{pos}) für verschiedene Laserschüsse derselben Einstellung. Die Meßgenauigkeit der Peakposition ist kleiner als $10 \mu\text{m}$. Schließlich überlappen sich die Foki mit einer Genauigkeit von etwa $\Delta_{\text{ueb}} = 5 \mu\text{m}$ in z -Richtung.

Schließlich verschieben wir den Strahlteiler parallel zur z -Achse und zeigen, daß die Pulse bestmöglichst überlagert sind. Dazu tragen wir die Peakhöhe $\overline{S_{2\omega}(z_{\text{max}})}$ gegen die zeitliche Verzögerung $\Delta\tau_s$ auf, welche die Strahlteilerverschiebung zwischen dem transmittierten und dem reflektierten Strahl verursacht. Wir mitteln dabei über sämtliche Laserschüsse einer Einstellung. Da wir erkennen, daß das Signal schwächer wird, läßt sich diese Messung als relativistische Mehrschußautokorrelation interpretieren (s. Abb. 4.18). Bei der Strahlteilerverschiebung tritt nur ein kleiner Parallelversatz des reflektierten Strahls von $90 \mu\text{m}$ auf, d. h. der reflektierte Strahl trifft höchstens $90 \mu\text{m}$ seitlich versetzt auf den Parabolspiegel. Da die Breite des Strahls etwa 70mm und die Brennweite des Parabolspiegels jedoch 120mm betragen, ändern sich die Winkel der im Fokus ankommenden Strahlen nur unwesentlich. Die Fokussierung bleibt daher unverändert, und es

4 Experimentelle Messungen

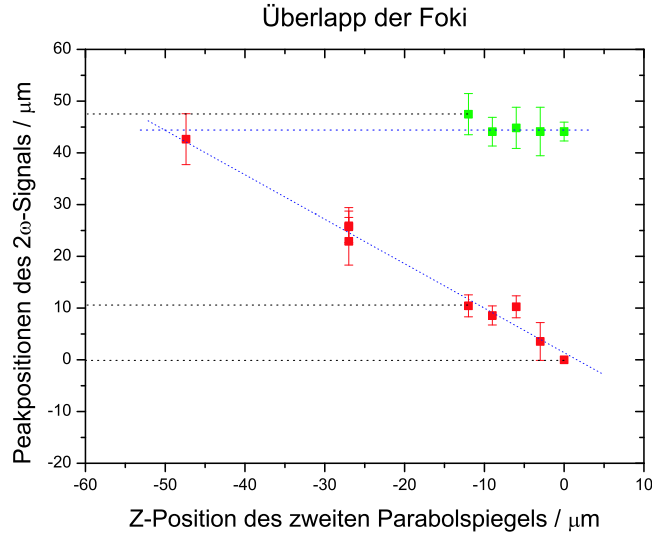


Abbildung 4.17: Ueberlapp der Foki der beiden gegenläufigen Laserpulse. Die Peakpositionen des 2ω -Signals (z_{max}) sind gegen die Verschiebung des zweiten Parabolspiegels (Δz_{p2}) in z -Richtung aufgetragen. Eine negative Verschiebung $\Delta z_{\text{p2}} < 0$ bedeutet, daß sich die Parabolspiegel aufeinander zu bewegen. Das 2ω -Signal ist über sämtliche Laserschüsse derselben Einstellung gemittelt, in y -Richtung mit einer Integrationsbreite von $10 \text{ pixel} \hat{=} 18.6 \mu\text{m}$ integriert und in z -Richtung mit einer Genauigkeit von $5 \mu\text{m}$ räumlich aufgelöst. Die grünen Punkte zeigen die Fokusposition des ersten Parabolspiegels, während die roten Punkte die des zweiten Parabolspiegels zeigen. Zu Beginn liegen die Foki etwa $44 \mu\text{m}$ auseinander, und es sind jeweils zwei Intensitätsmaxima (Peaks) zu sehen, d. h. sowohl grüne als auch rote Punkte. Bei einer Verschiebung von $\Delta z_{\text{p2}} = -12 \mu\text{m}$ beträgt der Abstand der beiden Foki etwa $35 \mu\text{m}$ (schwarze gestrichelte, waagrechte Linien), und bei weiterer negativer Verschiebung ist nur noch ein Peak vorhanden. Beim Verschieben des zweiten Parabolspiegels ändert sich die Fokusposition des zweiten Parabolspiegels in guter Näherung linear (blau gestrichelt schräge Gerade), während die Fokusposition des ersten Parabolspiegels im wesentlichen unverändert bleibt (blau gestrichelt, waagrechte Gerade). Die Fehler für die Peakpositionen ergeben sich aus der Standardabweichung (σ_{pos}) für verschiedene Laserschüsse derselben Einstellung; die Standardabweichung ist für jeden Meßpunkt in positive sowie in negative Richtung eingetragen. Die Meßgenauigkeit der Peakposition ist kleiner als $10 \mu\text{m}$. Die Foki überlappen schließlich mit einer Genauigkeit von $\lesssim 5 \mu\text{m}$, d. h. der letzte rote Meßpunkt (am weitesten links) ist weniger als $5 \mu\text{m}$ von der waagrechten blau gestrichelten Linie entfernt.

4 Experimentelle Messungen

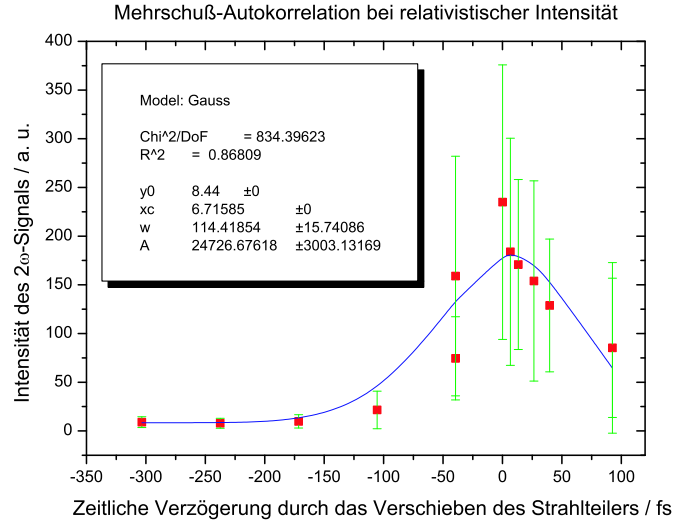


Abbildung 4.18: Mehrschußautokorrelationssignal bei relativistischer Intensität. Die Intensität des 2ω -Signals ist gegen die zeitliche Verzögerung aufgetragen, welche durch das Verschieben des Strahlteilers parallel zur z -Achse entsteht. Der eingeführte zeitliche Verzögerung zwischen dem reflektierten und transmittierten Strahl beträgt $\Delta\tau_s = \Delta x_s / \cos(45^\circ) c$, wobei Δx_s der Gangunterschied zwischen beiden Strahlen ist. Das 2ω -Signal ist über sämtliche Laserschüsse derselben Einstellung gemittelt, in y -Richtung mit einer Integrationsbreite von $10 \text{ pixel} \hat{=} 18.6 \mu\text{m}$ integriert und in z -Richtung mit einer Genauigkeit von $5 \mu\text{m}$ räumlich aufgelöst. Der bestmögliche Überlapp ist durch $\Delta\tau_s = 0 \text{ fs}$ angedeutet. Positive sowie negative zeitliche Verzögerungen führen zu einer Abnahme der Intensität des 2ω -Signals; die Pulse treffen sich nicht mehr in ihrem gemeinsamen Fokus, sondern außerhalb. Die Kurve läßt sich als Mehrschußautokorrelation deuten und durch eine Gauß'sche Kurve der Form $y = y_0 + A/w\sqrt{\pi/2} \exp\left(-2(x - x_c)^2/w^2\right)$ annähern. Der Korrelationsparameter $w = (114 \pm 16) \text{ fs}$ liefert eine Pulsdauer von $\tau_{\text{FWHM}} = w\sqrt{\ln 4} = (134 \pm 19) \text{ fs}$. Die Fehler für die Peakpositionen ergeben sich aus der Standardabweichung (σ_{hhe}) für verschiedene Laserschüsse derselben Einstellung; die Standardabweichung ist für jeden Meßpunkt in positive sowie in negative Richtung eingetragen. Die Fehlerbalken sind riesig. Bei $\Delta\tau_{\text{bs}} = 0$ ist der Fehlerbalken länger als das Intensitätsmaximum ($\approx 120\%$). Da der R^2 -Parameter ($R^2 = 0.87$) wesentlich kleiner als Eins ist, ist die Näherung ziemlich schlecht.

entsteht keine Phasenmodulation (s. Abb. 4.19).

4.4 Einzelschuß-Autokorrelation bei relativistischer Laserintensität

Da die beiden gegenläufigen Pulse mit hoher Genauigkeit überlappen, deuten wir das zeitintegrierte 2ω -Signal als relativistisches Autokorrelationssignal. Mit einem Polarisationsfilter überprüfen wir, daß das 2ω -Signal, wie es die Theorie voraussagt, in Ausbreitungsrichtung der gegenläufigen Laserpulse, d. h. in z -Richtung, linear polarisiert ist. Aufgrund unserer räumlichen Auflösung von $5\ \mu\text{m}$ in z -Richtung ist die Autokorrelation nicht interferometrisch. Für $a_0 \lesssim \sqrt{2}$ ist es möglich, die relativistischen Bewegungsgleichungen eines Elektrons, welches sich in einem intensiven Laserfeld befindet, in störungstheoretischer Näherung zu lösen. Die näherungsweise Behandlung der Abstrahlung eines relativistischen Elektrons zeigt, daß das 2ω -Signal in einer laufenden und einer stehenden elektromagnetischen Welle gleich ist, und es kommt heraus, daß das Autokorrelationssignal ein nichtlinearer optischer Effekt zweiter Ordnung in der Intensität ist $S_{2\omega} \sim I^2$. Abb. 4.19 verdeutlicht noch einmal die Meßmethode der relativistischen Autokorrelation.

Wir geben zur Wiederholung noch einmal die wichtigsten Formeln zur Auswertung an. Das gesamte elektrische Feld ist die Summe der beiden gegenläufigen Laserpulse

$$E(r, z, z_1, \Delta\tau) = E_L(r, z, t) + E_L(r, z - z_1, t - \Delta\tau), \quad (4.28)$$

wobei E_L bzw. E_R die elektrischen Felder des nach rechts bzw. des nach linkslaufenden Pulses ist. E_L ist das elektrische Feld des Pulses, welcher seinen Fokus bei $z = 0$ zur Zeit $t = 0$ erreicht. E_R ist das elektrische Feld des Pulses, dessen Fokus an der Stelle $z = z_1$ sitzt und der gegenüber dem Feld des anderen Pulses um $\Delta\tau = \Delta\tau_s$ verzögert ist. Das über den Raum und die Zeit integrierte 2ω -Signal läßt sich schreiben als

$$S(z, z_1, \Delta\tau) \sim \int_0^\infty 2\pi r \, dr \int_{-\infty}^{+\infty} dt |E^2(r, z, z_1, t, \Delta\tau)|^2 \quad (4.29)$$

Integration über die Interferenzterme und Integration liefert

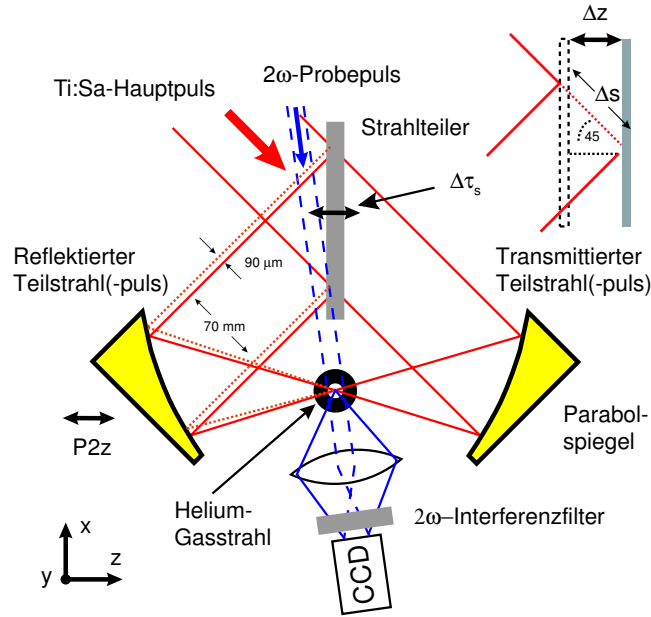


Abbildung 4.19: Relativistische Autokorrelation. Der Strahlteiler teilt den Hauptpuls (rote Linien) in zwei Teilstrahlen auf (rote Linien, durchgezogen), die unter einem Winkel von 180° in den Helium-Gasstrahl laufen. Der frequenzverdoppelte Probepuls (blaue Linien, gestrichelt) wird genutzt, um die Pulse mittels zeitaufgelöster Aufnahme von Schattenbildern im voraus zu überlagern. (Zeitintegriert) gemessen wird die zweite Harmonische der nichtlinearen Thomsonstreuung, die mittels einer Linse auf die CCD-Kamera (blaue durchgezogene Linien). Das durch die relativistische Bewegung der Elektronen entstehende 2ω -Signal dient als relativistisches Autokorrelationssignal zweiter Ordnung. Zur Untersuchung des 2ω -Signals werden im wesentlichen der Strahlteiler und der zweite Parabolspiegel parallel zur z -Achse verschoben. $\Delta\tau$ ist die durch den Strahlteiler eingeführte zeitliche Verzögerung zwischen den beiden Teilstrahlen. Der Strahlteiler wird so verschoben, daß insgesamt nur ein kleiner Parallelversatz des reflektierten Strahls (durchgezogene und gestrichelte rote Linien, linker Teilstrahl) von $90\ \mu\text{m}$ auftrifft. Aufgrund einer Breite des reflektierten Strahls von $70\ \text{mm}$ und einer Brennweite des Parabolspiegels von $120\ \text{mm}$, ändern sich die Winkel der im Fokus eintreffenden Teilbündel des reflektierten Strahls wenig. Da die Autokorrelationsmessung nicht interferometrisch ist, ist die im Fokus entstehende Phasenmodulation nicht von Bedeutung. Die Verschiebung des Strahlteilers in z -Richtung (Δz) führt zu einer veränderten Wegstrecke (Δs) des reflektierten Strahls (rot gestrichelte Linie, rechts oben). Da die Wegstrecke des transmittierten Strahls gleich bleibt, führt dies zu einem Gangunterschied von Δs zwischen den beiden Teilstrahlen. Der Gangunterschied $\Delta s = \Delta z / \cos(45^\circ)$ läßt sich über $\Delta\tau_s = \Delta s / c$, d. h. $100\ \text{fs} \hat{=} 30\ \mu\text{m}$, in die zeitliche Verzögerung $\Delta\tau_s$ umrechnen.

4 Experimentelle Messungen

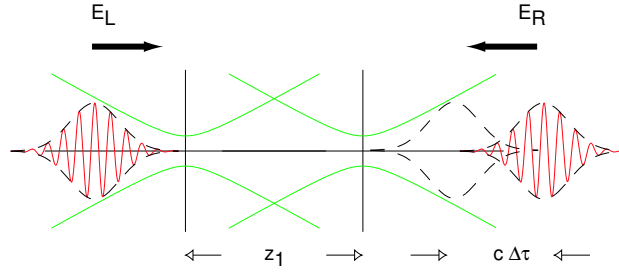


Abbildung 4.20: Meßprinzip der relativistischen Autokorrelation. Es sind verschiedene Möglichkeiten für die Überlagerung zweier gegenläufiger Pulse aufgezeigt. Ihre optischen Achsen liegen übereinander. Die grünen Kurven zeigen zwei Gauß'sche Strahlen, deren Foki eine Strecke von z_1 voneinander entfernt liegen. Der von rechts kommende Gauß'sche Puls (E_R) ist gegenüber dem von links kommenden Gauß'schen Puls (E_L) um $\Delta\tau$ zeitlich verzögert.

$$S_{2\omega}(z, z_1, \Delta\tau) \sim \frac{I_{0L}^2}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} + \frac{I_{0R}^2}{1 + \left(\frac{z-z_1}{z_0}\right)^2} + \frac{4I_{0L}I_{0R}}{1 + \left(\frac{z-z_1/2}{z_0}\right)^2 + \frac{z_1^2}{4z_0^2}} \times \exp\left[-\frac{4}{\tau_L^2} \left(\frac{z-z_1/2}{c} - \frac{\Delta\tau}{2}\right)^2\right] \quad (4.30)$$

wobei I_{0L} and I_{0R} die Intensitäten des nach rechts bzw. des nach links laufenden Laserpulses, z_0 die Rayleighlänge des Gauß'schen Strahles und τ_L die halbe $1/e$ -Pulsdauer der Gauß'schen Feldeinhüllenden (zeitliches Gauß'sches Profil) sind. Die FWHM-Pulsdauer der Intensität (τ_{FWHM}) und die halbe $1/e$ -Pulsdauer (τ_L) sind über $\tau_{\text{FWHM}} = \tau_L \sqrt{2 \ln 2}$ verknüpft (6.307). Für eine ebene Welle ($z_0 \rightarrow \infty$), einem gemeinsamen Fokus der beiden Strahlen ($z_1 = 0$) und gleichen Intensitäten des nach rechts und des nach links laufenden Pulses ($I_{0L} = I_{0R} = I_0$) vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$S_{2\omega}(z, \Delta\tau) \sim 2I_0^2 \left[1 + 2 \exp\left(-\frac{4}{\tau_L^2} \left(\frac{z}{c} - \frac{\Delta\tau}{2}\right)^2\right) \right]. \quad (4.31)$$

Befinden sich die Foki an verschiedenen Stellen auf der optischen Achse, so treten zwei verschiedene Situationen auf (s. Abb. 4.20):

- Überlappende Foki: Überlappen beide Foki bei $z = 0$, so treffen sich die Pulse bei

4 Experimentelle Messungen

der Position, die durch die Strahlteilerposition festgelegt ist (s. Abb. 4.21a). Für $\Delta\tau = 0$ durchdringen sich die beiden Pulse genau im Fokus. In diesem Fall ist das 2ω -Signal maximal

$$S_{2\omega}(z = 0, \Delta\tau = 0) \sim 6I_0^2.$$

Für $\Delta\tau \neq 0$ überlappen sich die Foki außerhalb des Fokus, so daß das Signal schwächer wird (s. Abb. 4.21b).

- Nichtüberlappende Foki: Befinden sich die Foki an verschiedenen Positionen $z = 0$ und $z = z_1$, so erscheinen zwei Intensitätsmaxima, die ungefähr gleich hoch sind. Jeder der beiden Pulse erzeugt seinen eigenen Peak, wenn die Bedingung $\Delta\tau \gg z_1/c$ erfüllt ist, wobei $\Delta\tau$ die zeitliche Verzögerung zwischen den beiden Pulsen ist (s. Abb. 4.22a). Überlappen sich die Pulse in einem der beiden Foki oder an einer anderen Stelle, so besteht das Signal entweder aus einem oder aus zwei Peaks (s. Abb. 4.22b). In Abb. 4.21 vergleichen wir das gemessene 2ω -Signal für $z_1 = 0$, d. h. für überlappende Foki, mit den nach Gl. (4.30) ermittelten Kurven. Es zeigt sich, daß die Meßpunkte sowohl für verschwindende zeitliche Verzögerung ($\Delta\tau = 0$) als auch für die beiden 2ω -Signale, die zu einer zeitlichen Verzögerung von $\Delta\tau = \pm 66$ fs hervorragend mit den berechneten Kurven übereinstimmen. Aus den genäherten Kurven bestimmen wir die FWHM-Pulsdauer τ_{FWHM} und die Rayleighlänge z_0 . Wir erhalten

$$\tau_{\text{FWHM}} = (112 \pm 11) \text{ fs} \quad (4.32)$$

$$z_0 = (9 \pm 1) \mu\text{m} \quad (4.33)$$

Abb. 4.22b zeigt die 2ω -Signale für Foki, welche nicht an derselben Stelle sitzen. Die schwarze Kurve stellt das 2ω -Signal dar, das wir messen, falls die Foki $z_1 = 45 \mu\text{m}$ voneinander entfernt sind und die zeitliche Verzögerung ($\Delta\tau$) zwischen den beiden gegenläufigen Pulse so eingestellt ist, daß sie sich im linken Fokus ($z = 0$) zeitlich überschneiden (s. Abb. 4.22a). Bewegen wir die Fokusposition zur Stelle $z = 22 \mu\text{m}$, so erhalten wir ein symmetrisches Signal (s. Abb. 4.22b, rote Kurve).

Die aus der relativistischen Autokorrelationsmessung zweiter Ordnung ermittelte FWHM-Pulsdauer (τ_{rel}) stimmt innerhalb der Fehlergrenzen mit der aus der klassischen Autokorrelationsmessung dritter Ordnung ermittelten FWHM-Pulsdauer (τ_{klass} , s. Kap. 4.1)

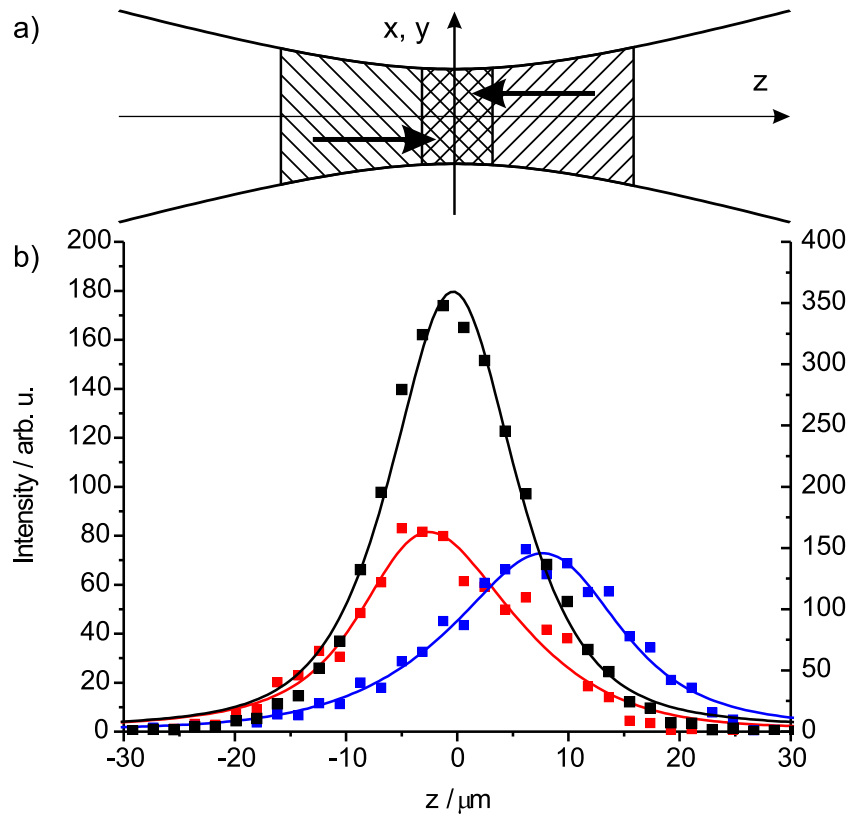


Abbildung 4.21: a) 2ω -Signal zweier gegenläufiger Laserpulse mit überlappenden Foki. b) 2ω -Signal, gemessen für zwei Pulse, deren Foki bei $z = 0$ überlappen. Die schwarzen Meßpunkte gehören zu einer verschwindenden zeitlichen Verzögerung zwischen den beiden Pulsen ($\Delta\tau = 0$). Die blauen bzw. roten Meßpunkte gehören zu einer zeitlichen Verzögerung $\Delta\tau = +66$ fs bzw. $\Delta\tau = -66$ fs. Die durchgezogenen Linien sind berechnet (Nichtlineare Kurvenpassung gemäß Gl. 4.30). Der besseren Übersicht wegen sind die experimentellen Werte für nichtverschwindende zeitliche Verzögerung ($\Delta\tau \neq 0$, rot und blau) um einen Faktor 2 (linke Skala) gestreckt - bzgl. der experimentellen Werte (rechte Skala) für verschwindende zeitliche Verzögerung ($\Delta\tau = 0$, schwarz).

4 Experimentelle Messungen

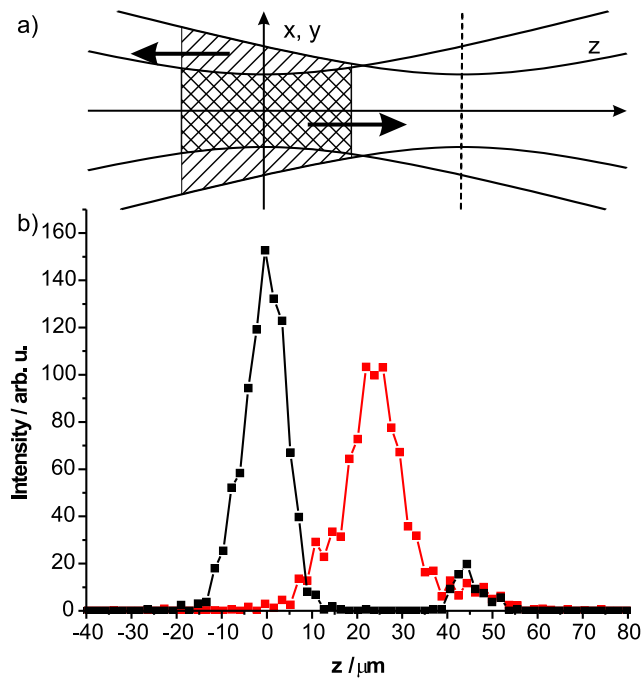


Abbildung 4.22: a) 2ω -Signal für zwei gegenläufige Laserpulse mit nichtüberlappenden Foki. b) 2ω -Signal, gemessen für zwei Pulse, deren Foki $z_1 = 45 \mu\text{m}$ auseinander liegen; die Pulse überschneiden sich (in der Zeit!) im linken Fokus (schwarze Kurve). Die rote Kurve gehört zu $z_1 = 22 \mu\text{m}$, und das 2ω -Signal ist symmetrisch.

4 Experimentelle Messungen

überein.

$$\tau_{\text{rel}} = (112 \pm 11) \text{ fs} \quad (4.34)$$

$$\tau_{\text{klass}} = \begin{pmatrix} 84 & +17 \\ & -8 \end{pmatrix} \text{ fs.} \quad (4.35)$$

Die relativistische Autokorrelationsmessung zur Bestimmung der Pulsdauer - einem wesentlichen Parameter für Experimente auf dem Gebiet der relativistischen Laser-Plasma-Physik - ist aus folgenden Gründen genauer als die klassische:

1. Bei der klassischen Autokorrelationsmessung ist es nicht möglich, die Pulsdauer unmittelbar im Fokus zu bestimmen, da die verwendeten nichtlinearen Kristalle bei relativistischen Laserintensitäten zerstört würden.
2. Bei der klassischen Autokorrelation wird nur ein kleiner Fleck des gesamten Strahlquerschnitts von $(2 \times 2) \text{ mm}^2$ genutzt - der FWHM-Durchmesser des gesamten, aufgeweiteten Strahlprofils beträgt etwa 40 mm. D. h. Ein großer Teil der Energie, welche sich im Fokus sammeln und zur Intensität beitragen würde, geht nicht unmittelbar in die Messung ein. Stattdessen wird vorausgesetzt, daß sie unabhängig von der ausgewählten Stelle innerhalb des Strahlquerschnittes ist.

Die relativistische Autokorrelationsmessung ist somit zu bevorzugen. Da der Aufbau sowie die Ausrichtung des Strahlteilers und der beiden Parabolspiegel ziemlich aufwendig ist, wäre es zweckmäßig, einen dauerhaften, fest eingebauten Aufbau zu verwirklichen.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde ein Experiment zur Überlagerung zweier gegenläufiger intensiver Laserpulse aufgebaut. Der Aufbau und die Diagnostik ermöglichen es, gegenläufigen Laserpulse mit hoher Genauigkeit in Raum *und* Zeit zu überlagern. Zur Beobachtung des räumlichen und zeitlichen Überlapps wurden zeitintegrierte Bilder der 2ω -Selbstemission (2ω -Signal) sowie zeitaufgelöste 2ω -Schattenbilder des Plasmas aufgenommen. Das zeitintegrierte, in Richtung der (gemeinsamen) optischen Achse der gegenläufigen Laserpulse räumlich aufgelöste 2ω -Signal ($S_{2\omega}$) diente als relativistisches Autokorrelationssignal zweiter Ordnung, d. h. $S_{2\omega}(I^2)$. Während der relativistischen Autokorrelationsmessung herrschte an der Stelle des gemeinsamen Fokus der beiden gegenläufigen Laserpulse eine geringe (Plasma-)Elektronendichte von $2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, so daß Propagationseffekte, welche i. a. während der Ausbreitung eines Laserpulses durch ein Plasma auftreten, zu vernachlässigen waren. Die erreichte räumliche Genauigkeit des Überlapps ist durch die räumliche Auflösung der relativistischen, nicht interferometrischen Autokorrelationsmessung von $\Delta x_{\text{auto}} = 5 \mu\text{m}$ festgelegt; wegen $\Delta t = \Delta x_{\text{auto}}/c$ entspricht dies einer zeitlichen Genauigkeit von etwa 17 fs. Aus der relativistischen Autokorrelationsmessung wurden die Pulsdauer und die Rayleighlänge ermittelt

$$\tau_{\text{FWHM}} = (112 \pm 11) \text{ fs} \quad (5.1)$$

$$z_0 = (9 \pm 1) \mu\text{m}. \quad (5.2)$$

Wie schon in der Einleitung erwähnt, soll der Aufbau für zukünftige Experimente benutzt werden:

- Experimente zur Compton-Rückstreuung an lasererbeschleunigten relativistischen Elektronenstrahlen (s. Abb. 5.1): Bei der gewöhnlichen Compton-Streuung trifft ein Photon auf ein freies Elektron und wird gestreut. Während des Stoßes gibt es einen Teil seiner Energie an das Elektron ab - das gestreute Photon wird abgelenkt und fliegt mit geringerer Energie weiter. Bei der Wechselwirkung eines Laserpulses mit einem lasererzeugten Plasma können Elektronen auf relativistische Energien

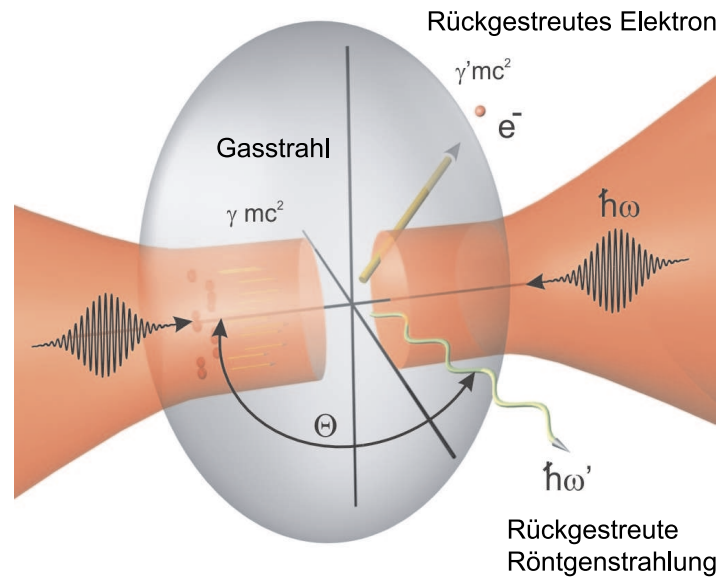


Abbildung 5.1: Lasererzeugte Compton-Rückstreuung. Einer der beiden gegenläufigen Laserpulse beschleunigt Elektronen auf relativistische Energien, welche im wesentlichen in Ausbreitungsrichtung des Laserpulses fliegen. Die Laserphotonen des gegenläufigen Laserpulses werden an den relativistischen Elektronen rückgestreut und nehmen Energie auf. Bei geradem Zusammenstoß der Photonen und der Elektronen (Streuwinkel $\theta = 180^\circ$) ist die Energie der gestreuten Photonen durch $\hbar\omega'_0 = 4\gamma^2\hbar\omega_0$ gegeben. D. h. Bei einer Laserwellenlänge von $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ und einem Lorentzfaktor von $\gamma = 20$ beträgt die Energie der rückgestreuten Photonen 2.5 keV; diese liegt im Röntgenbereich. Aus dem Spektrum der rückgestreuten Photonen läßt sich das Energie- bzw. Geschwindigkeitsspektrum der Elektronen in der Gegend der Laser-Plasma-Wechselwirkung berechnen.

5 Zusammenfassung und Ausblick

($E_{\text{kin}} > 512 \text{ keV}$) beschleunigt werden. Die Folge ist ein Bündel aus vielen schnellen Elektronen, welche sich stark gerichtet in Ausbreitungsrichtung des Laserpulses fortbewegen. Die Photonen des gegenläufigen Pulses stoßen mit dem Elektronenbündel zusammen und werden rückgestreut. Bei der Compton-Rückstreuung *gewinnt* das Photon Energie. Für einen Streuwinkel von $\theta = 180^\circ$ ist die Energie der rückgestreuten Elektronen gegeben durch

$$\hbar\omega'_0 = 4\gamma^2\hbar\omega_0, \quad (5.3)$$

wobei \hbar die reduzierte Planck'sche Konstante, ω_0 die ursprüngliche Frequenz der Laserphotonen, γ der Lorentzfaktor der relativistischen Elektronen und ω'_0 die Frequenz der rückgestreuten Photonen sind. Bei einer ursprünglichen Laserwellenlänge von $\lambda_0 = 795 \text{ nm}$ ($\omega_0 = 2.4 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$) und einem Lorentzfaktor von $\gamma = 20$ ergibt sich eine Energie der rückgestreuten Photonen von 2.5 keV . Die rückgestreuten Photonen stellen sollten eine reiche Quelle hochenergetischer Photonen im Röntgenbereich darstellen. Aus dem Photonenspektrum läßt sich unmittelbar auf das Energiespektrum und die Geschwindigkeitsverteilung der relativistischen Elektronen zurückrechnen. Überlicherweise wird das Spektrum der lasererzeugten Elektronen mit Elektronenspektrometern, Bremsstrahlung oder der Aktivierung nuklearer Reaktionen weit außerhalb des Gebietes der Laser-Plasma-Wechselwirkung gemessen (ersteres im Zentimeter-, letzteres im Mikrometerbereich). Da die laserbeschleunigten Elektronen bei der Messung weit von den zurückbleibenden schwereren und dadurch trägen Ionen entfernt sind, baut sich ein hohes elektrostatisches Potential auf, welches das Spektrum der Elektronen möglicherweise verfälscht. Das Spektrum der rückgestreuten Compton-Photonen hingegen liefert unmittelbar das Elektronenspektrum in der Nähe der Wechselwirkungsregion.

- Experiment zur Elektron-Elektron-Kollision: Liegen die Foki der beiden Laserpulse in z -Richtung etwas auseinander, so bilden sich zwei relativistische Kanäle aus, in welchen die Elektronen gegeneinander beschleunigt werden. Die entstehenden Elektronenbündel stoßen aufeinander, und es sollten Elektron-Positron-Paare entstehen

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^- + e^+, \quad (5.4)$$

wobei e^- das Elektron und e^+ das Positron sind. Dieses Experiment könnte Aufschluß über die Elektronenströme in einem lasererzeugten Plasmen geben. Die Ausbeute wäre mit denen herkömmlicher Teilchenbeschleuniger zu vergleichen.

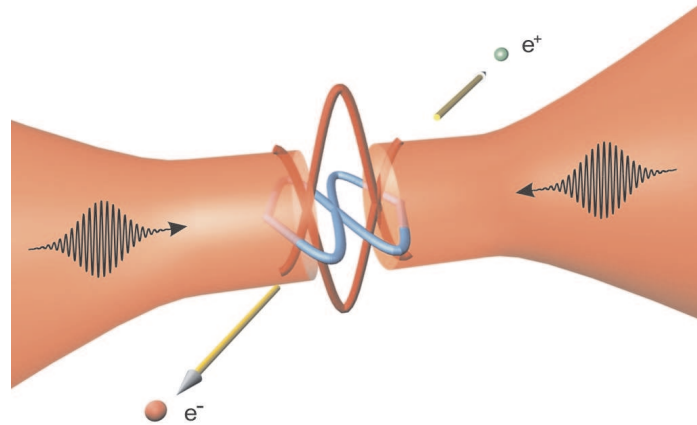


Abbildung 5.2: Lasererzeugte Paarbildung aus einem idealen Vakuum?

- Experiment zur lasererzeugten Paarbildung (s. Abb. 5.2): Ein fernes Ziel ist die Detektion von Elektron-Positron-Paaren im intensiven elektromagnetischen Feld zweier gegenläufiger Laserpulse im Vakuum, d. h. unter Abwesenheit irgendwelcher Teilchen. Der Zusammenbruch des Vakuums soll stattfinden, wenn das Elektron-Positron-Paar durch ein kritisches Feld (E_{krit}) über eine charakteristische Länge (λ_{ch}) seine Ruheenergie ($m_e c^2$) aufnimmt

$$eE_{\text{krit}}\lambda_{\text{ch}} = m_e c^2. \quad (5.5)$$

In einer laufenden Laserwelle ist die charakteristische Wellenlänge durch die Comptonwellenlänge des Elektrons ($\lambda_c = \hbar/m_e c \approx 2.42 \times 10^{-12} \text{ m}$) gegeben, so daß sich für das kritische Feld $E_{\text{krit}} = 1.3 \times 10^{17} \text{ V/m}$ ergibt. Dies entspricht einer Laserintensität von $6 \times 10^{27} \text{ W/cm}^2$, die zur Zeit utopisch ist. Weiterhin werden für die Paarbildung aus einem idealen Vakuum äußerste Bedingungen an die Vakuumtechnik erforderlich sein (vermutlich $p_{\text{vak}} \lesssim 10^{-9} \text{ mbar}$). Theoretische Veröffentlichungen auf dem Gebiet der nichtlinearen Quantenelektrodynamik (N-QED) kommen zu dem Ergebnis, daß für zusammenstoßende Laserpulse, d. h. in einer stehenden Welle, Intensitäten von 10^{18} W/cm^2 [40] oder $10^{26} \dots 10^{27} \text{ W/cm}^2$ [41] benötigt werden, um aus dem idealen Vakuum eine meßbare Anzahl von Elektron-Positron-Paaren zu erzeugen. Die Abweichung der theoretischen Vorhersagen für die Laserintensität um 8 bis 9 Größenordnungen zeigt, daß eine experimentelle Überprüfung für Fragen auf dem Gebiet der N-QED interessant wäre.

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

6.1 Freies Elektron in einer ebenen Welle

6.1.1 Klassische Betrachtung

Für das elektrische Feld einer in x-Richtung linear polarisierten ebenen elektromagnetischen Welle mit Propagationsrichtung z gilt

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

mit der Abkürzung

$$\phi \equiv (\omega_0 t - k_0 z) \quad (6.2)$$

Bildet man die Rotation des elektrischen Feldes

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} E_0 \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

und setzt dies in die Maxwellgleichung

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} \quad (6.4)$$

ein, so ergibt sich

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = k_0 E_0 \sin \phi \quad (6.5)$$

Zeitliche Integration mit der Anfangsbedingung

$$B_y(\phi = 0) \doteq \frac{k_0 E_0}{\omega_0} \quad (6.6)$$

liefert die y-Komponente des Magnetfeldes

$$B_y = \frac{k_0 E_0}{\omega_0} \cos \phi \quad (6.7)$$

Nach Einsetzen der Dispersionsrelation

$$\omega_0 = ck_0 \quad (6.8)$$

erhält man schließlich das Magnetfeld

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

mit der Amplitude

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \quad (6.10)$$

Auf das Elektron wirkt i. a. die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.11)$$

Da aber für kleine Geschwindigkeiten

$$v \ll c \Leftrightarrow v/c \ll 1 \quad (6.12)$$

der Einfluß des Magnetfeldes wegen (6.10) vernachlässigt werden kann

$$\mathbf{F} \approx -e\mathbf{E} \quad (6.13)$$

folgt

$$\frac{dp_x}{dt} = -eE_0 \cos \phi \quad (6.14)$$

Integration liefert

$$p_x = -\frac{eE_0}{\omega_0} \sin \phi \quad (6.15)$$

Daraus ergibt sich für die über eine Periode zeitlich gemittelte klassische Oszillationsenergie¹²

$$\langle U_{osz} \rangle = \left\langle \frac{p_x^2}{2m} \right\rangle = \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega_0^2} \quad (6.16)$$

Mit der über eine Periode zeitlich gemittelten Intensität

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \quad (6.17)$$

läßt sich (6.16) schreiben als

$$\langle U_{osz} \rangle = \frac{e^2}{8m\epsilon_0\pi^2 c^3} \langle I \rangle \lambda_0^2 \quad (6.18)$$

Setzt man für Intensität und Wellenlänge des Feldes die Werte $I = 10^{19} \text{ W/cm}^2$ und $\lambda = 800 \text{ nm}$ ein, so erhält man

$$\langle U_{osz} \rangle \approx 600 \text{ keV} > 511 \text{ keV}$$

D. h. : ab Intensitäten in der Größenordnung von $I \simeq 10^{19} \text{ W/cm}^2$ ist die mittlere Oszillationsenergie größer als die Ruheenergie des Elektrons und daher eine relativistische Betrachtung erforderlich. Ein Vergleich mit der atomaren Intensität

$$I_{at} \approx 4 \times 10^{16} \text{ W/cm}^2 \quad (6.19)$$

verdeutlicht die riesigen Intensitäten in der relativistische Optik.

6.1.2 Relativistische Betrachtung

Laborsystem

Die relativistischen Bewegungsgleichungen lauten³

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.20)$$

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = -e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad (6.21)$$

¹ $\langle f(\phi) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi') d\phi'$

² $\langle \sin^2 \phi \rangle = \langle \cos^2 \phi \rangle = 1/2$

³s. Anh. (6.14)

mit dem relativistischen Impuls

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad (6.22)$$

und dem Lorentzfaktor

$$\gamma = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathbf{p}}{mc}\right)^2} \quad (6.23)$$

Setzt man das Kreuzprodukt

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -v_z B_y \\ 0 \\ v_x B_y \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

in (6.20) ein, so findet man

$$\frac{dp_x}{dt} = -eE_0 \cos \phi + v_z B_y = eE_0 \cos \phi \left(\frac{v_z}{c} - 1\right) \quad (6.25)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = 0 \quad (6.26)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -ev_x B_y = -\frac{e}{c} v_x E_0 \cos \phi \quad (6.27)$$

Setzt man das Skalarprodukt

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = v_x E_x \quad (6.28)$$

und den relativistischen Parameter

$$a_0 \equiv \left| \frac{\max(p_{klass})}{mc} \right| = \frac{eE_0}{m\omega_0 c} \quad (6.29)$$

als das Verhältnis von klassischem Impuls zu $p_0 = mc$ ein, so ergibt sich

$$\frac{dp_x}{dt} = a_0 m \omega_0 c \cos \phi \left(\frac{v_z}{c} - 1\right) \quad (6.30)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = 0 \quad (6.31)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -a_0 m \omega_0 v_x \cos \phi \quad (6.32)$$

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

$$\frac{d\gamma}{dt} = -a_0 \frac{\omega_0}{c} v_x \cos \phi \quad (6.33)$$

Führt man den normierten Impuls

$$\tilde{\mathbf{p}} \equiv \frac{\mathbf{P}}{mc} \quad (6.34)$$

ein, erhält man schließlich das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = a_0 \omega_0 \cos \phi \left(\frac{v_z}{c} - 1 \right) \quad (6.35)$$

$$\frac{d\tilde{p}_y}{dt} = 0 \quad (6.36)$$

$$\frac{d\tilde{p}_z}{dt} = -a_0 \frac{\omega_0}{c} v_x \cos \phi \quad (6.37)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -a_0 \frac{\omega_0}{c} v_x \cos \phi \quad (6.38)$$

Nach Subtraktion von (6.37) und (6.38)

$$\frac{d}{dt} (\gamma - \tilde{p}_z) = 0 \quad (6.39)$$

und anschließender Integration ergibt sich

$$\gamma - \tilde{p}_z = \text{const} \equiv \eta \quad (6.40)$$

Wählt man die Anfangsbedingungen so, daß das Elektron bei maximaler Feldstärke ruht

$$\tilde{\mathbf{p}}(\phi = 0) \doteq 0 \quad (6.41)$$

so ergibt sich nach Integration von (6.36)

$$\tilde{p}_y \equiv 0 \quad (6.42)$$

Die Anfangsbedingung für den Lorentzfaktor lautet

$$\gamma(\phi = 0) = 1 \quad (6.43)$$

Weiterhin gilt

$$\gamma(\phi = 0) - \tilde{p}_z(\phi = 0) = 1 \quad (6.44)$$

und aus (6.40) ergibt sich

$$\eta \equiv 1 \quad (6.45)$$

Aus (6.40) und (6.45) folgt weiterhin

$$\gamma = 1 + \tilde{p}_z \quad (6.46)$$

Quadrieren von (6.40)

$$\gamma^2 = \eta^2 + \tilde{p}_z^2 + 2\eta\tilde{p}_z \quad (6.47)$$

sowie Einsetzen von (6.45) ergibt

$$\gamma^2 = 1 + \tilde{p}_z^2 + 2\tilde{p}_z \quad (6.48)$$

Setzt man dies mit dem quadrierten Lorentzfaktor

$$\gamma^2 = 1 + \tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_z^2 \quad (6.49)$$

aus (6.23) gleich, erhält man schließlich

$$\tilde{p}_z = \frac{\tilde{p}_x^2}{2} \quad (6.50)$$

d. h. : der Impuls in Propagationsrichtung hängt quadratisch vom Impuls in Polarisationsrichtung ab. Um p_x zu berechnen, geht man von

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = \frac{d\tilde{p}_x}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} \quad (6.51)$$

und (6.2) aus, es ergibt sich

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 - k_0 \frac{dz}{dt} = \omega_0 - k_0 v_z \quad (6.52)$$

Mit Hilfe der Dispersionsrelation (6.8) folgt

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 \left(1 - \frac{v_z}{c}\right) \quad (6.53)$$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{p}_x}{d\phi} = -a_0 \cos \phi \quad (6.54)$$

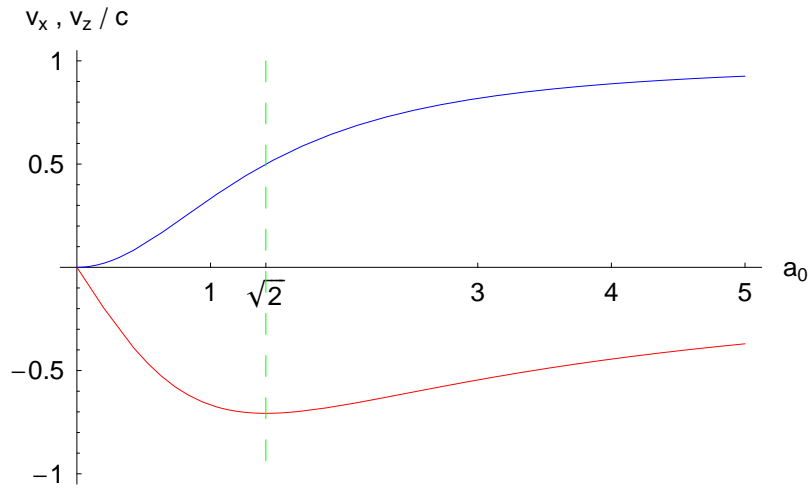


Abbildung 6.1: Geschwindigkeiten in Polarisationsrichtung (rot) und in Ausbreitungsrichtung (blau), $a_0 = \sqrt{2}$ (grün) in Abhängigkeit des relativistischen Parameters für $\phi = \frac{\pi}{2}$

Integration dieser Gleichung liefert

$$\tilde{p}_x(\phi) = -a_0 \sin \phi + \text{const} \quad (6.55)$$

und mit der Anfangsbedingung, daß das Elektron bei maximaler Feldstärke ruht

$$\tilde{p}_x(\phi = 0) \doteq 0 \quad (6.56)$$

ergibt sich

$$\tilde{p}_x = -a_0 \sin \phi \quad (6.57)$$

$$\tilde{p}_z = \frac{1}{2} a_0^2 \sin^2 \phi \quad (6.58)$$

und schließlich

$$p_x = -a_0 m c \sin \phi \quad (6.59)$$

$$p_z = \frac{1}{2} a_0^2 m c \sin^2 \phi \quad (6.60)$$

Über (6.59) und (6.60) erhält man für die Geschwindigkeiten

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

$$v_x = -\frac{2a_0c \sin \phi}{2 + a_0^2 \sin^2 \phi} \quad (6.61)$$

$$v_z = \frac{a_0^2c \sin^2 \phi}{2 + a_0^2 \sin^2 \phi} \quad (6.62)$$

Für hohe Intensitäten lauten die Grenzwerte für die Geschwindigkeiten

$$\lim_{a_0 \rightarrow \infty} v_x = 0 \quad (6.63)$$

$$\lim_{a_0 \rightarrow \infty} v_z = c \quad (6.64)$$

Nach weiterer Integration

$$\begin{aligned} x, z &= \int v_{x,z} dt \\ &= \int \frac{p_{x,z}}{\gamma m} \frac{dt}{d\phi} d\phi \\ &= \int \frac{p_{x,z}}{\gamma m \omega_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{v_z}{c}\right)} d\phi \\ &= \int \frac{p_{x,z}}{\gamma m \omega_0 - \frac{p_z}{c}} d\phi \\ &= \int \frac{p_{x,z}}{\left(1 + \frac{p_z}{mc}\right) m \omega_0 - \frac{p_z}{c}} d\phi \\ &= \int \frac{p_{x,z}}{m \omega_0} d\phi \end{aligned} \quad (6.65)$$

erhält man schließlich die implizite, parametrische Bahnkurve

$$x = a_0 \frac{c}{\omega_0} (\cos \phi - 1) \quad (6.66)$$

$$z = \frac{1}{2} a_0^2 \frac{c}{\omega_0} \left(\frac{\phi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\phi) \right) \quad (6.67)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x(\phi = 0) \doteq 0 \quad (6.68)$$

$$z(\phi = 0) \doteq 0 \quad (6.69)$$

Abbildung (6.2) zeigt die relativistische Bahnkurve des Elektrons für drei verschiedene Intensitäten.

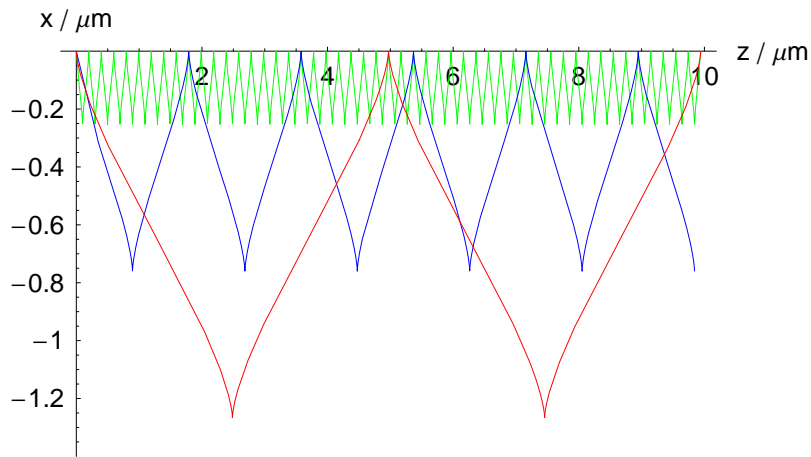


Abbildung 6.2: Relativistische Bahnkurve des Elektrons im Laborsystem für $a_0 = 1$ (grün), $a_0 = 3$ (blau) und $a_0 = 5$ (rot)

Transformiertes System

Für eine Lorentztransformation, bei der sich das System Σ' gegenüber dem System Σ mit der konstanten Geschwindigkeit v_z bewegt, gilt für die Transformation des Impulses

$$p'_x = p_x \quad (6.70)$$

$$p'_y = p_y \quad (6.71)$$

$$p'_z = \gamma_{v_z} (p_z - \gamma m v_z) \quad (6.72)$$

wobei

$$\gamma_{v_z} = \left(1 - \left(\frac{v_z}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \text{const} \quad (6.73)$$

Berechnet man

$$\langle p'_z \rangle = \langle \gamma_{v_z} (p_z - \gamma m v_z) \rangle \quad (6.74)$$

$$= \gamma_{v_z} (\langle p_z \rangle - v_z m \langle \gamma \rangle) \quad (6.75)$$

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

ergibt sich mit (6.58) und (6.46) für den mittleren Impuls im transformierten System

$$\langle p'_z \rangle = \gamma_{v_z} \left(\left\langle \frac{a_0^2 mc}{2} \sin^2 \phi \right\rangle - mv_z \left\langle 1 + \frac{a_0^2}{2} \sin^2 \phi \right\rangle \right) \quad (6.76)$$

$$= \gamma_{v_z} \left(\frac{a_0^2 mc}{4} - mv_z \left(1 + \frac{a_0^2}{4} \right) \right) \quad (6.77)$$

Transformiert man nun so, daß dieser verschwindet

$$\langle p'_z \rangle \doteq 0 \quad (6.78)$$

erhält man für die konstante Geschwindigkeit

$$v_z = \frac{a_0^2 c}{4 + a_0^2} \quad (6.79)$$

wobei

$$\lim_{a_0 \rightarrow \infty} v_z = c \quad (6.80)$$

Aus (6.73) folgt

$$\gamma_{v_z} = \frac{4 + a_0^2}{\sqrt{16 + 8a_0^2}} \quad (6.81)$$

und aus (6.72)

$$p'_z = -\frac{a_0^2 mc \cos(2\phi)}{\sqrt{16 + 8a_0^2}} \quad (6.82)$$

Da sich der Impuls in x-Richtung bei der Transformation wegen (6.70) nicht ändert, gilt weiterhin (6.66). Integration wie oben liefert schließlich die implizite, parametrische Bahnkurve

$$x' = a_0 \frac{c}{\omega_0} (\cos \phi - 1) \quad (6.83)$$

$$z' = -a_0^2 \frac{c}{\omega_0} \frac{\cos \phi \sin \phi}{\sqrt{16 + 8a_0^2}} \quad (6.84)$$

Trägt man die Trajektorie auf (s. Abb. 6.3), so erkennt man eine charakteristische Achterbahn, die sich mit steigender Feldstärke sowohl in x' - als auch in z' -Richtung aufweitet.

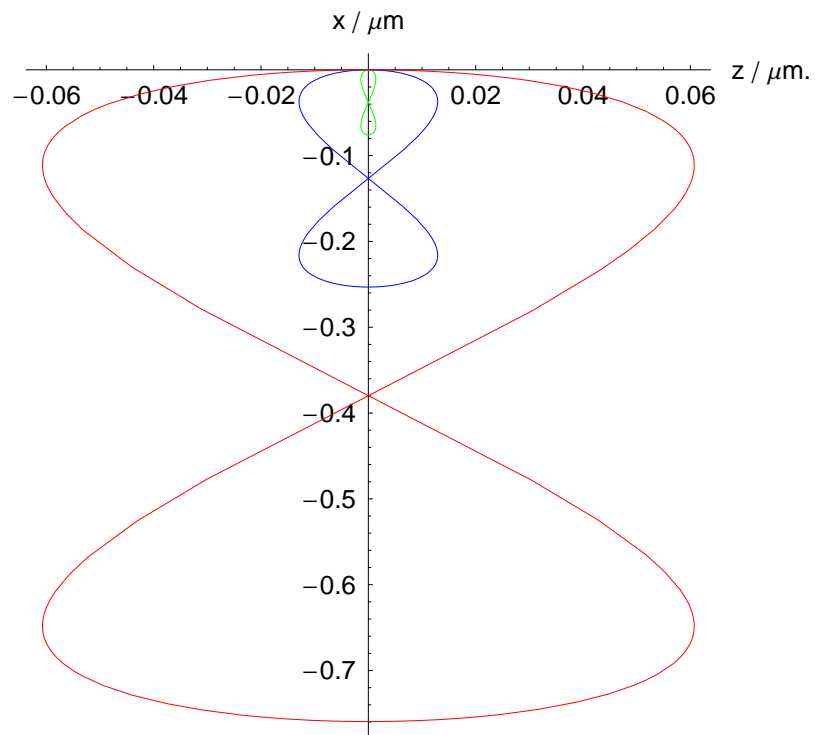


Abbildung 6.3: Achterbahn des Elektrons im transformierten System $a_0 = 0.3$ (grün), $a_0 = 1$ (blau), $a_0 = 3$ (rot) und $\phi \in [0, 2\pi]$

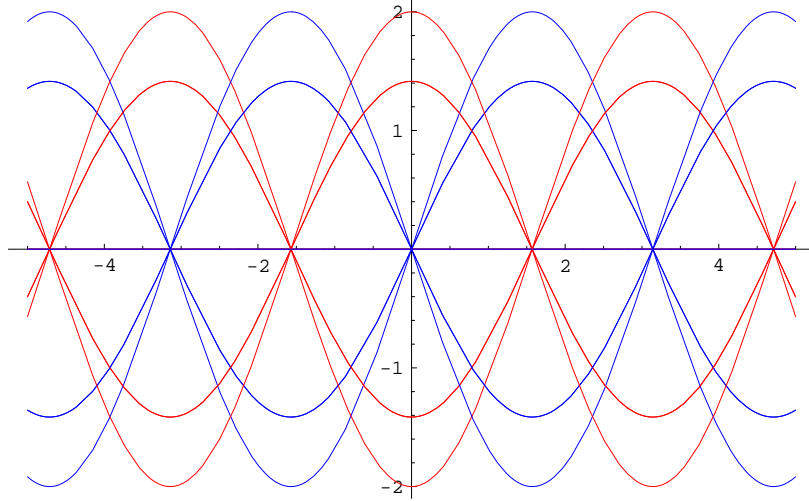


Abbildung 6.4: Stehendes elektrisches Feld (rot) und Magnetfeld (blau) für $E_0 = \omega = c = 1$

6.2 Freies Elektron in einer stehenden Welle

Die nach rechts-/linkslaufenden elektrischen und magnetischen Felder in einer ebenen Welle lauten

$$E_x^\pm = E_0 \cos \phi^\pm \quad (6.85)$$

und

$$B_y^\pm = \pm \frac{E_0}{c} \cos \phi^\pm \quad (6.86)$$

wobei

$$\phi^\pm = \omega t \mp kz \quad (6.87)$$

Addiert man die nach rechts-/linkslaufenden Felder, so ergibt sich für das stehende elektrische Feld

$$E_x^{ges} = 2E_0 \cos(\omega t) \cos(kz) \quad (6.88)$$

und für das stehende magnetische Feld

$$B_y^{ges} = 2 \frac{E_0}{c} \sin(\omega t) \sin(kz) \quad (6.89)$$

Abbildung (6.4) zeigt den räumlichen Verlauf der stehenden Welle für verschiedene Zeiten. Setzt man (6.88) und (6.89) in die relativistischen Bewegungsgleichungen (6.20)

und (6.21) ein, so erhält man das gekoppelte DGL-System

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = 2a_0\omega \left[\frac{\tilde{p}_z}{\gamma} \sin(\omega t) \sin(kz) - \cos(\omega t) \cos(kz) \right] \quad (6.90)$$

$$\frac{d\tilde{p}_y}{dt} = 0 \quad (6.91)$$

$$\frac{d\tilde{p}_z}{dt} = -2a_0\omega \frac{\tilde{p}_x}{\gamma} \sin(\omega t) \sin(kz) \quad (6.92)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -2a_0\omega \frac{\tilde{p}_x}{\gamma} \cos(\omega t) \cos(kz) \quad (6.93)$$

wobei

$$\gamma = \sqrt{1 + \tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_z^2} \quad (6.94)$$

und

$$z = c \int \frac{\tilde{p}_z}{\gamma} dt \quad (6.95)$$

Erster Spezialfall

Für den Spezialfall, daß das Elektron in einem Knoten des magnetischen Feldes ruht

$$B_y^{\text{ges}} = 0, \quad k_0 z \doteq m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (6.96)$$

wobei

$$\tilde{\mathbf{p}}(t=0, z=0) \doteq \mathbf{0} \quad (6.97)$$

$$\Rightarrow \gamma(t=0, z=0) \doteq 1 \quad (6.98)$$

folgt

$$\frac{d\tilde{p}_x}{dt} = -2a_0\omega \cos(\omega t) \quad (6.99)$$

$$\tilde{p}_y \equiv 0 \quad (6.100)$$

$$\tilde{p}_z \equiv 0 \quad (6.101)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -2a_0\omega \frac{\tilde{p}_x}{\gamma} \cos(\omega t) \quad (6.102)$$

Die Lösung dieses gekoppelten DGL-Systems lautet

$$\tilde{p}_x(t) = -2a_0 \sin(\omega t) \quad (6.103)$$

$$\gamma(t) = \sqrt{1 + 4a_0^2 \sin^2(\omega t)} \quad (6.104)$$

Dies läßt sich auch anschaulich verstehen. In einem Knoten des magnetischen Feldes wirkt auf das Elektron nur die elektrische Kraft, so daß das Elektron nur in Polarisationsrichtung schwingen und keinen Impuls in longitudinale Richtung aufnehmen kann.

Zweiter Spezialfall

Für den Spezialfall, daß das Elektron an einem Knoten des elektrischen Feldes ruht

$$E_x^{\text{ges}} \doteq 0, k_0 z = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi, m \in \mathbb{Z} \quad (6.105)$$

wobei

$$\tilde{\mathbf{p}}(t=0, z=0) \doteq 0 \quad (6.106)$$

$$\Rightarrow \gamma(t=0, z=0) \doteq 0 \quad (6.107)$$

folgt

$$\tilde{p}_x \equiv 0 \quad (6.108)$$

$$\tilde{p}_y \equiv 0 \quad (6.109)$$

$$\tilde{p}_z \equiv 0 \quad (6.110)$$

$$\gamma \equiv 1 \quad (6.111)$$

In einem Knoten des elektrischen Feldes wirkt auf das Elektron nur die Lorentzkraft. Da es aber keinen Anfangsimpuls gibt, bleibt das Elektron in Ruhe.

Numerische Lösung

Löst man das gekoppelte DGL-System mit der Anfangsbedingung, daß das Elektron nicht in einem Knoten des elektrischen oder magnetischen Feldes ruht, so ergibt sich eine etwas komplizierte Bewegung. Auf das Elektron wirkt sowohl die elektrische als auch die magnetische Kraft. Die elektrische Kraft führt zu einer linearen Schwingung, die Lorentzkraft zu einer Kreisbewegung, und die Überlagerung schließlich zu einer komplizierten Bewegung sowohl in Polarisations- als auch in longitudinaler Richtung. Abbildung (6.7)

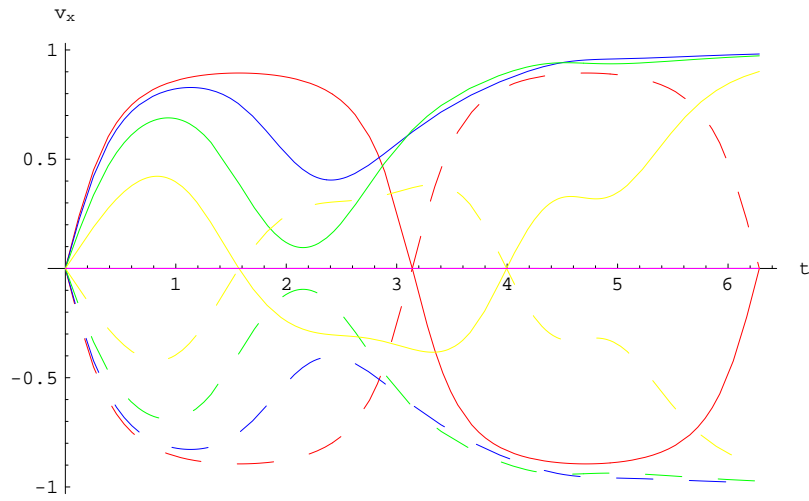


Abbildung 6.5: Geschwindigkeit v_x eines Elektrons in einer stehenden Welle für verschiedene Anfangsorte $z_0 = [0, 2\pi : \pi/8]$ mit $c = \omega = 1$, $t = [0, 2\pi]$ sowie $a_0 = 1$

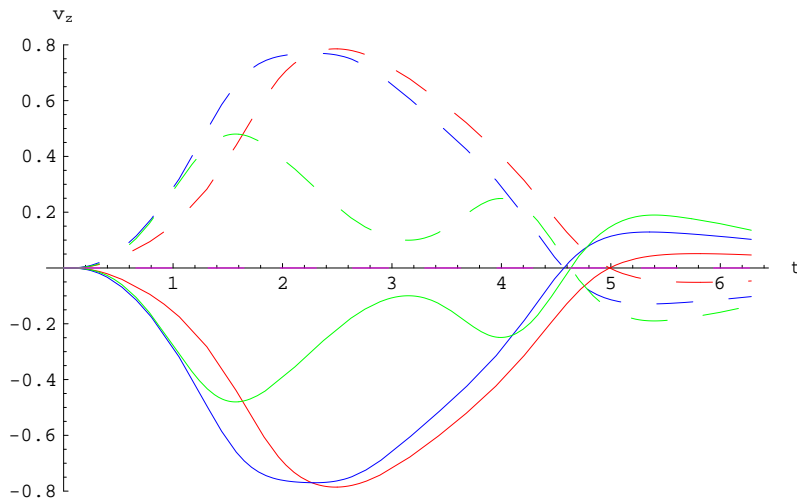


Abbildung 6.6: Longitudinale Geschwindigkeit v_z eines Elektrons in einer stehenden Welle für verschiedene Anfangsorte $z_0 = [0, 2\pi : \pi/8]$ mit $c = \omega = 1$, $t = [0, 2\pi]$ sowie $a_0 = 1$

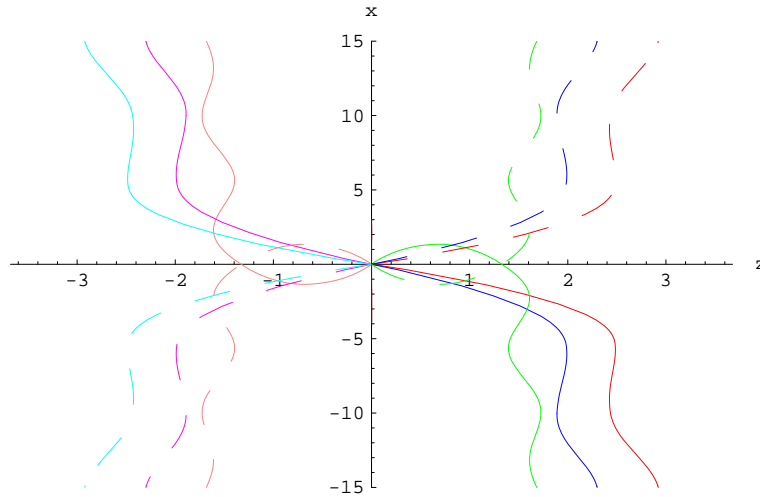


Abbildung 6.7: Relativistische Bewegung eines Elektrons in einer stehenden Welle für $c = \omega = 1$, $t = [0, 2\pi]$ sowie $a_0 = 1$

zeigt die relativistische Bahnkurve des Elektrons in einer stehenden Welle für verschiedene Anfangsorte. Alle Kurven beginnen der besseren Übersicht wegen im Ursprung bei $z = 0$.

6.3 Klassische Plasma-Dispersionsrelation

Die komplexe Darstellung des elektrischen Feldes lautet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega_0 t) \quad (6.112)$$

Für die Beschleunigung ergibt sich nach Newton

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (6.113)$$

Mit der Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -n_e e \dot{\mathbf{r}} \quad (6.114)$$

und Differentiation von (6.114) folgt

$$\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -n_e e \ddot{\mathbf{r}} \quad (6.115)$$

Einsetzen von (6.113) in (6.115) ergibt

$$\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{n_e e^2}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (6.116)$$

Die Plasmafrequenz ist über

$$\omega_p \equiv \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m}} \quad (6.117)$$

definiert. Einsetzen von (6.179) in (6.116) liefert

$$\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \omega_p^2 \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (6.118)$$

Die Definition der Plasmaleitfähigkeit lautet

$$\sigma \equiv -\frac{i\omega_p^2 \varepsilon_0}{\omega_0} \quad (6.119)$$

Nach Einsetzen von (6.119) in (6.118) ergibt sich

$$\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = i\sigma\omega_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (6.120)$$

Integration von (6.120) liefert

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (6.121)$$

Eine der Maxwellgleichungen lautet

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (6.122)$$

Einsetzen von (6.121) in (6.122) liefert

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \sigma \mathbf{E} \quad (6.123)$$

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum lautet

$$c^2 \equiv \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (6.124)$$

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Setzt man (6.139) und (6.124) in (6.123) ein, so erhält man

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(\mu_0 \sigma + \frac{i\omega_0}{c^2} \right) \mathbf{E} \quad (6.125)$$

$$\Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{B} = i \frac{\omega_0}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right) \mathbf{E} \quad (6.126)$$

Die dielektrische Funktion des Plasmas ist folgendermaßen definiert

$$\varepsilon \equiv 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \quad (6.127)$$

Setzt man (6.127) in (6.126) ein, so ergibt sich

$$\nabla \times \mathbf{B} = i \frac{\omega_0}{c^2} \varepsilon \mathbf{E} \quad (6.128)$$

Bildet man die Rotation von (6.4), so erhält man

$$- \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (6.129)$$

Diesen Ausdruck kann man umschreiben, indem man die folgende Vektoridentität benutzt:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \quad (6.130)$$

Setzt man (6.128) und (6.130) in (6.129) ein, so ergibt sich

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} + \frac{i\omega_0 \varepsilon}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (6.131)$$

$$\Leftrightarrow \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} - \frac{\omega_0^2}{c^2} \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad (6.132)$$

Die Divergenz des elektrischen Feldes ist gleich der Quellenladung:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.133)$$

Nimmt man an, daß keine externen Ladungen vorliegen, so erhält man

$$\rho = 0 \quad (6.134)$$

Setzt man (6.134) in (6.133) ein, so ergibt sich

$$\nabla \mathbf{E} = 0 \quad (6.135)$$

Einsetzen von (6.135) in (6.132) liefert die Wellengleichung

$$-\Delta \mathbf{E} - \frac{\omega_0^2}{c^2} \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad (6.136)$$

$$\Leftrightarrow \left(k_0^2 - \frac{\omega_0^2}{c^2} \varepsilon \right) \mathbf{E} = 0 \quad (6.137)$$

Setzt man schließlich (6.127) in (6.137) ein, so erhält man die Dispersionsrelation des Plasmas

$$\omega_0^2 = \omega_p^2 + k_0^2 c^2 \quad (6.138)$$

6.4 Ponderomotorische Selbstfokussierung

Das separierte elektrische Feld lautet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t) \quad (6.139)$$

Für die Entwicklung des ortsabhängigen Teils bis zur ersten Ordnung gilt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathcal{O}^2(\tilde{\mathbf{r}}) \quad (6.140)$$

Die Gesamtkraft setzt sich aus einem elektrischen und einem magnetischen Anteil zusammen

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{elek} + \mathbf{F}_{magn} \quad (6.141)$$

wobei

$$\mathbf{F}_{elek} = -e \mathbf{E} \quad (6.142)$$

und

$$\mathbf{F}_{magn} = -e (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.143)$$

Mit (6.140) erhält man

$$\mathbf{F}_{elek} = -e [(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})) \exp(i\omega t)] \quad (6.144)$$

Für die Beschleunigung am Ort \mathbf{r} gilt in nullter Näherung

$$\Delta \mathbf{a} = -\frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{m} \exp(i\omega t) \quad (6.145)$$

Integration liefert die Geschwindigkeit

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{im\omega} [1 - \exp(i\omega t)] \quad (6.146)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\Delta \mathbf{v}(0) \doteq 0 \quad (6.147)$$

und nach weiterer Integration den Ort

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{im\omega} t + \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{m\omega^2} [\exp(i\omega t) - 1] \quad (6.148)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\Delta \mathbf{r}(0) \doteq 0 \quad (6.149)$$

Setzt man dies in (6.144) ein, so ergibt sich für den elektrischen Anteil der Kraft

$$\begin{aligned} \Re[\mathbf{F}_{\text{elek}}] &= -e \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \Re(\exp(i\omega_0 t)) + \dots \right. \\ &\quad \dots + \left(\frac{et}{m\omega_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Re\left(\frac{\exp(i\omega_0 t)}{i}\right) - \dots \\ &\quad \dots - \left(\frac{e}{m\omega_0^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Re(\exp(i\omega_0 t)) + \dots \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{e}{m\omega_0^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Re^2(\exp(i\omega_0 t)) \right] \quad (6.150) \end{aligned}$$

und im zeitlichen Mittel⁴⁵⁶

$$\langle \mathbf{F}_{\text{elek}} \rangle = -\frac{e^2}{2m\omega^2} (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (6.151)$$

Setzt man (6.139) in (6.4) ein und integriert zeitlich, so erhält man

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{i\omega} (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \exp(i\omega t) \quad (6.152)$$

⁴ $\langle \text{Re}[\exp(i\omega_0 t)] \rangle = 0$

⁵ $\langle \text{Re}[\exp(i\omega_0 t)/i] \rangle = 0$

⁶ $\langle \text{Re}^2[\exp(i\omega_0 t)] \rangle = 1/2$

mit der Anfangsbedingung

$$\mathbf{B}(t=0) \doteq -\frac{1}{i\omega} (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \quad (6.153)$$

Wenn man (6.152) und (6.146) in (6.143) einsetzt, ergibt sich für den magnetischen Anteil der Kraft

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{magn} &= -e [\Re[\Delta \mathbf{v}] \times \Re[\mathbf{B}]] \\ &= -\frac{e^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})}{m\omega^2} \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \operatorname{Re}^2\left(\frac{\exp(i\omega_0 t)}{i}\right) \end{aligned} \quad (6.154)$$

und im zeitlichen Mittel⁷

$$\langle \mathbf{F}_{magn} \rangle = -\frac{e^2}{2m\omega^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) \quad (6.155)$$

Addition der beiden Anteile liefert

$$\langle \mathbf{F} \rangle = -\frac{e^2}{2m\omega^2} [(\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}))] \quad (6.156)$$

und mit der Vektoridentität

$$\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E}^2) = [(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] \quad (6.157)$$

die ponderomotorische Kraft

$$\mathbf{F}_p = -\frac{e^2}{4m\omega^2} \nabla [\mathbf{E}^2(\mathbf{r})] \quad (6.158)$$

oder

$$\mathbf{F}_p \sim \nabla I \quad (6.159)$$

d. h. : die ponderomotorische Kraft ist proportional zu dem Intensitätsgradienten, der in Richtung des steilsten Anstiegs zeigt. Über

$$\mathbf{F}_p \equiv -\nabla \phi_p \quad (6.160)$$

definiert man das ponderomotorische Potential

$$\phi_p = \frac{e^2}{4m\omega^2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \quad (6.161)$$

⁷ $\langle \operatorname{Re}^2[\exp(i\omega_0 t)/i] \rangle = 1/2$

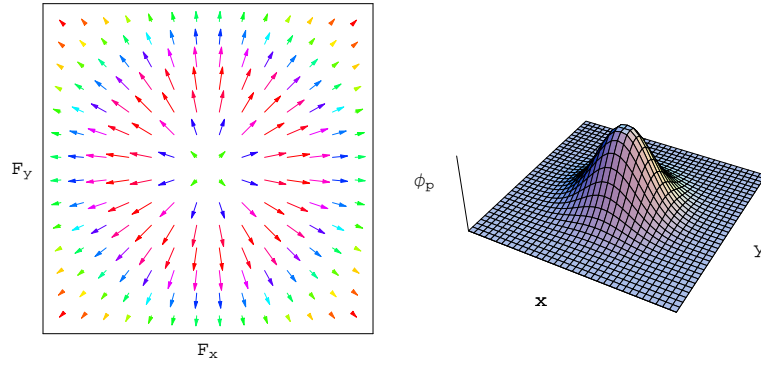


Abbildung 6.8: Ponderomotorische Kraft und ponderomotorisches Potential

Für den Ortsanteil des elektrischen Feldes eines Gaußstrahls gilt wegen (6.199)

$$E_r = \frac{E_0 W_0}{W} \exp(-qr^2) \exp(i\tilde{\varphi}_r) \quad (6.162)$$

wobei

$$q(z) \equiv \frac{1}{W^2} + \frac{ik}{2R} \quad (6.163)$$

und

$$\tilde{\varphi}_r \equiv -kz + \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (6.164)$$

Quadriert man (6.162), so ergibt sich

$$E_r^2(r) = \left(\frac{E_0 W_0}{W}\right)^2 \exp(-2qr^2) \exp(2i\tilde{\varphi}_r) \quad (6.165)$$

In Zylinderkoordinaten erhält man für den Gradienten

$$\frac{\partial}{\partial r} (E_r^2) = -4 \left(\frac{E_0 W_0}{W}\right)^2 qr \exp(-2qr^2) \exp(2i\tilde{\varphi}_r) \quad (6.166)$$

Für die radial nach außen wirkende ponderomotorische Kraft (6.158) ergibt sich

$$\mathbf{F}_p = \frac{e^2}{m\omega^2} \left(\frac{E_0 W_0}{W}\right)^2 qr \exp(-2qr^2) \exp(2i\tilde{\varphi}_r) \hat{\mathbf{r}} \quad (6.167)$$

Die berechneten Bilder (s. Abb. 6.8) zeigen, daß die ponderomotorische Kraft das Elektron radialsymmetrisch nach außen drückt. In einem Plasma entfernen sich auf Grund dieser ponderomotorischen Kraft die Elektronen immer weiter von den viel schwereren

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Ionen, bis sich schließlich ein Gleichgewicht zwischen anziehender Coulombkraft und abstoßender ponderomotorischer Kraft einstellt. In diesem Fall ergibt sich für das statische elektrische Feld (radial nach außen zeigend)

$$\mathbf{E}_{stat} = \frac{\mathbf{F}_p}{e} = \frac{e}{m\omega^2} \left(\frac{E_0 W_0}{W} \right)^2 q r \exp(-2qr^2) \exp(2i\tilde{\varphi}_r) \hat{\mathbf{r}} \quad (6.168)$$

Im Fokus bei $z = 0$ finden wir wegen $\lim_{z \rightarrow 0} \tilde{\varphi}_r = 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} W = W_0$, $\lim_{z \rightarrow 0} q = 1/W_0^2$ den Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow 0} \mathbf{E}_{stat} = \frac{e}{m\omega^2} \left(\frac{E_0}{W_0} \right)^2 r \exp\left(-2\frac{r^2}{W_0^2}\right) \hat{\mathbf{r}} \quad (6.169)$$

Die Elektronendichte ergibt sich aus dem differentiellen Gaußschen Satz

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{stat} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.170)$$

Berechnet man die die Divergenz des Feldes

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{stat} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{E}_{stat}) \quad (6.171)$$

$$= -\frac{2e}{m\omega^2} \left(\frac{E_0 W_0}{W} \right)^2 q \exp(2i\tilde{\varphi}_r) \exp(-2qr^2) (-1 + 2qr^2) \quad (6.172)$$

so erhält man die Raumladungsdichte

$$\rho = e(n_i - n_e) \quad (6.173)$$

Mit (6.170) erhält man für die Reduktion der Elektronendichte (auf die Ionendichte normiert)

$$\frac{n_e - n_i}{n_i} = \frac{2}{m\omega^2} \frac{\varepsilon_0}{n_i} \left(\frac{E_0 W_0}{W} \right)^2 q \exp(2i\tilde{\varphi}_r) \exp(-2qr^2) (-1 + 2qr^2) \quad (6.174)$$

und im FokusDie ponderomotorische Kraft (die zeitliche gemittelte Lorentzkraft) ist proportional zum negativen Gradienten der Laserintensität. Der Gradient zeigt allgemein in die Richtung des steilsten Anstiegs. Die ponderomotorische Kraft (die zeitliche gemittelte Lorentzkraft) drückt das Elektron in einer Ebene senkrecht zu optischen Achse radial nach außen. Das ponderomotorische Potential (die zeitlich gemittelten kinetische Energie der Elektronen) ist im Zentrum, d. h. im Fokus, am größten und nimmt nach

außen hin ab. Das Elektron gleitet den Potentialberg herab.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{n_e - n_i}{n_i} \right) = \frac{2}{m\omega^2} \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{n_i W_0^4} \exp \left(-2 \frac{r^2}{W_0^2} \right) (2r^2 - W_0^2) \quad (6.175)$$

Für die Phasengeschwindigkeit gilt

$$v_{ph} = \frac{\omega_L}{k_L} \quad (6.176)$$

Setzt man die Dispersionsrelation des Plasmas

$$\omega_0^2 = \omega_p^2 + k_0^2 c^2 \quad (6.177)$$

in die Phasengeschwindigkeit ein, so erhält man

$$v_{ph} = c \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.178)$$

Berücksichtigt man noch die Plasmafrequenz

$$\omega_P \equiv \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m}} \quad (6.179)$$

so ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit des Lasers im Plasma

$$v_{ph} = c \left(\frac{1}{1 - \frac{n_e}{n_c}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.180)$$

mit der kritischen Dichte

$$n_c \equiv \frac{\varepsilon_0 m \omega_L^2}{e^2} \quad (6.181)$$

Bei größerem Abstand r von der Strahlachse wird die Elektronendichte n_e (s. Abb. 6.9) größer, damit auch die Phasengeschwindigkeit v_{ph} größer und wegen $n = c/v_{ph}$ der Brechungsindex n kleiner. Die Wellenfront krümmt sich wie bei einer konvexen Linse nach innen und, es kommt zu ponderomotorischer Selbstfokussierung.

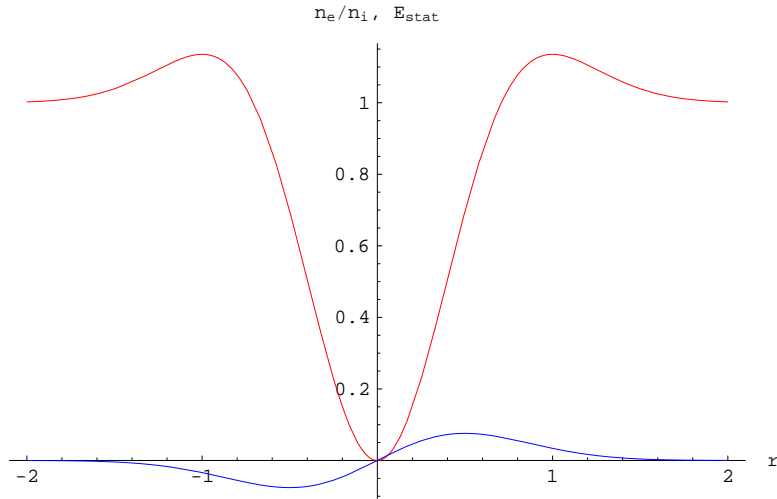


Abbildung 6.9: Normierte Elektronendichte (rot) und statisches elektrisches Feld (blau) in Abhängigkeit des radialen Abstands für $e = m = c = z_0 = \varepsilon_0 = E_0 = W_0 = 1$ und $n_i = 0,5$

6.5 Relativistische Selbstfokussierung

Setzt man

$$\langle p_{klass}^2 \rangle = \frac{e^2 E_0^2}{2\omega^2} \quad (6.182)$$

in (6.23) ein, so erhält man für den Lorentzfaktor

$$\gamma \approx \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{2}} \quad (6.183)$$

wobei der relativistische Parameter

$$a_0 = \frac{eE_{x,r}(r)}{m\omega_0 c} \quad (6.184)$$

eines Gaußstrahls vom radialen Abstand abhängt. Auf Grund der relativistischen Massenzunahme

$$m \mapsto \gamma m \quad (6.185)$$

$$\Rightarrow \omega_P^2 \mapsto \frac{\omega_P^2}{\gamma} \quad (6.186)$$

ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph} = c \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma \omega_0^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.187)$$

Bei größerem Abstand r von der Strahlachse wird der Lorentzfaktor γ kleiner und damit die Phasengeschwindigkeit v_{ph} größer. Wegen $n = c_0/v_{ph}$ wird der Brechungsindex n kleiner, und es kommt zu relativistischer Selbstfokussierung.

6.6 Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen

Die Wellengleichung im Vakuum lautet

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (6.188)$$

Separiert man in skalarer Näherung das elektrische Feld

$$E(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) \exp(i\omega t) \quad (6.189)$$

so ergibt sich mit (6.8) die Helmholtzgleichung

$$(\Delta + k^2) u(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.190)$$

Wählt man für den Ortsanteil des skalaren elektrischen Feldes den Ansatz

$$u^\pm(\mathbf{r}) = \bar{A}(\mathbf{r}) \exp(\mp ikz) \quad (6.191)$$

so erhält man

$$\Delta u^\pm = \Delta_\perp u + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{A} \right) \exp(\mp ikz) + \bar{A} \left(\frac{\partial}{\partial z} \exp(\mp ikz) \right) \right] \quad (6.192)$$

$$= \Delta_\perp u + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{A} \right) \mp ik \bar{A} \right] \exp(\mp ikz) \right] \quad (6.193)$$

$$= \left[\Delta_\perp \bar{A} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{A} \mp 2ik \frac{\partial}{\partial z} \bar{A} - k^2 \bar{A} \right] \exp(\mp ikz) \quad (6.194)$$

und mit (6.190)

$$\left[\Delta_{\perp} \bar{A} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{A} \mp 2ik \frac{\partial}{\partial z} \bar{A} - k^2 \bar{A} \right] \exp(\mp ikz) = -k^2 \bar{A} \exp(\mp ikz) \quad (6.195)$$

wobei

$$\Delta_{\perp} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (6.196)$$

In paraxialer Näherung

$$2ik \frac{\partial}{\partial z} \bar{A} \gg \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{A} \quad (6.197)$$

ergibt sich schließlich die paraxiale Wellengleichung

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{A} \pm i \frac{1}{2k} \Delta_{\perp} \bar{A} = 0 \quad (6.198)$$

zur Beschreibung der Strahlausbreitung im Raum. Löst man diese Gleichung⁸, so erhält man für die nach rechts-/linkslaufende Welle

$$E_x^{\pm}(r, z, t) = \frac{E_0 W_0}{W} \exp(-q_{\pm} r^2) \exp(i\tilde{\varphi}_{\pm}) \quad (6.199)$$

mit dem komplexen Parameter

$$q_{\pm} \equiv \frac{1}{W^2} \pm \frac{ik}{2R} \quad (6.200)$$

der Strahlbreite

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad (6.201)$$

der Krümmung

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \right) \quad (6.202)$$

der Phase

$$\tilde{\varphi}_{\pm}(z) = \omega t \mp kz \pm \varphi \quad (6.203)$$

wobei

$$\varphi \equiv \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (6.204)$$

⁸s. Anh. (6.15)

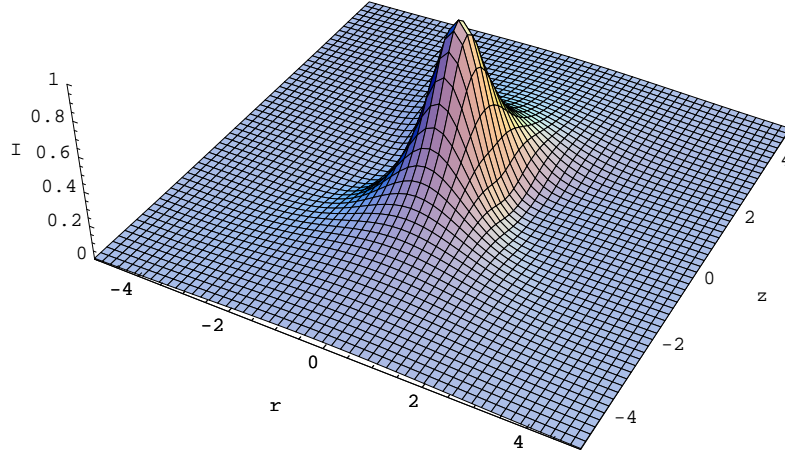


Abbildung 6.10: Intensität eines einzelnen Gaußstrahls für $E_0 = W_0 = z_0 = 1$

und der Rayleigh-Länge

$$z_0 \equiv \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \quad (6.205)$$

Für die Intensität eines einzelnen Gaußstrahls (s. Abb. 6.10 und 6.11) ergibt sich

$$I(r, z) = |E_x^\pm|^2 \quad (6.206)$$

$$= \left(\frac{E_0 W_0}{W} \right)^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2}\right) \quad (6.207)$$

und in der Nähe des Fokus

$$I(r, z)|_{r^2=0, z=0} = E_0^2 \quad (6.208)$$

Überlagert man die nach rechts und die nach links laufende elektrische Welle

$$E_x^{ges} = E_x^+ + E_x^- \quad (6.209)$$

so ergibt sich für die stehende Welle

$$E_x^{ges} = 2 \frac{E_0 W_0}{W} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right) \exp(i\omega t) \cos \gamma \quad (6.210)$$

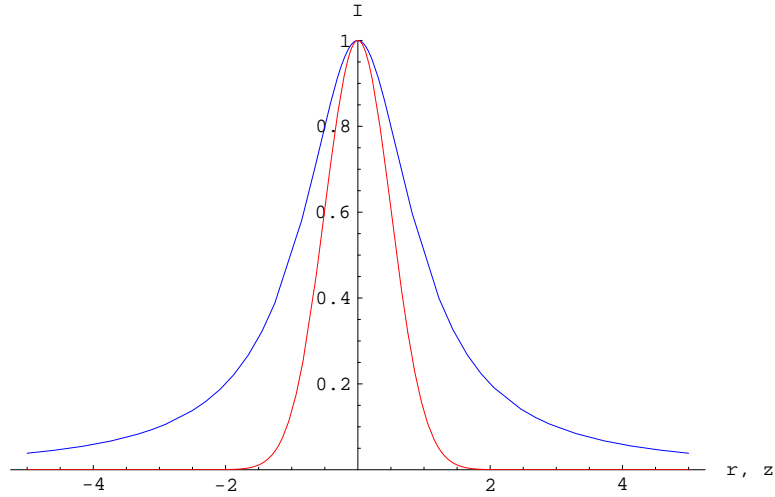


Abbildung 6.11: Schnitt durch Abbildung 6.10 → Gaußkurve (rot) in Abhängigkeit von r und Lorentzkurve (blau) in Abhängigkeit von z

und in reeller Darstellung

$$\Re(E_x^{ges}) = \frac{1}{2} (E_x^{ges} + (E_x^{ges})^*) \quad (6.211)$$

$$= 2 \frac{E_0 W_0}{W} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right) \cos(\omega t) \cos \gamma \quad (6.212)$$

wobei

$$\gamma \equiv \frac{kr^2}{2R} + kz - \varphi \quad (6.213)$$

Für die Intensität der stehenden Welle (s. Abb. 6.12) ergibt sich

$$I = |E_x^{ges}|^2 \quad (6.214)$$

$$= 4 \left(\frac{E_0 W_0}{W}\right)^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2}\right) \cos \gamma \quad (6.215)$$

und in der Nähe des Fokus

$$I(r, z)|_{r^2=0, z=0} = 4E_0^2 \quad (6.216)$$

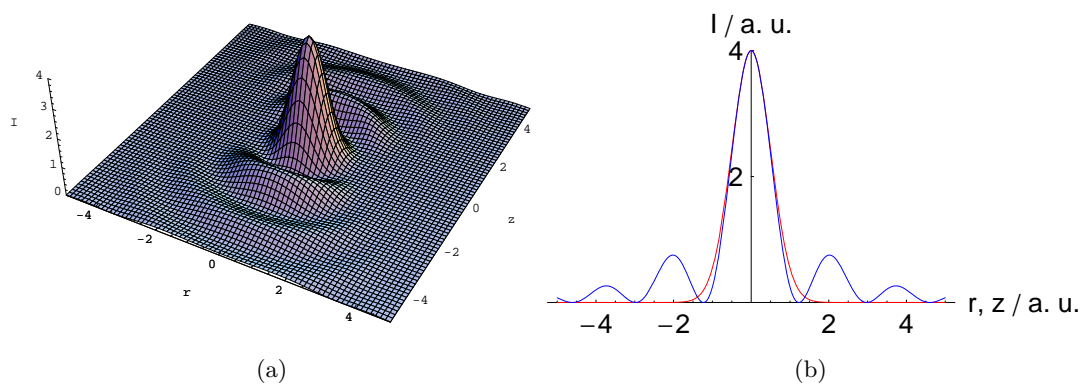


Abbildung 6.12: Intensität zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen für $E_0 = W_0 = z_0 = 1$. a) Intensität eines stehenden Laserfeldes als Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen. b) Schnitt durch die dreidimensionale Darstellung. Intensität in Abhängigkeit von der radialen Koordinate (rot) und vom Abstand zum Fokus (blau). Entlang der optischen Achse entstehen charakteristische Intensitätsminima und Intensitätsmaxima. Auf Grund des Gauß'schen Strahlprofils nimmt die Einhüllende der Laserintensität mit größer werdendem Abstand vom Fokus ab.

d. h. : die Intensität einer stehenden Gaußwelle ist im Fokus vier Mal so groß wie die Intensität einer laufenden Gaußwelle. Bildet man die Rotation

$$\nabla \times \mathbf{E}^\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x^\pm}{\partial z} \\ -\frac{\partial E_x^\pm}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (6.217)$$

und setzt dies in die Maxwellgleichung (6.4) ein, so erhält man

$$-\frac{\partial B_y^\pm}{\partial t} = \frac{\partial E_x^\pm}{\partial z} \quad (6.218)$$

$$\frac{\partial B_z^\pm}{\partial t} = \frac{\partial E_x^\pm}{\partial y} \quad (6.219)$$

Gauß'sche Strahlen sind somit i. a. keine transversalen elektromagnetischen Wellen, sondern nur in der Nähe des Fokus (betrachte nur erste Gleichung). Differentiation der rechts-/linkslaufenden Welle führt zu

$$\frac{\partial E_x^\pm}{\partial z} = E_0 W_0 \exp(-q_\pm r^2) \exp(i\tilde{\varphi}_\pm) \left[-\frac{1}{W^2} \frac{dW}{dz} - \frac{r^2}{W} \frac{dq_\pm}{dz} + \frac{i}{W} \frac{d\tilde{\varphi}_\pm}{dz} \right] \quad (6.220)$$

Setzt man die folgenden Gleichungen

$$\frac{dq_\pm}{dz} = -\frac{2}{W^3} \frac{dW}{dz} \mp \frac{ik}{2R^2} \frac{dR}{dz} \quad (6.221)$$

$$\frac{dW}{dz} = W_0 \frac{z/z_0^2}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}} \quad (6.222)$$

$$\frac{dR}{dz} = 1 - \frac{z^2}{z_0^2} \quad (6.223)$$

$$\Rightarrow \frac{dq_\pm}{dz} = -\frac{2}{W^3} W_0 \frac{z/z_0^2}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}} \mp \frac{ik}{2R^2} \left(1 - \frac{z^2}{z_0^2} \right) \quad (6.224)$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}_\pm}{dz} = \mp k \pm \frac{1}{z_0 (1 + z^2/z_0^2)} \quad (6.225)$$

in (6.220) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x^\pm}{\partial z} &= \frac{E_0 W_0}{W} \exp(-q_\pm r^2) \exp(i\tilde{\varphi}_\pm) \times \dots \\ &\dots \times \left[\frac{W_0 z}{W z_0^2 \sqrt{1+z^2/z_0^2}} \left(\frac{2r^2}{W^2} - 1 \right) + \dots \right. \\ &\left. \dots + ik \left(\pm \frac{r^2}{2R^2} \mp \frac{r^2 z_0^2}{2R^2 z^2} \pm \frac{1}{kz_0(1+z^2/z_0^2)} \mp 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (6.226)$$

Integriert man (6.218), erhält man die rechts-/linkslaufende Welle für das Magnetfeld in komplexer Darstellung

$$\begin{aligned} B_y^\pm &= -\frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial z} E_x^\pm \\ &= -\frac{E_0 W_0}{W} \exp(-q_\pm r^2) \exp(i\tilde{\varphi}_\pm) \times \dots \\ &\dots \times \left[-i \frac{W_0^2 z}{\omega z_0^2 W^2} \left(\frac{2r^2}{W^2} - 1 \right) + \dots \right. \\ &\left. \dots + \frac{1}{c} \left(\mp 1 \pm \frac{r^2}{2R^2} \mp \frac{r^2 z_0^2}{2R^2 z^2} \pm \frac{W_0^2}{kzW^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.227)$$

Überlagert man die nach rechts- und die nach linkslaufende magnetische Welle

$$B_y^{ges} = B_y^+ + B_y^- \quad (6.228)$$

so ergibt sich für die stehende Welle in komplexer Darstellung

$$B_y^{ges} = -2i \frac{E_0 W_0}{cW} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right) \exp(i\omega t) (\beta \cos \gamma - \alpha \sin \gamma) \quad (6.229)$$

und in reeller Darstellung

$$\Re[B_y^{ges}] = -2 \frac{E_0 W_0}{cW} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2}\right) \sin(\omega t) (\alpha \sin \gamma - \beta \cos \gamma) \quad (6.230)$$

wobei

$$\alpha \equiv -1 + \frac{r^2}{2R^2} - \frac{r^2 z_0^2}{2R^2 z^2} + \frac{W_0^2}{kz_0 W^2} \quad (6.231)$$

$$\beta \equiv \frac{W_0^2 z}{kz_0^2 W^2} \left(1 - \frac{2r^2}{W^2} \right) \quad (6.232)$$

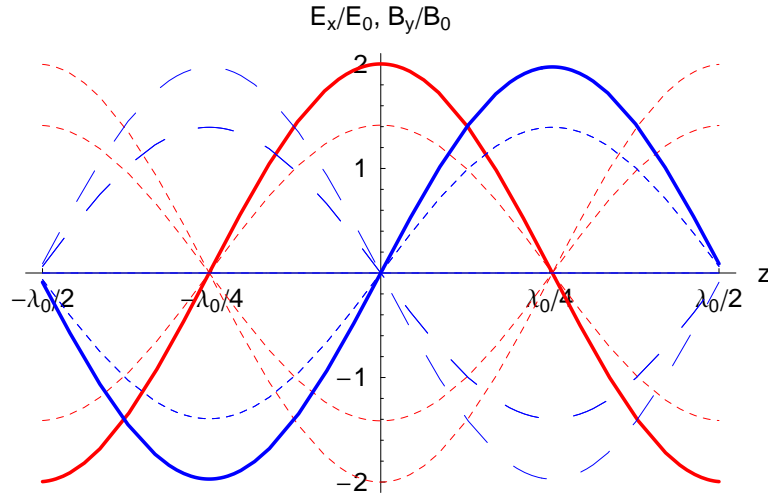


Abbildung 6.13: Stehendes elektrisches (rot) und magnetisches (blau) Feld als Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen auf der optischen Achse für $E_0 = W_0 = z_0 = 1$. Die dicken Kurven gehören zu den Zeitpunkten, bei denen die stehenden elektrischen und magnetischen Felder maximal sind. Die gestrichelten Kurven repräsentieren Momentaufnahmen zu verschiedenen Zeitpunkten. Es ist eine räumlich feste Struktur mit Knoten und Bäuchen erkennbar. Für verschiedene Zeiten schwanken die Felder zwischen den Knoten auf und ab. Die Momentaufnahmen des elektrischen Feldes sind symmetrisch zur Ordinate und die des Magnetfeldes antisymmetrisch zum Ursprung. Das stehende Magnetfeld verschwindet im Fokus für alle Zeiten.

Abbildung (6.13) zeigt das stehende elektrische Feld und das Magnetfeld auf der optischen Achse. Die Momentaufnahmen des elektrischen Feldes sind immer symmetrisch und die des Magnetfeldes antisymmetrisch. Man sieht weiterhin, daß die Knoten des Magnetfeldes in den Bäuchen des elektrischen Feldes und die Wendepunkte des elektrischen Feldes in den Bäuchen des Magnetfelds liegen. Insbesondere verschwindet das Magnetfeld im Ursprung für alle Zeiten

$$B_y^{ges}(z = 0) \equiv 0 \forall t \quad (6.233)$$

Die Knoten des elektrischen Feldes

$$E_x^{ges} = 0 \quad (6.234)$$

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

liegen bei

$$\gamma = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, m \in \mathbb{Z} \quad (6.235)$$

In der Nähe des Fokus gilt

$$W \rightarrow W_0 \quad (6.236)$$

$$R \rightarrow \infty \quad (6.237)$$

$$q_{\pm} \rightarrow 1/W_0^2 \quad (6.238)$$

$$\varphi \rightarrow z/z_0 \quad (6.239)$$

$$\tilde{\varphi}_{\pm} \approx \omega t \mp kz \pm z/z_0 \quad (6.240)$$

In dieser Näherung erhält man für das elektrische Feld

$$E_x^{\pm} \approx E_0 \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \exp[i(\omega t \mp kz \pm z/z_0)] \quad (6.241)$$

und aus (6.227) wird

$$\begin{aligned} B_y^{\pm} &\approx -\frac{E_0}{c} \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \exp[i(\omega t \mp kz \pm z/z_0)] \times \dots \\ &\dots \times \left[\mp 1 \pm \frac{1}{z_0 k} - i \frac{1}{z_0 k} \frac{z}{z_0} \left(\frac{2r^2}{W_0^2} - 1\right) \right] \end{aligned} \quad (6.242)$$

Wenn die Tailenbreite viel größer als die Wellenlänge ist

$$W_0 \gg \lambda \quad (6.243)$$

ergibt sich eine weitere Näherung

$$z_0 k = \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \frac{2\pi}{\lambda} \quad (6.244)$$

$$= \frac{2\pi^2 W_0^2}{\lambda^2} \quad (6.245)$$

$$\Rightarrow z_0 k \gg 1 \quad (6.246)$$

und daraus folgt

$$B_y^{\pm} \approx \pm \frac{E_0}{c} \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \exp[i(\omega t \mp kz \pm z/z_0)] \quad (6.247)$$

Weiterhin ergibt sich in Fokusnähe für das stehende elektrische Feld

$$\begin{aligned} E_x^{ges} &= E_0 \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \exp(i\omega t) [\exp[-i(k-1/z_0)z] + \exp[i(k-1/z_0)z]] \\ &= 2E_0 \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \exp(i\omega t) \cos[(k-1/z_0)z] \end{aligned} \quad (6.248)$$

und für das stehende Magnetfeld

$$\begin{aligned} B_y^{ges} &= \frac{E_0}{c} \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \exp(i\omega t) [\exp[-i(k-1/z_0)z] - \exp[i(k-1/z_0)z]] \\ &= -2i \frac{E_0}{c} \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \exp(i\omega t) \sin[(k-1/z_0)z] \end{aligned} \quad (6.249)$$

In reeller Darstellung erhält man

$$\Re[E_x^{ges}] = 2E_0 \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \cos(\omega t) \cos[(k-1/z_0)z] \quad (6.250)$$

und

$$\Re[B_y^{ges}] = 2 \frac{E_0}{c} \exp\left(\frac{-r^2}{W_0^2}\right) \sin(\omega t) \sin[(k-1/z_0)z] \quad (6.251)$$

Diesselben Ausdrücke folgen auch direkt aus (6.212) und (6.230) wegen

$$\alpha \rightarrow -1 \quad (6.252)$$

$$\beta \rightarrow 0 \quad (6.253)$$

$$\gamma \rightarrow kz - z/z_0 \quad (6.254)$$

Abb. (6.14) zeigt den Vergleich von exaktem Ergebnis und Fokusnäherung.

6.7 Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Pulse

Die Wellengleichung in einem linearen Medium lautet

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^L(\mathbf{r}, t) \quad (6.255)$$

wobei die lineare Polarisation im Frequenzraum durch

$$\bar{\mathbf{P}}^L(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (6.256)$$

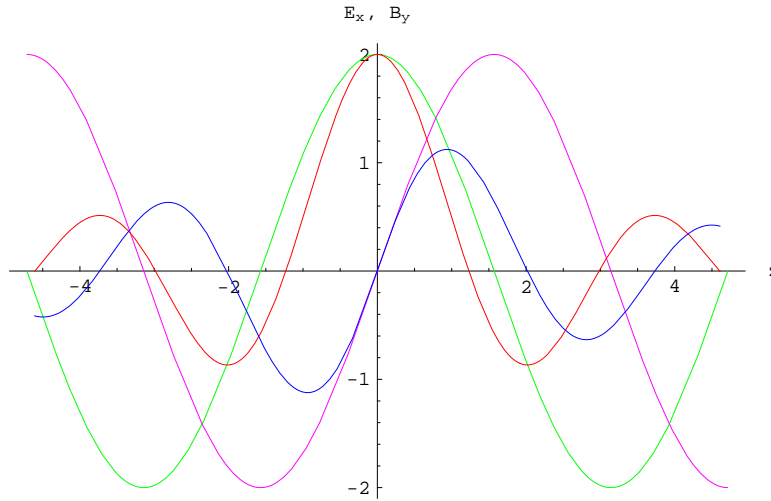


Abbildung 6.14: Elektrisches Feld (grün) und Magnetfeld (gelb) in Fokuspnäherung für $E_0 = W_0 = z_0 = 1$

gegeben ist. Fouriertransformation der skalaren Wellengleichung über

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega \quad (6.257)$$

liefert die skalare Helmholtzgleichung

$$[\Delta + k^2(\omega)] u(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (6.258)$$

mit der Dielektrizität

$$\varepsilon(\omega) \equiv 1 + \chi(\omega) \quad (6.259)$$

und der Dispersionsrelation

$$k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \quad (6.260)$$

Führt man die Transformationen

$$\eta^\pm = t \mp \frac{z}{v_g} \quad (6.261)$$

durch, so bewegt sich das transformierte System mit der Gruppengeschwindigkeit v_g . In der SVEA (slowly varying envelope approximation) ergibt sich schließlich die parabolische Wellengleichung

$$\frac{\partial}{\partial z} v(\eta, z) \mp i \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} v(\eta, z) = 0 \quad (6.262)$$

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

zur Beschreibung der Impulsausbreitung in der Zeit. Löst man diese Gleichung⁹, so ergibt sich für die langsame Einhüllende

$$v^\pm(\eta^\pm, z) = v_0 \exp \left[- \left(1 + i \frac{y^\pm(z)}{x} \right) \left(\frac{\eta^\pm}{\tau_G^\pm(z)} \right)^2 \right] \quad (6.263)$$

wobei

$$x \equiv \frac{\tau_{G0}^2}{4(1+a^2)} \quad (6.264)$$

und

$$y^\pm(z) \equiv \frac{a\tau_{G0}^2}{4(1+a^2)} \mp \frac{Dz}{2} \quad (6.265)$$

Für die Pulsdauer gilt

$$\tau_G^\pm(z) = \sqrt{\frac{4}{x} (x^2 + y^{\pm 2}(z))} \quad (6.266)$$

Der Chirp-Parameter a ist positiv für einen Down-Chirp und negativ für einen Up-Chirp. Die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g \equiv \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \right)^{-1} \quad (6.267)$$

und die GVD (group velocity dispersion)

$$D \equiv \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} \quad (6.268)$$

definiert man über die Ableitungen der Dispersionsrelation. Der nach rechts-/linkslaufenden Gaußpuls lautet schließlich

$$E^\pm(\eta, z) = v^\pm(\eta^\pm, z) \exp[i(\omega_0 t \mp k_0 z)] \quad (6.269)$$

Die Chirps der rechts-/linkslaufenden Gaußpulse unterscheiden sich nicht im Vorzeichen. Liegt keine Dispersion vor

$$D \doteq 0 \quad (6.270)$$

so ergibt sich

$$y \equiv \frac{a\tau_{G0}^2}{4(1+a^2)} \quad (6.271)$$

⁹s. Anh. (6.16)

sowie

$$\frac{y}{x} = a \quad (6.272)$$

Für die Pulsdauer gilt somit

$$\tau_G(z) = \tau_{G0} \quad (6.273)$$

Die instantane Frequenz ergibt sich aus der Ableitung der Phase nach der Zeit

$$\omega(t, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (6.274)$$

Differentiation der Phase

$$\Phi(t, z) = -a \left(\frac{\eta^\pm}{\tau_{G0}} \right)^2 \quad (6.275)$$

liefert

$$\omega^\pm(t, z) = -2a \frac{\eta^\pm}{\tau_{G0}^2} \quad (6.276)$$

Im Fokus bei $z = 0$ erhält man

$$\omega^\pm(t, z = 0) = -2a \frac{t}{\tau_{G0}^2} \quad (6.277)$$

D. h. : Sieht ein Beobachter bei $z = 0$ die beiden gegenläufigen Pulse auf sich zukommen, so steigt die instantane Frequenz für positive Zeiten und negativen Chirp-Parameter (Up-Chirp) für beide Pulse identisch an, und die roten Frequenzen erscheinen jeweils vor den blauen. Überlagert man den nach rechts- und den nach linkslaufenden Gaußpuls

$$E_{ges} = E^+ + E^- \quad (6.278)$$

so folgt

$$\begin{aligned} E_{ges} = & 2A_1 \exp(i\omega_0 t) \exp \left[- (1 + ia) \frac{t^2 + z^2/v_g^2}{\tau_{G0}^2} \right] \times \dots \\ & \dots \times [\cosh(A) \cos(B) + i \sinh(A) \sin(B)] \end{aligned} \quad (6.279)$$

wobei

$$A \equiv \frac{2tz}{v_g \tau_{G0}^2} \quad (6.280)$$

$$B \equiv \frac{2tza}{v_g \tau_{G0}^2} - k_0 z \quad (6.281)$$

Die Intensität erhält man über

$$I_{ges} = |E_{ges}|^2 \quad (6.282)$$

$$= 4A_1^2 \exp \left[-2 \frac{t^2 + z^2/v_g^2}{\tau_{G0}^2} \right] \times \dots \quad (6.283)$$

$$\dots \times [\cosh^2(A) \cos^2(B) + \sinh^2(A) \sin^2(B)] \quad (6.284)$$

Für große Zeiten oder einen großen Abstand vom Fokus verschwindet die Intensität wegen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_{ges} = \lim_{z \rightarrow \infty} I_{ges} = 0 \quad (6.285)$$

Betrachtet man Pulse ohne Chirp

$$a = 0 \quad (6.286)$$

so lauten die in (6.284) vorkommenden Parameter

$$A = \frac{2tz}{v_g \tau_{G0}^2} \quad (6.287)$$

$$B = -k_0 z \quad (6.288)$$

Für die Intensität eines einzelnen Gaußpulses ohne Chirp ergibt sich

$$I = |E|^2 \quad (6.289)$$

$$= A_1^2 \exp \left[-2 \left(\frac{\eta^\pm}{\tau_{G0}^\pm} \right)^2 \right] \quad (6.290)$$

Nach (6.284) beträgt die maximale der Intensität der überlagerten Pulses im Fokus zur Zeit $t = 0$

$$I(z = 0, t = 0) = 4A_1^2 \quad (6.291)$$

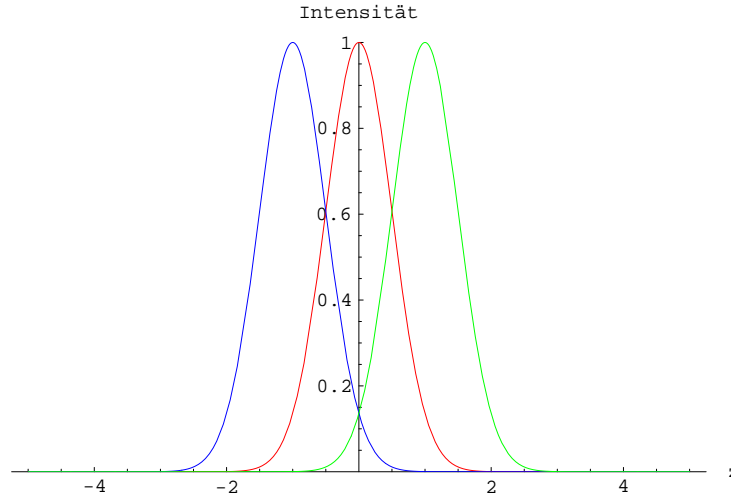


Abbildung 6.15: Intensität eines nach rechts-/links laufenden Gaußpulses ohne Chirp für $t_0 = 0$ (rot) und $t_1 = 1$ (grün/blau)

Für eine beliebige Zeit gilt

$$I(z = 0, t) = 4A_1^2 \exp\left(-2\frac{t^2}{\tau_{G0}^2}\right) \quad (6.292)$$

Setzt man weiterhin

$$I(z = 0, t) \doteq \alpha I(z = 0, t = 0) \quad (6.293)$$

wobei

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (6.294)$$

so sieht man, daß die Intensität am Ort $z = 0$ nach der Zeit

$$t_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \ln(\alpha)} \tau_{G0} \quad (6.295)$$

auf α abgefallen ist. Die einzelnen Pulse befinden sich an der Stelle

$$z_{1/2} = t_{1/2} v_g = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \ln(\alpha)} \tau_{G0} v_g \quad (6.296)$$

Für $\alpha = 1/2$ folgt beispielsweise $t_{1/2} \approx \pm 0.59 \tau_{G0}$. Abbildung (6.15) zeigt die Intensität eines einzelnen Gaußpulses, Abbildung (6.16) die Intensität zweier gegenläufiger Gaußpulse ohne Chirp und Abbildung (6.17) mit Chirp. Man sieht, daß der Chirp zu einer zusätzlichen Modulation der Intensität führt.

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

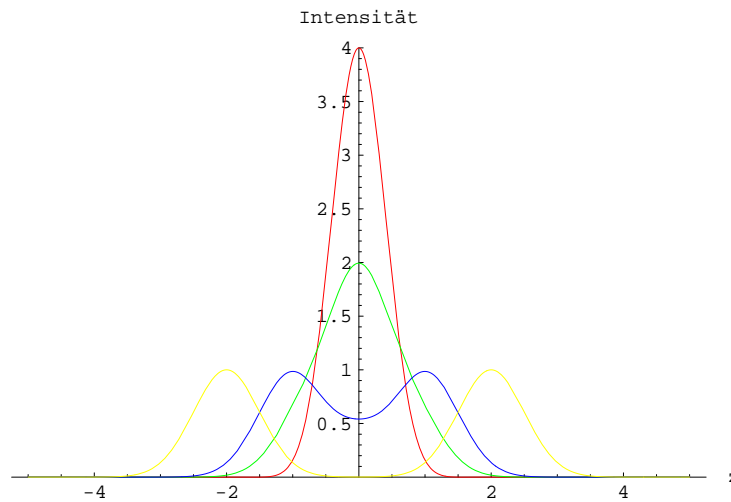


Abbildung 6.16: Intensität zweier gegenläufiger Gauß'scher Pulse ohne Chirp für $t_0 = 0$ (rot), $t_1 = 0.59$ (grün), $t_2 = 1$ (blau) und $t_3 = 2$ (gelb) für $v_0 = k_0 = \tau_{G0} = v_g = 1$ und Chirp-Parameter $a = 0$.

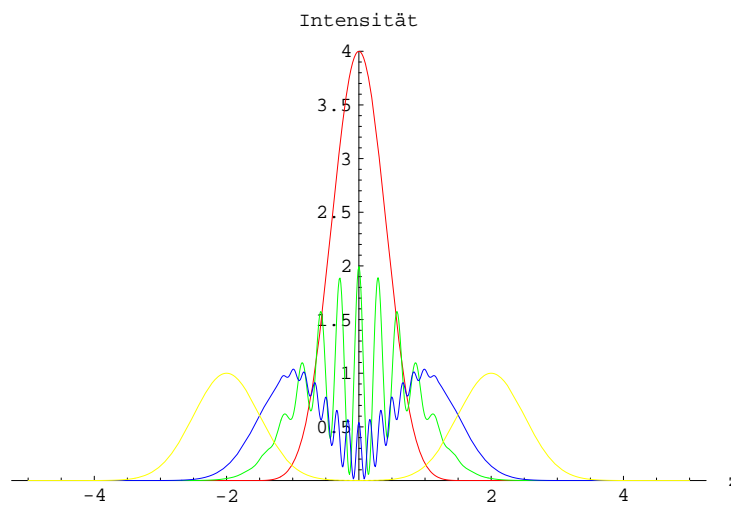


Abbildung 6.17: Intensität zweier gegenläufiger Gauß'scher Pulse mit Chirp für $t_0 = 0$ (rot), $t_1 = 0.59$ (grün), $t_2 = 1$ (blau) und $t_3 = 2$ (gelb) für $v_0 = k_0 = \tau_{G0} = v_g = 1$ und Chirp-Parameter $a = 10$

6.8 Pulsfrontverkipfung eines Gauß'schen Pulses

Wir wollen die Pulsdauererlängerung eines verkippten Pulses berechnen. Wir gehen von einem Gauß'schen Pulsprofil aus (Pulsprofil in Raum und Zeit, Gruppengeschwindigkeit des Pulses ist die Lichtgeschwindigkeit, im Fokus, d. h. $z = 0$)

$$I(r, t, z = 0) \sim \exp\left(-2\frac{(t - z/c)^2}{\tau_p^2}\right) \exp\left(-\frac{2r^2}{d_0^2}\right), \quad (6.297)$$

wobei τ_p die Pulsdauer, r die radiale Koordinate in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und d_0 die räumliche Strahlbreite im Fokus (Tailenbreite) sind. Ist der Puls verkippt, d. h. die Normale der Lichtscheibe ist nicht mehr parallel zur Ausbreitungsrichtung des Pulses, so ergibt sich (durch Projektion auf die Ausbreitungsrichtung)

$$I(r, t) \sim \exp\left(-2\frac{(t - \tilde{z}/c)^2}{\tau_p^2}\right) \exp\left(-\frac{2r^2}{d_0^2}\right), \quad (6.298)$$

wobei α_{kippp} der Kippwinkel der Lichtscheibe, r die radiale Koordinate, τ_p die Pulsdauer, d_0 und $\tilde{z} = r \tan \alpha_{\text{kippp}}$ die Projektion auf die z -Achse (die Ausbreitungsrichtung) sind. Integration über alle r liefert die Intensität des verkippten Pulses, welche nur noch von der Zeit t abhängig ist

$$I_{\text{kippp}}(t) \sim \exp\left[-2\frac{t^2}{\tau_p^2 + (d_0 \tan \alpha_{\text{kippp}}/c)^2}\right], \quad (6.299)$$

und die neue Pulsdauer beträgt somit

$$\tau_{\text{kippp}} = \sqrt{\tau_p^2 + (d_0 \tan \alpha_{\text{kippp}}/c)^2}. \quad (6.300)$$

Für die Pulsverlängerung (ξ) ergibt sich

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\tau_{\text{kippp}}}{\tau_p} \\ &= \sqrt{\frac{\tau_p^2 + (d_0 \tan \alpha_{\text{kippp}}/c)^2}{\tau_p^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{d_0 \tan \alpha_{\text{kippp}}}{c\tau_p}\right)^2}. \end{aligned} \quad (6.301)$$

Umschreiben auf die räumliche und zeitliche Halbwertsbreite ($d_{\text{FWHM}} = \sqrt{2 \ln 2} d_0$, $\tau_{\text{p, FWHM}} = \sqrt{2 \ln 2} \tau_{\text{p}}$) liefert schließlich für die Pulsdauerverlängerung eines verkippten Pulses

$$\xi = \sqrt{1 + \left(\frac{d_{\text{FWHM}} \tan \alpha_{\text{kippt}}}{c \tau_{\text{p, FWHM}}} \right)^2}. \quad (6.302)$$

6.9 Klassische Autokorrelation zweiter Ordnung

Das Autokorrelationssignal $(n + 1)$ -ter Ordnung A_{n+1} lautet allgemein ($A_{n+1} \sim I^{n+1}$, τ ist die Zeitverschiebung zwischen zwei Laserpulsen, die CCD-Kamera integriert über alle Zeiten $t = -\infty \cdots + \infty$)

$$A_{n+1}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) I^n(t - \tau) dt. \quad (6.303)$$

Das Autokorrelationssignal zweiter Ordnung ($n + 1 = 2$) lautet daher

$$A_2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) I(t - \tau) dt. \quad (6.304)$$

Setzen wir ein Gauß'sches Intensitäts-(Puls)profil mit der Pulsdauer τ_{p} (halbe Pulsbreite der Einhüllenden der elektrischen Feldstärke) an

$$I \sim \exp\left(-2 \frac{t^2}{\tau_{\text{p}}^2}\right), \quad (6.305)$$

Nach der Zeit $t_{0,2}$ fällt dieses auf die Hälfte ab (FWHM)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\doteq \exp\left(-2 \frac{t_{0,2}^2}{\tau_{\text{p}}^2}\right) \\ \Leftrightarrow -\ln 2 &= -2 \frac{t_{0,2}^2}{\tau_{\text{p}}^2} \\ \Leftrightarrow t_{0,2} &= \tau_{\text{p}} \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}. \end{aligned} \quad (6.306)$$

Die Halbwertsbreite beträgt ($2 \times t_{0,2}$)

$$t_{\text{FWHM}} = \tau_{\text{p}} \sqrt{2 \ln 2}. \quad (6.307)$$

Einsetzen des Gauß'schen Intensitätsprofils in die Autokorrelationsfunktion zweiter Ordnung ergibt

$$\begin{aligned}
 A_2(\tau_{\text{korr}}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2\frac{t^2}{\tau_p^2}\right) \exp\left(-2\frac{(t-\tau_{\text{korr}})^2}{\tau_p^2}\right) dt \\
 &= \exp\left(-2\frac{\tau_{\text{korr}}^2}{\tau_p^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-4t^2 + 4t\tau_{\text{korr}}}{\tau_p^2}\right) dt \\
 &= \exp\left(-2\frac{\tau_{\text{korr}}^2}{\tau_p^2}\right) \exp\left(\frac{\tau_{\text{korr}}^2}{\tau_p^2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau_p \\
 &= \exp\left(-\frac{\tau_{\text{korr}}^2}{\tau_p^2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau_p
 \end{aligned} \tag{6.308}$$

Das Maximum des Autokorrelationssignals liegt bei

$$A_{2, \text{max}}(\tau_{\text{korr}}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau_p \tag{6.309}$$

und die Hälfte bei

$$\frac{A_{2, \text{max}}(\tau_{\text{korr}})}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \tau_p. \tag{6.310}$$

Für die FWHM-Korrelationsdauer zweiter Ordnung ($\tau_{\text{korr}, 2}$) folgt somit

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{\pi}}{4} \tau_p &= \exp\left(-\frac{\tau_{\text{korr}, 2}^2}{\tau_p^2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau_p \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \exp\left(-\frac{\tau_{\text{korr}, 2}^2}{\tau_p^2}\right) \\
 \Leftrightarrow \sqrt{\ln 2} &= \frac{\tau_{\text{korr}, 2}}{\tau_p}
 \end{aligned} \tag{6.311}$$

Umschreiben auf die FWHM-Pulsdauer ($t_{0, 2}$) liefert schließlich

$$\begin{aligned}
 t_{0, 2} &= \tau_{\text{korr}, 2} / \sqrt{2} \\
 &= \tau_{\text{korr}, 2} / 1.41.
 \end{aligned} \tag{6.312}$$

6.10 Klassische Autokorrelation dritter Ordnung

Für ein Autokorrelationssignal dritter Ordnung ($n + 1 = 3$) gilt

$$A_3(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) I^2(t - \tau) dt. \quad (6.313)$$

Wir setzen ein Gauß'sches Intensitäts-(Puls)profil an

$$I \sim \exp\left(-2\frac{t^2}{\tau_p^2}\right), \quad (6.314)$$

welches nach der Zeit

$$t_0 = \tau_p \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}$$

auf die Hälfte abfällt (FWHM). Einsetzen des Gauß'schen Intensitätsprofils in das Autokorrelationssignal dritter Ordnung liefert

$$\begin{aligned} A_3(\tau_{\text{korrr}}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2\frac{t^2}{\tau_p^2}\right) \exp\left(-4\frac{(t - \tau_{\text{korrr}})^2}{\tau_p^2}\right) dt \\ &= \exp\left(-4\frac{\tau_{\text{korrr}}^2}{\tau_p^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-6t^2 + 8t\tau_{\text{korrr}}}{\tau_p^2}\right) dt \\ &= \exp\left(-4\frac{\tau_{\text{korrr}}^2}{\tau_p^2}\right) \exp\left(\frac{8\tau_{\text{korrr}}^2}{3\tau_p^2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{6}}\tau_p \\ &= \exp\left(-\frac{4}{3}\frac{\tau_{\text{korrr}}^2}{\tau_p^2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{6}}\tau_p \end{aligned} \quad (6.315)$$

Das Maximum dieses Signals liegt bei

$$A_{3, \text{max}}(\tau_{\text{korrr}}) = \sqrt{\frac{\pi}{6}}\tau_p \quad (6.316)$$

und die Hälfte des Signals bei

$$\frac{A_{3, \text{max}}(\tau_{\text{korrr}})}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{6}}\tau_p. \quad (6.317)$$

Für die FWHM-Korrelationsbreite dritter Ordnung ($\tau_{\text{kor},3}$) folgt somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \tau_{\text{P}} &= \exp\left(-\frac{4}{3} \frac{\tau_{\text{kor},3}^2}{\tau_{\text{P}}^2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{6}} \tau_{\text{P}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \exp\left(-\frac{4}{3} \frac{\tau_{\text{kor},3}^2}{\tau_{\text{P}}^2}\right) \\ \Leftrightarrow \sqrt{\ln 2} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\tau_{\text{kor},3}}{\tau_{\text{P}}} \end{aligned} \quad (6.318)$$

und nach Umschreiben auf die FWHM-Pulsdauer ($t_{0,3}$) schließlich

$$\begin{aligned} t_{0,3} &= \tau_{\text{kor},3} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ &= \tau_{\text{kor},3} / 1.22. \end{aligned} \quad (6.319)$$

D. h. Um die FWHM-Pulsdauer zu erhalten, müssen wir die FWHM-Breite der Autokorrelationsfunktion (im Falle dritter Ordnung!) mit dem Faktor $\sqrt{2/3}$ multiplizieren bzw. durch den Faktor $\sqrt{3/2} \approx 1.22$ teilen. Die FWHM-Pulsdauer ist somit kleiner als die FWHM-Korrelationsbreite.

6.11 $q_{1/e}$ -Parameter eines idealen Gauß'schen Pulses

Für die Intensität eines einzelnen idealen Gauß'schen Pulses gilt (Faltung eines räumlichen und eines zeitlichen Gauß'schen Profils)

$$I(r, z, t) = I_0(z) \exp\left[-2 \frac{r^2}{W(z)^2}\right] \exp\left[-2 \left(\frac{t - z/v_g}{\tau_L}\right)^2\right] \quad (6.320)$$

mit der Amplitude

$$I_0(z) = \left(\frac{E_0 W_0}{W(z)}\right)^2. \quad (6.321)$$

Zunächst bestimmen wir den radialen Abstand r_0 von der optischen Achse, bei dem das transversale, räumliche Intensitätsprofil auf $1/e$ abfällt

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} &\doteq \exp\left(-2\frac{r_0^2}{W(z)^2}\right) \\ \Leftrightarrow -1 &= -2\frac{r_0^2}{W(z)^2}. \end{aligned} \quad (6.322)$$

Daraus folgt

$$r_0 = \frac{W(z)}{\sqrt{2}}. \quad (6.323)$$

Wir wollen das Verhältnis der Energie innerhalb der $1/e$ -Fläche zur Gesamtenergie berechnen. Wir bezeichnen es als

$$q_{1/e} \equiv \frac{E_{1/e}}{E_{\text{ges}}}. \quad (6.324)$$

Die Energie erhalten wir allgemein, indem wir die Intensität über die Zeit und die Fläche integrieren

$$\begin{aligned} E [\text{J}] &= \int dt \int dA I(r, z, t) \\ &= \int dt \int 2\pi r dr I(r, z, t), \end{aligned} \quad (6.325)$$

wobei dA ein Flächenelement ist. Die Energie innerhalb der $1/e$ -Fläche erhalten wir, indem wir von der optischen Achse bis zur Stelle r_0 integrieren, bei der Intensität auf $1/e$ abgefallen ist, d. h. $r = 0 \dots r_0$. Die Gesamtenergie erhalten wir, indem wir über die ganze x, y -Ebene integrieren, d. h. $r = 0 \dots \infty$. Da wir die auf eine CCD-Kamera auftreffende Energie bestimmen, integrieren wir jeweils über alle Zeiten

$$E_{1/e} = I_0(z) \int_0^{r_0} 2\pi r \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2}\right) dr \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-2\left(\frac{t-z/v_g}{\tau_L}\right)^2\right] dt \quad (6.326)$$

$$E_{\text{ges}} = I_0(z) \int_0^{\infty} 2\pi r \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2}\right) dr \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-2\left(\frac{t-z/v_g}{\tau_L}\right)^2\right] dt. \quad (6.327)$$

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Setzen wir dies in den $q_{1/e}$ -Parameter ein, so folgt

$$q_{1/e} = \frac{\int_0^{r_0} 2\pi r \exp\left(-2\frac{r^2}{W^2}\right) dr \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-2\left(\frac{t-z/v_g}{\tau_L}\right)^2\right] dt}{\int_0^{\infty} 2\pi r \exp\left(-2\frac{r^2}{W^2}\right) dr \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-2\left(\frac{t-z/v_g}{\tau_L}\right)^2\right] dt} \quad (6.328)$$

Wir berechnen zuerst die Raumintegrale

$$J_1 = \int_0^{r_0=W/\sqrt{2}} 2\pi r \exp\left(-2\frac{r^2}{W^2}\right) dr = \frac{1}{2}\pi W^2 \left(1 - \frac{1}{e}\right) \quad (6.329)$$

und

$$J_2 = \int_0^{\infty} 2\pi r \exp\left(-2\frac{r^2}{W^2}\right) dr = \frac{1}{2}\pi W^2. \quad (6.330)$$

Für das Zeitintegral gilt

$$\begin{aligned} J_t &= \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \exp\left[-2\left(\frac{t-z/v_g}{\tau_L}\right)^2\right] dt = \tau_L \int_{t'=-\infty}^{t'=+\infty} \exp[-2t'^2] dt' \\ &= \tau_L \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{2}t'\right) \Big|_{t'=-\infty}^{t'=+\infty} = \tau_L \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (6.331)$$

mit der Substitution

$$t' = \frac{t-z/v_g}{\tau_L}. \quad (6.332)$$

Die Funktion $\operatorname{erf}(\tilde{z})$ ist die Gauß'sche Fehlerfunktion an einer beliebigen Stelle \tilde{z} . Für den $q_{1/e}$ -Parameter erhalten wir schließlich (das Zeitintegral kürzt sich dabei heraus)

$$q_{1/e} = \frac{J_1}{J_2} = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0.63. \quad (6.333)$$

D. h. Für einen idealen Gauß'schen Puls beträgt der $q_{1/e}$ -Parameter 0.63, so daß 63 % der Gesamtenergie innerhalb der $1/e$ -Fläche liegen.

6.12 Relativistische Autokorrelation

Wir beschreiben die Laserpulse als ideale Gaußpulse. Für das räumlich und zeitlich abhängige elektrische Feld des von links kommenden Pulses gilt

$$E_L(r, z, t) = \frac{E_{0L}W_0}{W(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2(z)}\right) \times \exp\left(-i\frac{kr^2}{2R(z)}\right) \times \exp\left[-\left(\frac{t-z/c}{\tau_L}\right)^2\right] \exp\left[i\left(\omega t - kz + \eta(z)\right)\right] \quad (6.334)$$

mit den Abkürzungen

$$W^2(z) = W_0^2\left(1 + (z/z_0)^2\right) \quad (6.335)$$

$$R(z) = z\left(1 + (z_0/z)^2\right) \quad (6.336)$$

$$\eta(z) = -\tan^{-1}(z/z_0) \quad (6.337)$$

Berücksichtigen wir, daß durch die Strahlteilerverschiebung Δx eine Laufzeitverschiebung von

$$\Delta\tau = \frac{\Delta x}{\cos(\pi/4)c} \quad (6.338)$$

eintritt und der Fokus nicht bei Null sondern bei $z_1 \neq 0$ sitzt, so ergibt sich für das elektrische Feld des von rechts kommenden Pulses

$$E_R(r, z - z_1, t - \Delta\tau) = \frac{E_{0R}W_0}{W(z - z_1)} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2(z - z_1)}\right) \exp\left(i\frac{kr^2}{2R(z - z_1)}\right) \times \exp\left[-\left(\frac{t + (z - z_1)/c - \Delta\tau}{\tau_L}\right)^2\right] \times \exp\left[i\left(\omega(t - \Delta\tau) + k(z - z_1) - \eta(z - z_1)\right)\right]. \quad (6.339)$$

Die beobachtete Strahlung ist nichtlineare Thomsonstreuung. Um die abgestrahlte Intensität zu berechnen, gehen wir von der relativistischen Bewegung der Elektronen aus. Die relativistischen Bewegungsgleichungen für ein freies Elektron in einer elektromagne-

tischen Welle lauten

$$\frac{d(\gamma m \mathbf{v})}{dt} = -e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (6.340)$$

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = -e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} \quad (6.341)$$

mit dem Lorentzfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{r}}/c)^2}}. \quad (6.342)$$

Setzen wir $\gamma = \text{const}$ (gültig für den schwach relativistischen Fall), so vereinfachen sich die relativistischen Bewegungsgleichungen zu

$$\gamma m \frac{d^2 \dot{\mathbf{r}}}{dt^2} = -e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}). \quad (6.343)$$

Wir gehen von einer ebenen elektromagnetischen Welle (das elektrische Feld ist in x -Richtung linear polarisiert) mit Ausbreitungsrichtung z aus

$$\mathbf{E} = E(t) \hat{\mathbf{e}}_x \quad (6.344)$$

$$\mathbf{B} = \frac{E(t)}{c} \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (6.345)$$

wobei $E(t) = E_0 \cos(\omega t - kz)$ gilt. Setzen wir das Kreuzprodukt

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\dot{z}E(t)/c \\ 0 \\ \dot{x}E(t)/c \end{pmatrix} \quad (6.346)$$

in (6.343) ein, so ergibt sich das vereinfachte Differentialgleichungssystem

$$\gamma m \ddot{x} = -eE(t) + e\dot{z}E(t)/c \quad (6.347)$$

$$\gamma m \ddot{y} = 0 \quad (6.348)$$

$$\gamma m \ddot{z} = -e\dot{x}E(t)/c. \quad (6.349)$$

Integration durch Störungsrechnung mit der Anfangsbedingung, daß sich das Elektron zum Zeitpunkt $t = -\infty$ im Maximum des elektrischen Feldes befindet, d. h. $\dot{x}(t = -\infty) =$

0, $x(t = -\infty) = 0$, $\dot{z}(t = -\infty) = 0$ und $z(t = -\infty) = 0$, liefert

$$\ddot{x}^{(0)} = -\frac{e}{\gamma m} E(t) \quad (6.350)$$

$$\rightarrow \dot{x}^{(0)} = -\frac{e}{\gamma m} \int_{-\infty}^t E(t') dt'. \quad (6.351)$$

Setzen wir dies in (6.349) ein, so erhalten wir die Beschleunigung in erster Ordnung Störungstheorie

$$\ddot{z}^{(1)} = \frac{e^2}{\gamma^2 m^2 c} E(t) \int_{-\infty}^t E(t') dt'. \quad (6.352)$$

Da diese Beziehung unabhängig von der Gestalt des elektrischen Feldes $E(t)$ ist, gilt sie sowohl für laufende als auch für stehende Wellen.

Um zu zeigen, daß $\ddot{z}^{(1)}$ eine sinnvolle Näherung darstellt, schätzen wir die einzelnen Glieder der Reihenentwicklung ab. Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir $E(t) = E_0 \cos \omega t$ und integrieren vom Zeitpunkt $t = 0$ an, d. h. $\dot{x}(t = 0) = 0$, $x(t = 0) = 0$, $\dot{z}(t = 0) = 0$ und $z(t = 0) = 0$. Aus (6.350) folgt

$$\ddot{x}^{(0)} = -\frac{e}{\gamma m} E_0 \cos \omega t \quad (6.353)$$

$$= -\frac{\omega c}{\gamma} a_0 \cos \omega t \quad (6.354)$$

mit dem relativistischen Parameter $a_0 = eE_0/m\omega c$. Für schwach relativistische Intensitäten dürfen wir $\gamma \approx 1$ setzen, so daß

$$\ddot{x}^{(0)} \approx -\omega c a_0 \cos \omega t \quad (6.355)$$

$$\rightarrow \dot{x}^{(0)} = -c a_0 \sin \omega t \quad (6.356)$$

folgt. Setzen wir (6.356) in (6.349) ein, so finden wir

$$\ddot{z}^{(1)} = \frac{1}{2} c \omega a_0^2 \sin(2\omega t) \quad (6.357)$$

$$\rightarrow \dot{z}^{(1)} = -\frac{1}{4} c a_0^2 [1 - \cos(2\omega t)]. \quad (6.358)$$

Setzen wir weiterhin (6.358) in (6.347) ein, so ergibt sich

$$\ddot{x}^{(2)} = \frac{1}{8}\omega ca_0^3 \cos(3\omega t) - \omega ca_0 \left(1 + \frac{1}{8}a_0^2\right) \cos(\omega t) \quad (6.359)$$

$$\rightarrow \dot{x}^{(2)} = \frac{1}{24}ca_0^3 \sin(3\omega t) - ca_0 \left(1 + \frac{1}{8}a_0^2\right) \sin(\omega t). \quad (6.360)$$

Weiterhin folgt

$$\ddot{z}^{(3)} = \frac{1}{2}c\omega \left(1 + \frac{1}{12}a_0^2\right) \sin(2\omega t) - \frac{\omega ca_0^4}{48} \sin(4\omega t). \quad (6.361)$$

Die relative Korrektur zur Amplitude der zweiten Harmonischen beträgt also $|\Delta\ddot{z}|/|\ddot{z}| = a_0^2/12$. Da die abgestrahlte Leistung mit $|\ddot{z}|^2$ skaliert, ist die Korrektur zur Leistung $\Delta P/P = a_0^4/144$. Für den gemessenen relativistischen Parameter $a_0 = 1.2$ erhalten wir $\Delta P/P \approx 1\%$, d. h. die durch Störungsreihenentwicklung vernachlässigten Korrekturen liegen im Prozentbereich.

Das abgestrahlte elektrische Feld eines einzelnen Elektrons lautet allgemein

$$|E_T| = \frac{e\ddot{z}(t - \rho/c) \sin\vartheta}{4\pi\epsilon_0 c^2 \rho}, \quad (6.362)$$

wobei ρ der Beobachtungsabstand und ϑ der Beobachtungswinkel sind. Da wir unter $\vartheta \approx 90^\circ$ beobachten, d. h. $\sin\vartheta \approx 1$, folgt $\rho = \text{const.}$ Setzen wir (6.352) in (6.362) ein, so ergibt sich für das Betragquadrat der Feldstärke

$$|E_T|^2 = \frac{e^2 r_e^2}{m^2 c^2 \gamma^4 \rho^2} \left| E(t) \int_{-\infty}^t E(t') dt' \right|^2, \quad (6.363)$$

mit dem klassischen Elektronenradius $r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$. Für die auf die CCD-Kamera auftreffende zeitintegrierte Energie erhalten wir

$$S(\Delta\tau, z, z_1) = \frac{\epsilon_0 c e^2 r_e^2}{m^2 c^2 \gamma^4 \rho^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| E(t) \int_{-\infty}^t E(t') dt' \right|^2 dt \quad (6.364)$$

Wenn die Einhüllende von $E(t)$ hinreichend langsam veränderlich und für $t \rightarrow -\infty$ gegen Null geht, dann gilt die Beziehung

$$\int_{-\infty}^t E(t') dt' = \frac{1}{i\omega} E(t), \quad (6.365)$$

Damit ergibt sich für das Meßsignal

$$S(\Delta\tau, z, z_1) = \frac{\varepsilon_0 c r_e^2}{m^2 c^2 \gamma^4 \rho^2 \omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |E^2(t)|^2 dt. \quad (6.366)$$

Wegen $|E^2|^2 = E E E^* E^* = E E^* E E^* = I^2$ folgt $S(\Delta\tau, z, z_1) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} I(t)^2 dt$. Daher handelt es sich um ein intensitätsabhängiges Signal zweiter Ordnung!

Wir berechnen nun das Integral

$$S \sim J = \int_{-\infty}^{+\infty} |E^2(t)|^2 dt. \quad (6.367)$$

wobei sich das elektrische Feld aus der Summe der Felder des von links- und des von rechtskommenden Pulses zusammensetzt

$$E(t) = E_L(t) + E_R(t). \quad (6.368)$$

Für den Integranden aus (6.367) erhalten wir

$$\begin{aligned} I_n &= \left| (E_L + E_R)^2 \right|^2 \\ &= [E_L^2 + E_R^2 + 2E_L E_R] [E_L^{2*} + E_R^{2*} + 2E_L^* E_R^*] \\ &= |E_L^2|^2 + |E_R^2|^2 + 4|E_R|^2 |E_L|^2 + \\ &\quad + E_L^2 E_R^{2*} + E_R^2 E_L^{2*} + 2E_R^2 E_L^* E_R^* + \\ &\quad 2E_L^2 E_L^* E_R^* + 2E_L E_R E_L^{2*} + 2E_L E_R E_R^{2*}. \end{aligned} \quad (6.369)$$

Die räumlich schnell oszillierenden Anteile $E_L^2 E_R^{2*}$, $E_R^2 E_L^{2*}$ sowie $2E_R^2 E_L^* E_R^*$, $2E_L^2 E_L^* E_R^*$, $2E_L E_R E_L^{2*}$ und $2E_L E_R E_R^{2*}$ entfallen bei unserer Abbildung wegen einer räumlichen Auflösung von $5 \mu\text{m}$. Die Messung ist nicht interferometrisch!

$$I_n = |E_L^2|^2 + |E_R^2|^2 + 4|E_R|^2 |E_L|^2.$$

Setzen wir die Felder (6.334) und (6.339) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 S \sim & \frac{E_{0L}^4 W_0^4}{W^4(z)} \exp\left(-4\frac{r^2}{W^2(z)}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{4}{\tau_L^2}\left(t - \frac{z}{c}\right)^2\right] dt + \\
 & + \frac{E_{0R}^4 W_0^4}{W^4(z - z_1)} \exp\left(-4\frac{r^2}{W^2(z - z_1)}\right) \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{4}{\tau_L^2}\left(t + \frac{z - z_1}{c} - \Delta\tau\right)^2\right] dt + \\
 & + \frac{4E_{0L}^2 E_{0R}^2 W_0^4}{W^2(z) W^2(z - z_1)} \exp\left[-2r^2\left(\frac{1}{W^2(z)} + \frac{1}{W^2(z - z_1)}\right)\right] \times \\
 & \times \exp\left[-\frac{4}{\tau_L^2}\left(\frac{z - z_1/2}{c} - \frac{\Delta\tau}{2}\right)^2\right] \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{4}{\tau_L^2}\left(t - \frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{c} + \Delta\tau\right)\right)^2\right] dt
 \end{aligned} \tag{6.370}$$

Für die Zeitintegrale gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{4}{\tau_L^2}(t \pm t_0)^2\right] dt = \frac{\tau_L}{2} \sqrt{\pi} \tag{6.371}$$

unabhängig von t_0 . Die Integration über das Volumen führt auf

$$I_a = \int_0^\infty 2\pi r \exp(-ar^2) dr = \frac{\pi}{a}. \tag{6.372}$$

Setzen wir (6.371) und (6.372) in das räumlich und zeitlich integrierte Signal ein

$$S \sim \int_0^\infty 2\pi r dr \int_{-\infty}^{+\infty} |E^2(t)|^2 dt, \tag{6.373}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 S \sim & \frac{E_{0L}^4}{4W^2(z)} + \frac{E_{0R}^4}{4W^2(z - z_1)} + \frac{2E_{0L}^2 E_{0R}^2 W_0^4}{W^2(z) + W^2(z - z_1)} \times \\
 & \times \exp\left[-\frac{4}{\tau_L^2}\left(\frac{z - z_1/2}{c} - \frac{\Delta\tau}{2}\right)^2\right]
 \end{aligned} \tag{6.374}$$

Mit der Beziehung

$$W^2(z) + W^2(z - z_1) = 2W_0^2 \left[1 + \left(\frac{z - z_1/2}{z_0} \right)^2 + \frac{z_1^2}{4z_0^2} \right] \quad (6.375)$$

erhalten wir schließlich

$$S(z, z_1, \Delta\tau) \sim \frac{I_{0L}^2}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} + \frac{I_{0R}^2}{1 + \left(\frac{z-z_1}{z_0}\right)^2} + \frac{4I_{0L}I_{0R}}{1 + \left(\frac{z-z_1/2}{z_0}\right)^2 + \frac{z_1^2}{4z_0^2}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{4}{\tau_L^2} \left(\frac{z - z_1/2}{c} - \frac{\Delta\tau}{2} \right)^2 \right] \quad (6.376)$$

Wir können nun verschiedene Fälle diskutieren:

1. Für identische Intensitäten $I_{0L} = I_{0R}$ und zusammenfallende Foki $z_1 = 0$ der beiden gegenläufigen Pulse bekommen wir ein maximales Signal

$$S(z, z_1 = 0, \Delta\tau) \sim \frac{2}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \left[1 + 2 \exp \left(-\frac{4}{\tau_L^2} \left(\frac{z}{c} - \frac{\Delta\tau}{2} \right)^2 \right) \right] \quad (6.377)$$

In diesem Fall sehen wir einen Peak auf der CCD-Kamera. Das Verhältnis von Untergrund zu maximalem Signal ist

$$\frac{\lim_{\Delta\tau \rightarrow \infty} S(z, z_1, \Delta\tau)}{S(z = c\Delta\tau/2, z_1, \Delta\tau)} = 1/3. \quad (6.378)$$

2. Für identische Intensitäten $I_{0L} = I_{0R}$ und verschiedene Foki $z_1 \neq 0$ der beiden gegenläufigen Pulse bekommen wir das Signal

$$S(z, z_1 \neq 0, \Delta\tau) \sim \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{z-z_1}{z_0}\right)^2} + \frac{4}{1 + \left(\frac{z-z_1/2}{z_0}\right)^2 + \frac{z_1^2}{4z_0^2}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{4}{\tau_L^2} \left(\frac{z - z_1/2}{c} - \frac{\Delta\tau}{2} \right)^2 \right]. \quad (6.379)$$

Überlappen sich die Pulse in keinem der Peaks, d. h.

$$\Delta\tau \gg \frac{z - z_1/2}{2}, \quad (6.380)$$

dann ergibt sich

$$S\left(z, z_1, \Delta\tau \gg \frac{z - z_1/2}{2}\right) \sim \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{z - z_1}{z_0}\right)^2}.$$

In diesem Fall sehen wir zwei identische Peaks etwa gleicher Höhe bei $z = 0$ und bei $z = z_1$. Da sich die Pulse nicht überlappen, handelt es sich um die Signale von laufenden Wellen. Es ist wichtig, daß unsere Beschreibung einheitlich für stehende und laufende Wellen gilt. Überlappen sich die Pulse bei $z = 0$, d. h. $\Delta\tau = -z_1/c$, und gilt außerdem $z_1 \gg z_0$ (z. B. $z_1 = 4z_0$), dann ergibt sich

$$\begin{aligned} S(z, z_1 = 4z_0, \Delta\tau = -z_1/c) \sim & \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{z - 4z_0}{z_0}\right)^2} + \\ & + \frac{4}{1 + \left(\frac{z - 2z_0}{z_0}\right)^2 + 4} \exp\left[-\frac{4z^2}{\tau_L^2 c^2}\right]. \end{aligned} \quad (6.381)$$

Bei $z = 0$ und bei $z = z_1$ finden wir bei einer Rayleighlänge von $z_0 = 18 \mu\text{m}$ und mit $\tau_L c = 30 \mu\text{m}$ das Verhältnis der beiden Peakhöhen

$$\frac{S(z = 0, z_1 = 4z_0, \Delta\tau = -z_1/c)}{S(z = z_1, z_1 = 4z_0, \Delta\tau = -z_1/c)} \approx 1.4. \quad (6.382)$$

3. Wenn beispielsweise die Intensität des von rechts kommenden Pulses doppelt so hoch ist wie die Intensität des von links kommenden Pulses ($I_L = 2I_R$), dann erhalten wir das Verhältnis

$$\frac{S(z = 0, z_1 = 4z_0, \Delta\tau = -z_1/c)}{S(z = z_1, z_1 = 4z_0, \Delta\tau = -z_1/c)} \approx 3.7. \quad (6.383)$$

D. h. Wir sehen einen deutlichen Unterschied der beiden Peakhöhen.

6.13 Laser Wake-Field

6.13.1 Laser-Plasma-Welle

Das Vektorpotential einer linear polarisierten ebenen Welle lautet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.384)$$

wobei

$$A_x \equiv -\frac{a_0 m c}{e} \sin \phi \quad (6.385)$$

und

$$\phi \equiv \omega t - k z \quad (6.386)$$

Die inhomogenen Maxwellgleichungen lassen sich als gekoppelte P-DGL's für die Potentiale A und ϕ schreiben

$$\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.387)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} - \nabla \left(\nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (6.388)$$

In der Coulomb-Eichung

$$\nabla \mathbf{A} = 0 \quad (6.389)$$

ergibt sich

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.390)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi - \mu_0 \mathbf{j} \quad (6.391)$$

Die Felder erhält man über

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6.392)$$

und

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.393)$$

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

An dieser Stelle ist es sinnvoll, die dimensionslosen Parameter

$$\mathbf{a} \equiv \frac{e\mathbf{A}}{mc} \quad (6.394)$$

$$\varphi \equiv \frac{e\Phi}{mc^2} \quad (6.395)$$

$$\tilde{\mathbf{p}} \equiv \frac{\mathbf{p}}{mc} \quad (6.396)$$

$$\tilde{n} \equiv \frac{n}{n_0} \quad (6.397)$$

einzuführen. Der relativistische Impuls

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad (6.398)$$

lautet nach der Normierung auf den Ruheimpuls

$$\tilde{\mathbf{p}} \equiv \gamma \boldsymbol{\beta} \quad (6.399)$$

wobei

$$\boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (6.400)$$

Mit (6.57) und

$$a_x = -a_0 \sin \phi \quad (6.401)$$

ergibt sich

$$\tilde{p}_x = a_x \quad (6.402)$$

Setzt man (6.42), (6.402) und

$$\tilde{p}_z = \gamma \beta_z \quad (6.403)$$

in (6.23) ein, so erhält man für den Lorentzfaktor

$$\gamma = \sqrt{\frac{1+a^2}{1-\beta_z^2}} \quad (6.404)$$

Setzt man die Stromdichte

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v} \quad (6.405)$$

in (6.390) und die Ladungsdichte

$$\rho = -e(n - n_0) \quad (6.406)$$

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

in (6.391) ein, so erhält man mit der Lichtgeschwindigkeit

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (6.407)$$

und der Wellenzahl des Plasmas

$$k_P \equiv \frac{\omega_P}{c} \quad (6.408)$$

für das PDGL-System

$$\left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{a} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{a} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + k_P^2 \tilde{n} \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{\gamma} \quad (6.409)$$

$$\left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = k_P^2 (\tilde{n} - 1) \quad (6.410)$$

mit der Plasmafrequenz

$$\omega_P^2 \equiv \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m} \quad (6.411)$$

Setzt man die Stromdichte

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (6.412)$$

in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (6.413)$$

ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{v}) = 0 \quad (6.414)$$

Setzt man noch (6.392) und (6.393) in die relativistische Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.415)$$

ein und benutzt

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (6.416)$$

so ergibt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \tilde{\mathbf{p}} = c \nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (6.417)$$

Die Transformation

$$(z, t) \rightarrow (\xi, \tau) \quad (6.418)$$

mit

$$\xi = z - v_g t \quad (6.419)$$

$$\tau = t \quad (6.420)$$

liefert

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (6.421)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - v_g \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (6.422)$$

Das transformierte P-DGL-System zur Beschreibung dreidimensionaler Plasmawellen lautet schließlich

$$\left(\Delta_{\perp} + \frac{2v_g}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\gamma_g^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \mathbf{a} = k_P^2 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla' \varphi + k_P^2 \tilde{n} \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{\gamma} \quad (6.423)$$

$$\left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \varphi = k_P^2 (\tilde{n} - 1) \quad (6.424)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v_g \frac{\partial}{\partial \xi} \right) n = -\nabla' (n\mathbf{v}) \quad (6.425)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v_g \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{v} \nabla' \right) \tilde{\mathbf{p}} = c \nabla' \varphi + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v_g \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \mathbf{a} - \dots \quad (6.426)$$

$$\dots - \mathbf{v} \times (\nabla' \times \mathbf{a}) \quad (6.427)$$

wobei

$$\gamma_g \equiv (1 - \beta_g)^{-1/2} \quad (6.428)$$

$$\beta_g \equiv \frac{v_g}{c} \quad (6.429)$$

und

$$\nabla' \equiv \begin{pmatrix} \nabla_{\perp} \\ \partial/\partial \xi \end{pmatrix} \quad (6.430)$$

6.13.2 Approximation

Zur Vereinfachung dieses komplizierten P-DGL-Systems kann man folgende Näherungen machen:

- $\nabla' \varphi \simeq 0$ in (6.423)

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

- $\Delta_{\perp} \simeq 0$, $\nabla_{\perp} \simeq 0$ in (6.423), (6.424), (6.425) und (6.426)
- QSA (Quasi-Static Approximation), $\partial/\partial\tau \simeq 0$ in (6.424), (6.425) und (6.426)
- 1-D-Approximation, longitudinal in (6.425) und (6.426), transversal in (6.423)

In dieser Näherung ergibt sich das vereinfachte P-DGL-System

$$\left(\frac{2v_g}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\tau} + \frac{1}{\gamma_g^2} \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \right) \mathbf{a} = k_P^2 \tilde{n} \frac{\mathbf{a}}{\gamma} \quad (6.431)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial\xi^2} = k_P^2 (\tilde{n} - 1) \quad (6.432)$$

$$-v_g \frac{\partial n}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi} (nv_z) = 0 \quad (6.433)$$

$$\left(-v_g \frac{\partial}{\partial\xi} + v_z \frac{\partial}{\partial\xi} \right) \tilde{p}_z = c \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - v_x \frac{\partial a_x}{\partial\xi} \quad (6.434)$$

Verwendet man die normierten Geschwindigkeiten (6.400) und (6.429) und setzt (6.402) sowie (6.404) in (6.434) ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\frac{\partial}{\partial\xi} [n(\beta_z - \beta_g)] = 0 \quad (6.435)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi} [\gamma(1 - \beta_g\beta_z) - \varphi] = 0 \quad (6.436)$$

Integration dieser Gleichungen mit den Anfangsbedingungen

$$n(0) \doteq n_0 \quad (6.437)$$

$$\beta_z(0) \doteq 0 \quad (6.438)$$

$$\varphi(0) \doteq 0 \quad (6.439)$$

liefert das Gleichungssystem

$$n(\beta_z - \beta_g) = n_0\beta_g \quad (6.440)$$

$$\gamma(1 - \beta_g\beta_z) - \varphi = 1 \quad (6.441)$$

mit den Lösungen

$$\tilde{n} = \gamma_g^2 \beta_g \left[(1 - \gamma_g^{-2} \psi^{-2})^{-1/2} - \beta_g \right] \quad (6.442)$$

$$\beta_z = \frac{\beta_g - (1 - \gamma_g^{-2} \psi^{-2})^{1/2}}{1 - \beta_g (1 - \gamma_g^{-2} \psi^{-2})^{1/2}} \quad (6.443)$$

wobei

$$\psi^2 \equiv \frac{(1 + \varphi)^2}{1 + a^2} \quad (6.444)$$

Aus (6.431) und (6.432) ergibt sich schließlich das approximierte gekoppelte P-DGL-System

$$\left(\frac{2\beta_g}{c} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\gamma_g^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \mathbf{a} = \frac{k_P^2}{1 + \varphi} \left(1 + \frac{1}{k_P^2 \gamma_g^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right) \mathbf{a} \quad (6.445)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = k_P^2 \gamma_g^2 \left[\frac{\beta_g}{\sqrt{1 - \frac{1+a^2}{\gamma_g^2 (1+\varphi)^2}}} - 1 \right] \quad (6.446)$$

6.13.3 Numerische Lösung

In der QSA läßt sich das gekoppelte P-DGL-System iterativ lösen. Schreibt man einen gaußförmigen Laserpuls

$$a(z, t) = a_0 \exp \left[- \left(\frac{t - z/v_g}{\tau_{G0}} \right)^2 \right] \quad (6.447)$$

auf die dimensionslosen Variablen

$$\chi \equiv k_P v_g (t - z/v_g) \quad (6.448)$$

$$\sigma \equiv k_P v_g \tau_{G0} \quad (6.449)$$

um, so ergibt sich

$$a(\chi) = a_0 \exp \left[- \left(\frac{\chi}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (6.450)$$

Mit der Beziehung

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = k_P^2 \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \quad (6.451)$$

lautet die Poissongleichung schließlich

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \chi^2} = \gamma_g^2 \left[\frac{\beta_g}{\sqrt{1 - \frac{1+a^2}{\gamma_g^2 (1+\varphi)^2}}} - 1 \right] \quad (6.452)$$

wobei

$$\beta_g \equiv \sqrt{1 - \gamma_g^{-2}} \quad (6.453)$$

Löst man (6.452) numerisch, so erhält man das Potential sowie die z-Komponente des elektrischen Feldes

$$\varphi(\chi) \Rightarrow E_z(\chi) = -\frac{\partial\varphi}{\partial\chi} \quad (6.454)$$

Die Elektronendichteveriation berechnet man über

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{n - n_0}{n_0} = \tilde{n} - 1 \quad (6.455)$$

D. h. Ein Laserpuls, der sich durch ein Plasma bewegt, kann er über sein zeitliches Profil

$$a(\chi) = a_0 \exp \left[-\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2 \right]$$

und der damit verbundenen ponderomotorischen Kraft eine Plasmawelle anregen. Die dimensionslosen Parameter lauten $\chi = k_p v_g (t - z/v_g)$ und $\sigma = k_p v_g \tau_{g0}$, wobei $k_p = \omega_p/c$ die Wellenzahl des Plasmas ist. Es entsteht eine Dichteoszillation (Wake-Field), die mit einem longitudinalen elektrischen Feld verbunden ist. Ab einer bestimmten Feldstärke wird die Oszillationsamplitude so hoch, daß die Plasmawelle bricht. Die Elektronen surfen auf der brechenden Plasmawelle und werden in longitudinale Richtung beschleunigt. Das Potential ist durch die Poissongleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \chi^2} = \gamma_g^2 \left[\frac{\sqrt{1 - \gamma_g^{-2}}}{\sqrt{1 - \frac{1+a^2}{\gamma_g^2(1+\varphi)^2}}} - 1 \right]$$

gegeben. Das Potential liefert das longitudinale elektrische Feld $E_z(\chi) = -\partial\varphi/\partial\chi$. Die Elektronendichteveriation kann man über $\Delta n/n_0 = (n - n_0)/n_0 = \tilde{n} - 1$ berechnen, wobei

$$\tilde{n} = \gamma_g^2 \beta_g \left[(1 - \gamma_g^{-2} \psi^{-2})^{-1/2} - \beta_g \right]$$

ist. Die Abbildungen (6.18, 6.19) zeigt das Potential der lasergetriebenen Plasmawelle für zwei verschiedene Intensitäten. Sowohl die Amplitude als auch die Periode der Plasmawelle werden bei höherer Intensität größer. Die Abbildungen (6.18) und (6.19) zeigen das longitudinale elektrische Feld und die Elektronendichteveriation für verschiedene Intensitäten. Für höhere Intensitäten verläuft das longitudinale elektrische Feld stufenförmig bis schließlich Wellenbrechen (Wave-Breaking) einsetzt. Die Elektronen können

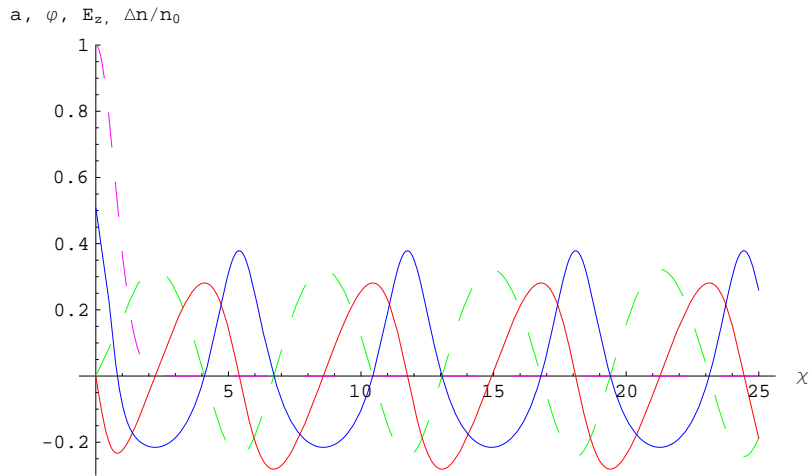


Abbildung 6.18: Laserpuls (violett), Potential der Plasmawelle (grün), longitudinale Komponente des elektrischen Feldes (rot) und Elektronendichteveria- tion (blau) für $a_0 = 1$ für die Parameter $\gamma_g = 10$; $\sigma = 1$.

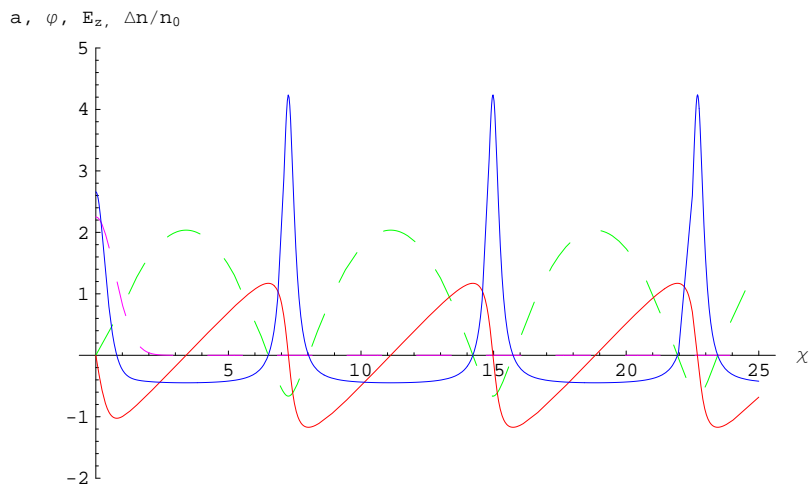


Abbildung 6.19: Laserpuls (violett), Potential der Plasmawelle (grün), longitudinale Komponente des elektrischen Feldes (rot) und Elektronendichteveria- tion (blau) für $a_0 = 1.5$ für die Parameter $\gamma_g = 10$; $\sigma = 1$.

in longitudinale Richtung beschleunigt werden.

6.14 Relativistische Bewegungsgleichungen

Stellt man (6.23) folgendermaßen um

$$\mathbf{p}^2 = (mc)^2 (\gamma^2 - 1) \quad (6.456)$$

berechnet davon die zeitliche Ableitung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}^2 = 2\mathbf{p} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (6.457)$$

und setzt (6.20) ein, so erhält man

$$\frac{d}{dt} (\gamma mc)^2 = 2\mathbf{p} [-e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] \quad (6.458)$$

$$\Leftrightarrow (mc)^2 \gamma \frac{d\gamma}{dt} = -e\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} - e\mathbf{p} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.459)$$

$$= -e\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} - e\mathbf{B} (\mathbf{p} \times \mathbf{v}) \quad (6.460)$$

Da der Impuls nach (6.22) parallel zur Geschwindigkeit ist, entfällt der zweite Summand, und es ergibt sich für die Leistungsbilanz

$$(mc)^2 \gamma \frac{d\gamma}{dt} = -e\gamma m\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad (6.461)$$

$$\Leftrightarrow mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = -e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad (6.462)$$

6.15 Lösung der paraxialen Wellengleichung

Führt man den radialen Abstand

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (6.463)$$

ein, so erhält man für die Amplitude

$$\bar{A}(x, y, z) = \bar{A}(r, z) \quad (6.464)$$

Bildet man die erste und zweite Ableitung der Amplitude nach x

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \frac{x}{r} \quad (6.465)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r}\right) \quad (6.466)$$

$$= \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \left[\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right] \quad (6.467)$$

so folgt

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} \frac{(x^2 + y^2)}{r^2} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \left[\frac{2}{r} - \frac{(x^2 + y^2)}{r^3}\right] \quad (6.468)$$

$$= \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{r}\right] \quad (6.469)$$

$$= \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \quad (6.470)$$

Nach dieser Transformation lautet die paraxiale Wellengleichung (6.198)

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial z} \pm i \frac{1}{2k} \left(\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \right) = 0 \quad (6.471)$$

Wählt man eine gaußförmige Amplitude

$$\bar{A}(r, z) = \frac{E_0 W_0}{W} \exp\left(-\frac{r^2}{W^2} - \frac{ikr^2}{2R} + i\varphi\right) \quad (6.472)$$

mit den Randbedingungen

$$W(0) \doteq W_0 \quad (6.473)$$

$$R(0) \doteq \infty \quad (6.474)$$

$$g \equiv 1/R \quad (6.475)$$

$$\Rightarrow g(0) \doteq 0 \quad (6.476)$$

$$\varphi(0) \doteq 0 \quad (6.477)$$

so ergibt sich im Fokus

$$\bar{A}(r, 0) = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{W_0^2}\right) \quad (6.478)$$

Die Ableitung nach z ergibt

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial z} = -\frac{E_0 W_0}{W^2} \frac{dW}{dz} \exp(\dots) + \frac{E_0 W_0}{W} \exp(\dots) \left[\frac{2r^2}{W^3} \frac{dW}{dz} - \frac{ikr^2}{2} \frac{dg}{dz} + i \frac{d\varphi}{dz} \right] \quad (6.479)$$

Mit der Ableitung nach r

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial r} = \frac{E_0 W_0}{W} \exp(\dots) \left[-\frac{2r}{W^2} - igkr \right] \quad (6.480)$$

und der zweiten Ableitung

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} = \frac{E_0 W_0}{W} \exp(\dots) \left[-\frac{2}{W^2} - igk + r^2 \left(\frac{2}{W^2} + igk \right)^2 \right] \quad (6.481)$$

folgt

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} = \frac{E_0 W_0}{W} \exp(\dots) \left[-2 \left(\frac{2}{W^2} + igk \right) + r^2 \left(\frac{2}{W^2} + igk \right)^2 \right] \quad (6.482)$$

Setzt man dies in (6.471) ein, so ergibt sich

$$-\frac{1}{W} \frac{dW}{dz} \mp i \frac{d\varphi}{dz} - \frac{i}{k} \left(\frac{2}{W^2} + igk \right) = 0 \quad (6.483)$$

$$\frac{2}{W^2} \frac{dW}{dz} - \frac{ik}{2} \frac{dg}{dz} \pm i \frac{1}{2k} \left(\frac{2}{W^2} + igk \right)^2 = 0 \quad (6.484)$$

und unter Berücksichtigung von Real- und Imaginärteil

$$g = \pm \frac{1}{W} \frac{dW}{dz} \quad (6.485)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \pm \frac{2}{kW^2} \quad (6.486)$$

$$\frac{dW}{dz} = \pm gW \quad (6.487)$$

$$\frac{dg}{dz} = \pm \left(\frac{4}{k^2 W^4} - g^2 \right) \quad (6.488)$$

Quadriert man (6.485)

$$g^2 = \frac{1}{W^2} \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 \quad (6.489)$$

und setzt dies und die Ableitung

$$\frac{dg}{dz} = \mp \frac{1}{W^2} \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 \pm \frac{1}{W} \frac{d^2W}{dz^2} \quad (6.490)$$

in (6.488) ein, so erhält man

$$\frac{d^2W}{dz^2} = \frac{4}{k^2 W^3} \quad (6.491)$$

Die Lösung dieser DGL lautet

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2} \quad (6.492)$$

wobei

$$z_0 \equiv \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \quad (6.493)$$

Setzt man dies in (6.485) ein, so ergibt sich

$$g(z) = \pm \frac{1}{z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right)} \quad (6.494)$$

und damit

$$R(z) = \pm z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right) \quad (6.495)$$

Integration von (6.486) liefert

$$\varphi(z) = \pm \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (6.496)$$

Mit (6.189) und (6.191) ergibt sich schließlich

$$E^\pm(r, t) = \bar{A}(r, z) \exp [i(\omega t \mp kz)] \quad (6.497)$$

wobei

$$\bar{A}(r, z) = \frac{E_0 W_0}{W} \exp \left(-\frac{r^2}{W^2} \mp \frac{ikr^2}{2|R|} \pm i|\varphi| \right) \quad (6.498)$$

6.16 Lösung der parabolischen Wellengleichung

Die allgemeine Definition für eine eindimensionale Fouriertransformation lautet

$$\mathcal{F}[f(t)] \equiv \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(ib\omega t) dt \quad (6.499)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \equiv \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1+a}}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(-ib\omega t) d\omega \quad (6.500)$$

wobei in allen weiteren Formeln

$$(a, b) \rightarrow (-1, 1) \quad (6.501)$$

verwendet wird. Die Fouriertransformation des Ortsfrequenzspektrums liefert

$$u(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{F}[U(\alpha, \beta, z)] \quad (6.502)$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, \beta, \omega, z) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \quad (6.503)$$

wobei

$$\alpha \equiv k_x, \beta \equiv k_y, \gamma \equiv k_z \quad (6.504)$$

Inverse Fouriertransformation von (6.503) liefert schließlich das Feld

$$u(\mathbf{r}, t) = \mathcal{F}^{-1}[u(\mathbf{r}, \omega)] \quad (6.505)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, \beta, \omega, z) \exp[-i(\alpha x + \beta y - \omega t)] d\alpha d\beta d\omega \quad (6.506)$$

Setzt man dies in (6.258) ein, so folgt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(\omega) - \alpha^2 - \beta^2 \right) U(\alpha, \beta, \omega, z) = 0 \quad (6.507)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma^2(\alpha, \beta, \omega) \right) U(\alpha, \beta, \omega, z) = 0 \quad (6.508)$$

mit der Lösung

$$U^{\pm}(\alpha, \beta, \omega, z) = \exp[\mp i\gamma(\alpha, \beta, \omega)z] U_0(\alpha, \beta, \omega) \quad (6.509)$$

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Die Übertragungsfunktion ist über

$$U^\pm(\alpha, \beta, \omega, z) = H^\pm(\alpha, \beta, \omega, z) U_0(\alpha, \beta, \omega) \quad (6.510)$$

definiert. Es gilt also

$$H^\pm(\alpha, \beta, \omega, z) \equiv \exp[\mp i \gamma(\alpha, \beta, \omega) z] \quad (6.511)$$

In Fresnelscher Näherung

$$k^2(\omega) \gg \alpha^2 + \beta^2 \quad (6.512)$$

kann man den Parameter

$$\gamma(\alpha, \beta, \omega) = \sqrt{k^2(\omega) - \alpha^2 - \beta^2} \quad (6.513)$$

in eine Potenzreihe

$$\gamma \approx k(\omega) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k(\omega)} \quad (6.514)$$

entwickeln. Die Übertragungsfunktion für Pulse in Fresnelscher Näherung lautet somit

$$H_{FP}^\pm(\alpha, \beta, \omega, z) = \exp[\mp i k(\omega) z] \exp\left[\pm i \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k(\omega)} z\right] \quad (6.515)$$

Entwickelt man die Wellenzahl in eine Taylorreihe

$$k(\omega) = k(\omega)|_{\omega_0} + \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \mathcal{O}^3(\omega) \quad (6.516)$$

$$= k_0 + v_g^{-1} \bar{\omega} + \frac{1}{2} D \bar{\omega}^2 + \mathcal{O}^3(\omega) \quad (6.517)$$

wobei

$$\bar{\omega} \equiv \omega - \omega_0 \quad (6.518)$$

$$k_0 \equiv k(\omega)|_{\omega_0} \quad (6.519)$$

$$v_g^{-1} \equiv \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \quad (6.520)$$

$$D \equiv \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} \quad (6.521)$$

und setzt dies in (6.515) ein, so ergibt sich

$$H_{FP}^\pm(\alpha, \beta, \omega, z) = \exp(\mp i k_0 z) \bar{H}^\pm(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) \quad (6.522)$$

wobei

$$\bar{H}_{FP}^{\pm}(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) \equiv \exp \left[iz \left(\mp \frac{\bar{\omega}}{v_g} \mp \frac{D}{2} \bar{\omega}^2 \pm \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k_0} \right) \right] \quad (6.523)$$

Setzt man

$$U^{\pm}(\alpha, \beta, \omega, z) \approx \exp(\mp ik_0 z) \bar{H}_{FP}^{\pm}(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) U_0(\alpha, \beta, \omega) \quad (6.524)$$

in (6.503) ein, so lautet das Feld

$$u^{\pm}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} U^{\pm}(\alpha, \beta, \omega, z) \exp[-i(\alpha x + \beta y - \omega t)] d\alpha d\beta d\omega \quad (6.525)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{FP}^{\pm}(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) U_0(\alpha, \beta, \omega) \exp[-i(\alpha x + \beta y - \bar{\omega} t)] d\alpha d\beta d\bar{\omega} \times \dots \\ &\dots \times \exp[i(\omega_0 t \mp k_0 z)] \end{aligned} \quad (6.526)$$

Definiert man die langsam variierende Amplitude über

$$u^{\pm}(\mathbf{r}, t) = v^{\pm}(\mathbf{r}, t) \exp[i(\omega_0 t \mp k_0 z)] \quad (6.527)$$

und ersetzt das Spektrum des Anfangsfeldes $U_0(\alpha, \beta, \omega)$ durch das langsam variierende Spektrum $V_0(\alpha, \beta, \bar{\omega})$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} v^{\pm}(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_{FP}^{\pm}(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) V_0(\alpha, \beta, \bar{\omega}) \times \dots \\ &\dots \times \exp[-i(\alpha x + \beta y - \bar{\omega} t)] d\alpha d\beta d\bar{\omega} \end{aligned} \quad (6.528)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_{FP}^{\pm}(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) V_0(\alpha, \beta, \bar{\omega}) \times \dots \\ &\dots \times \exp[-i(\alpha x + \beta y - \bar{\omega} \eta^{\pm})] d\alpha d\beta d\bar{\omega} \end{aligned} \quad (6.529)$$

wobei

$$\eta^{\pm} \equiv t \mp \frac{z}{v_g} \quad (6.530)$$

und

$$\tilde{H}_{FP}^{\pm}(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) \equiv \bar{H}_{FP}^{\pm}(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) \exp\left(\pm i\bar{\omega} \frac{z}{v_g}\right) \quad (6.531)$$

Für die langsam variierende Amplitude in dem transformierten System, daß sich mit der Gruppengeschwindigkeit v_g bewegt, erhält man schließlich

$$\begin{aligned} v^{\pm}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} V_0(\alpha, \beta, \bar{\omega}) \exp \left[i\frac{z}{2} \left(\mp D\bar{\omega}^2 \pm \frac{\alpha^2 + \beta^2}{k_0} \right) \right] \times \dots \\ &\dots \times \exp[-i(\alpha x + \beta y - \bar{\omega} \eta^{\pm})] d\alpha d\beta d\bar{\omega} \end{aligned} \quad (6.532)$$

Daraus ergibt sich das Spektrum der langsam variierenden Amplitude

$$V(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) = \frac{1}{2\pi} V_0(\alpha, \beta, \bar{\omega}) \exp \left[i \frac{z}{2} \left(\mp D \bar{\omega}^2 \pm \frac{\alpha^2 + \beta^2}{k_0} \right) \right] \quad (6.533)$$

Differenziation ergibt

$$i \frac{\partial V(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z)}{\partial z} = -\frac{1}{2} \left(\mp D \bar{\omega}^2 \pm \frac{\alpha^2 + \beta^2}{k_0} \right) V(\alpha, \beta, \bar{\omega}, z) \quad (6.534)$$

und Fouriertransformation liefert

$$\left(i \frac{\partial}{\partial z} \pm \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \mp \frac{1}{2k_0} \Delta^{(2d)} \right) v(\mathbf{r}, \eta) = 0 \quad (6.535)$$

Vernachlässigt man in (6.534) die transversalen Ortsfrequenzen, so folgt

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \pm i \frac{D}{2} \bar{\omega}^2 \right) V(\bar{\omega}, z) = 0 \quad (6.536)$$

Vernachlässigt man in (6.535) die transversale Richtungsabhängigkeit, so ergibt sich schließlich die parabolische Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \mp i \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) v(\eta, z) = 0 \quad (6.537)$$

Die Lösung von (6.536) lautet

$$V^\pm(\bar{\omega}, z) = V_0 \exp \left(\mp i \frac{D}{2} \bar{\omega}^2 z \right) \quad (6.538)$$

wobei

$$V_0 \equiv V(\bar{\omega}, z = 0) \quad (6.539)$$

Für die zeitliche Einhüllende eines Gaußpulses mit linearem Chirp gilt

$$v(t) = v_0 \exp \left[-(1 + ia) \left(\frac{t}{\tau_{G0}} \right)^2 \right] \quad (6.540)$$

mit der Pulsdauer

$$\tau_P = \sqrt{2 \ln 2} \tau_{G0} \quad (6.541)$$

6 Anhang: Mathematische Herleitung der theoretische Grundlagen

Die Fouriertransformierte von (6.540) lautet

$$V(\bar{\omega}) = \frac{v_0 \sqrt{\pi} \tau_{G0}}{(1+a^2)^{1/4}} \exp \left[i\Phi - \frac{\bar{\omega}^2 \tau_{G0}^2}{4(1+a^2)} \right] \quad (6.542)$$

wobei

$$\Phi(\bar{\omega}) \equiv -\frac{1}{2} \arctan(a) + \frac{a\tau_{G0}^2}{4(1+a^2)} \bar{\omega}^2 \quad (6.543)$$

Setzt man (6.542) in (6.538) ein, so erhält man das z -abhängige Spektrum

$$V^\pm(\bar{\omega}, z) = A_0 \exp(-x\bar{\omega}^2) \exp[iy^\pm(z)\bar{\omega}^2] \quad (6.544)$$

wobei

$$x \equiv \frac{\tau_{G0}^2}{4(1+a^2)} \quad (6.545)$$

$$y^\pm(z) \equiv \frac{a\tau_{G0}^2}{4(1+a^2)} \mp \frac{D}{2} z \quad (6.546)$$

$$A_0 \equiv \frac{v_0 \sqrt{\pi} \tau_{G0}}{(1+a^2)^{1/4}} \exp \left[-\frac{i}{2} \arctan(a) \right] \quad (6.547)$$

Die inverse Fouriertransformation von (6.544) liefert

$$v^\pm(\eta^\pm, z) = v_0 \exp \left[-\left(1 + i \frac{y^\pm(z)}{x} \right) \left(\frac{\eta^\pm}{\tau_G^\pm(z)} \right)^2 \right] \quad (6.548)$$

Referenzen zum theoretischen Anhang

Kap. 6.1, 6.2	[22, 20, 42, 21, 43]
Kap. 6.3, 6.4, 6.5	[44, 27, 4, 42]
Kap. 6.6, 6.7, 6.9, 6.10, 6.15, 6.16	[25, 45, 26, 46, 47, 48]
Kap. 6.8, 6.11	[39, 38]
Kap. 6.12	[23, 49]
Kap. 6.13	[50, 20, 24, 34, 51, 52, 53]

Abbildungsverzeichnis

1.1	Zweistrahlexperiment	7
2.1	Geschwindigkeit eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (laufende Welle, Laborsystem)	16
2.2	Relativistische Bahnkurve eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (laufende Welle, Laborsystem)	17
2.3	Relativistische Bahnkurve eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (laufende Welle, lorentztransformiertes System, in dem der mittlere Impuls in Ausbreitungsrichtung des Lasers verschwindet)	19
2.4	Geschwindigkeit eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (stehende Welle, Laborsystem)	22
2.5	Bahnkurve und Lorentzfaktor eines freien Elektrons im intensiven Laserfeld (stehende Welle, Laborsystem)	23
2.6	Longitudinales und transversales Intensitätsprofil eines einzelnen Laserpulses	27
2.7	Stehendes Laserfeld	29
2.8	Intensität eines stehenden Laserfeldes	30
2.9	Exakter Lorentzfaktor und Lorentzfaktor in Störungstheorie	36
2.10	Exakte Beschleunigung und Beschleunigung in erster Ordnung Störungstheorie im Vergleich	37
2.11	Klassische Dispersionsrelation des Plasmas	44
2.12	Ponderomotorische Kraft und ponderomotorisches Potential	47
2.13	Quasi-statisches elektrisches Feld im ponderomotorischen Potential	49
2.14	Elektronendichteverteilung bei der ponderomotorischen Selbstfokussierung	51
2.15	Lasergetriebene Plasmawelle bei relativ niedrigerer Laserintensität	57
2.16	Lasergetriebene Plasmawelle bei relativ hoher Laserintensität	57
3.1	Jenaer Lasersystem	60

Abbildungsverzeichnis

3.2	Eingebauter Faraday-Isolator	64
3.3	Zurücklaufender Laserpuls	66
3.4	Experimenteller Aufbau	68
3.5	Strahlteiler, Parabolspiegel und Gasdüse	69
3.6	Fokussier- und Überlappdiagnostik	71
3.7	Fokussier- und Überlappobjektive	72
4.1	Fokussierung der beiden Foki.	76
4.2	Intensitäten der Foki	78
4.3	Klassische Autokorrelation dritter Ordnung	82
4.4	Hohe Gasdichten	86
4.5	Niedrige Gasdichte	87
4.6	Fokussierung eines Laserpulses in einen Helium-Gasstrahl	89
4.7	Überlappbild	91
4.8	2ω -Selbstemission eines Laserpulses	94
4.9	Schattenbilder des Überlapps	97
4.10	2ω -Schattenbild und 2ω -Selbstemission des Überlapps	98
4.11	Durchdringung zweier gegenläufiger Laserpulse 1/2	100
4.12	Durchdringung zweier gegenläufiger Laserpulse 2/2	101
4.13	Schattenbilder der Strahlteilerverschiebung	102
4.14	2ω -Selbstemission und Selbstfokussierung zweier gegenläufiger Laserpulse	103
4.15	2ω -Signal bei niedriger Elektronendichte	104
4.16	Überlapp der beiden gegenläufigen Laserpulse	106
4.17	Überlapp der Foki der beiden gegenläufigen Laserpulse	108
4.18	Mehrschuß-Autokorrelationssignal bei relativistischer Intensität	109
4.19	Relativistische Autokorrelation	111
4.20	Meßprinzip der relativistischen Autokorrelation	112
4.21	2ω -Signal zweier gegenläufiger Laserpulse mit überlappenden Foki	114
4.22	2ω -Signal für zwei gegenläufige Laserpulse mit nichtüberlappenden Foki	115
5.1	Lasererzeugte Compton-Rückstreuung	118
5.2	Lasererzeugte Paarbildung aus einem idealen Vakuum?	120
6.1	Anhang: Transversale und longitudinale Geschwindigkeiten eines Elektrons in einer ebenen Welle im Laborsystem	127
6.2	Anhang: Relativistische Bahnkurve eines Elektrons im Laborsystem.	129
6.3	Anhang: Relativistische Bewegung eines Elektrons im mittleren Ruhesystem	131

6.4	Anhang: Stehendes elektrisches und magnetisches Feld als Überlagerung ebener Wellen	132
6.5	Anhang: Transversale Geschwindigkeit eines relativistischen Elektrons in einer stehenden Welle	135
6.6	Anhang: Longitudinale Geschwindigkeit eines relativistischen Elektrons in einer stehenden Welle	135
6.7	Anhang: Bahnkurve eines relativistischen Elektrons in einer stehenden Welle	136
6.8	Anhang: Ponderomotorische Kraft und ponderomotorisches Potential . . .	142
6.9	Anhang: Normierte Elektronendichte und statisches elektrisches Feld . . .	145
6.10	Anhang: Intensität eines einzelnen Gauß'schen Strahles	148
6.11	Anhang: Schnitt durch Abbildung 6.10	149
6.12	Anhang: Intensität zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen	150
6.13	Anhang: Stehendes elektrisches und magnetisches Feld als Überlagerung zweier gegenläufiger Gauß'scher Strahlen auf der optischen Achse	153
6.14	Anhang: Elektrisches Feld und Magnetfeld zweier gegenläufiger Gaußstrahlen in der Nähe des Fokus	156
6.15	Anhang: Intensität eines nach rechts und eines nach links laufenden Gauß'schen Pulses ohne Chirp	160
6.16	Anhang: Intensität zweier gegenläufiger Gauß'scher Pulse ohne Chirp . . .	161
6.17	Anhang: Intensität zweier gegenläufiger Gauß'scher Pulse mit Chirp . . .	161
6.18	Anhang: Lasergetriebene Plasmawelle bei relativ niedriger Intensität . . .	184
6.19	Anhang: Lasergetriebene Plasmawelle bei relativ hoher Intensität	184

Literaturverzeichnis

- [1] EICHLER, J. und H. J. EICHLER: *Laser: Bauformen, Strahlführung, Anwendungen*. Springer, Berlin, 4. Auflage, 2002.
- [2] MILONI, P. W. und J. H. EBERLY: *Lasers*. Wiley & Sons, New York, 1988.
- [3] STRICKLAND, D. und G. MOUROU: *Compression of amplified chirped optical pulses*. Optics Communications, 56(3):219–221, 1985.
- [4] GAHN, C.: *Erzeugung relativistischer Elektronen durch Propagation hochintensiver Laserpulse in einem Plasma*. Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 2000.
- [5] EWALD, F., H. SCHWOERER, S. DUSTERER, R. SAUERBREY, J. MAGILL, J. GALY, R. SCHENKEL, S. KARSCH, D. HABS und K. WITTE: *Application of relativistic laser plasmas for the study of nuclear reactions*. Plasma Physics and Controlled Fusion, 45:A83–A91, 2003.
- [6] LEDINGHAM, K. W. D., I. SPENCER, T. MCCANNY, R. P. SINGHAL, M. I. K. SANTALA, E. CLARK, I. WATTS, F. N. BEG, M. ZEPF, K. KRUSHELNICK, M. TATARAKIS, A. E. DANGOR, PA NORREYS, R. ALLOTT, D. NEELY, R. J. CLARK, A. C. MACHACEK, J. S. WARK, A. J. CRESSWELL, D. C. W. SANDERSON und J. MAGILL: *Photonuclear physics when a multiterawatt laser pulse interacts with solid targets*. Physical Review Letters, 84(5):899–902, 2000.
- [7] LIESFELD, B., K.-U. AMTHOR, F. EWALD, H. SCHWOERER, J. MAGILL, J. GALY, G. LANDER und R. SAUERBREY: *Nuclear reactions triggered by laser-accelerated relativistic electron jets*. Applied Physics B, 2004.
- [8] MAGILL, J., H. SCHWOERER, F. EWALD, J. GALY, R. SCHENKEL und R. SAUERBREY: *Laser transmutation of iodine-129*. Applied Physics B - Lasers and Optics, 77(4):387–390, 2003.

- [9] FAURE, J., Y. GLINEC, A. PUKHOV, S. KISELEV, S. GORDIENKO, E. LEFEBVRE, J. P. ROUSSEAU, F. BURGY und V. MALKA: *A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams*. Nature, 431(7008):541–544, 2004.
- [10] GEDDES, C. G. R., C. TOTH, J. VAN TILBORG, E. ESAREY, C. B. SCHROEDER, D. BRUHWILDER, C. NIETER, J. CARY und W. P. LEEMANS: *High-quality electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding*. Nature, 431(7008):538–541, 2004.
- [11] MANGLES, S. P. D., C. D. MURPHY, Z. NAJMUDIN, A. G. R. THOMAS, J. L. COLLIER, A. E. DANGOR, E. J. DIVALL, P. S. FOSTER, J. G. GALLACHER, C. J. HOOKER, D. A. JAROSZYNSKI, A. J. LANGLEY, W. B. MORI, P. A. NORREYS, F. S. TSUNG, R. VISKUP, B. R. WALTON und K. KRUSHELNICK: *Monoenergetic beams of relativistic electrons from intense laser-plasma interactions*. Nature, 431(7008):535–538, 2004.
- [12] KALUZA, M., J. SCHREIBER, M. I. K. SANTALA, G. D. TSAKIRIS, K. EIDMANN, MEYER TER VEHN und K. J. WITTE: *Influence of the laser prepulse on proton acceleration in thin-foil experiments*. Physical Review Letters, 93(4), 2004.
- [13] ROTH, M., A. BLAZEVIC, M. GEISSEL, T. SCHLEGEL, T. E. COWAN, M. ALLEN, J. C. GAUTHIER, P. AUDEBERT, J. FUCHS, J. MEYER-TER VEHN, M. HEGELICH, S. KARSCH und A. PUKHOV: *Energetic ions generated by laser pulses: A detailed study on target properties*. Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams, 5(6):061301, 2002.
- [14] SCHWOERER, H., P. GIBBON, S. DUSTERER, R. BEHRENS, C. ZIENER, C. REICH und R. SAUERBREY: *MeV X rays and photoneutrons from femtosecond laser-produced plasmas*. Physical Review Letters, 86(11):2317–2320, 2001.
- [15] COWAN, T. E., A. W. HUNT, T. W. PHILLIPS, S. C. WILKS, M. D. PERRY, C. BROWN, W. FOUNTAIN, S. HATCHETT, J. JOHNSON, M. H. KEY, T. PARNELL, D. M. PENNINGTON, R. A. SNAVELY und Y. TAKAHASHI: *Photonuclear fission from high energy electrons from ultraintense laser-solid interactions*. Physical Review Letters, 84(5):903–906, 2000.
- [16] CHEN, S. Y., A. MAKSIMCHUK und D. UMSTADTER: *Experimental observation of relativistic nonlinear Thomson scattering*. Nature, 396(6712):653–655, 1998.
- [17] LAU, Y. Y., F. HE, D. P. UMSTADTER und R. KOWALCZYK: *Nonlinear Thomson scattering: A tutorial*. Physics of Plasmas, 10(5):2155–2162, 2003.

Literaturverzeichnis

- [18] FEURER, T. und R. SAUERBREY: *Characterization of short laser pulses*, Band 29C der Reihe *Experimental methods in the physical sciences. Atomic, Molecular, and Optical Physics: Electromagnetic Radiation*. Academic Press, San Diego, 1997.
- [19] LIESFELD, B., J. BERNHARDT, K. U. AMTHOR, H. SCHWOERER und R. SAUERBREY: *Single-shot autocorrelation at relativistic intensities*. To be published.
- [20] JACKSON, J. D.: *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, 3rd Auflage, 1998.
- [21] NOLTING, W.: *Grundkurs: Theoretische Physik 4: Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik*. Zimmermann-Neufang, Ulmen, 2nd Auflage, 1993.
- [22] SARACHIK, E. S. und G. T. SCHAPPERT: *Classical Theory Of Scattering Of Intense Laser Radiation By Free Electrons*. Physical Review D, 1(10):2738–2753, 1970.
- [23] DEMTRÖDER: *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. Springer, Berlin, 2. Auflage, 1999.
- [24] VEHN, J. MEYER-TER und A. PUKHOV: *Relativistic laser plasma interaction: I. Analytical tools*. Institut für Theoretische Physik I, Heinrich Heine Universität Düsseldorf.
- [25] DIELS, J. und W. RUDOLPH: *Ultrashort Laser Pulse Phenomena*. Academic Press, San Diego, 1996.
- [26] LEDERER, F.: *Vorlesung über Theoretische Optik*. Friedrich Schiller Universität Jena.
- [27] SAUERBREY, R.: *Vorlesung über Physik bei hohen Laserintensitäten*. Friedrich Schiller Universität Jena.
- [28] SAUERBREY, R.: *Vorlesung über Nichtlineare Optik*. Friedrich Schiller Universität Jena.
- [29] MODENA, A., Z. NAJMUDIN, A. E. DANGOR, C. E. CLAYTON, K. A. MARSH, C. JOSHI, V. MALKA, C. B. DARROW, C. DANSON, D. NEELY und F. N. WALSH: *Electron acceleration from the breaking of relativistic plasma-waves*. Nature, 377(6550):606–608, 1995.
- [30] HUTCHINSON, I. H.: *Principles of plasma diagnostics*. Cambridge University Press, 1987.

Literaturverzeichnis

- [31] AMTHOR, K.-U.: *Plasmadiagnose in Experimenten zur Wechselwirkung intensiver Laserimpulse mit Materie*. Diplomarbeit, Institut für Optik und Quantenelektronik Jena, 2002.
- [32] HIPP, M. und P. REITERER: *User manual for IDEA. Software for interferometrical data evaluation*. <http://optics.tu-graz.ac.at>. Institut für Experimentalphysik, Technische Universität Graz, 1999.
- [33] TAJIMA, T. und J. M. DAWSON: *Laser Electron-Accelerator*. Physical Review Letters, 43(4):267–270, 1979.
- [34] ESAREY, E, P SPRANGLE, J KRALL und A TING: *Overview of plasma-based accelerator concepts*. IEEE Transactions On Plasma Science, 24(2):252–288, 1996.
- [35] GAHN, C., G. D. TSAKIRIS, A. PUKHOV, J. MEYER-TER VEHN, G. PRETZLER, P. THIROLF, D. HABS und K. J. WITTE: *Multi-MeV electron beam generation by direct laser acceleration in high-density plasma channels*. Physical Review Letters, 83(23):4772–4775, 1999.
- [36] PUKHOV, A, ZM SHENG und J MEYER TER VEHN: *Particle acceleration in relativistic laser channels*. PHYSICS OF PLASMAS, 6(7):2847–2854, 1999.
- [37] SCHREIBER, J.: *Erzeugung und Charakterisierung von frequenzverdoppelten ultrakurzen Terawatt Titan-Saphir-Laserimpulsen*. Diplomarbeit, Institut für Optik und Quantenelektronik Jena, 2002.
- [38] EWALD, F.: *Harte Röntgenstrahlung aus relativistischen Laserplasmen und laserinduzierte Kernreaktionen*. Doktorarbeit, Institut für Optik und Quantenelektronik Jena, 2004.
- [39] PRETZLER, G., A. KASPER und K. J. WITTE: *Angular chirp and tilted light pulses in CPA lasers*. Applied Physics B - Lasers and Optics, 70(1):1–9, 2000.
- [40] AVETISSIAN, H. K., A. K. AVETISSIAN, G. F. MKRTCHIAN und K. V. SEDRAKIAN: *Electron-positron pair production in the field of superstrong oppositely directed laser beams*. Physical Review E, 66(1), 2002.
- [41] NAROZHNY, N. B., BULANOV S. S., V. D. MUR und V. S. POPOV: *$e(+)$ $e(-)$ -pair production by a focused laser pulse in vacuum*. Physics Letters A, 330(1-2):1–6, 2004.

Literaturverzeichnis

- [42] SCHWOERER, H.: *Vorlesung über Materie in intensiven Lichtfeldern. Eine Einführung in relativistische Plasmaphysik, Hochintensitätslasertechnologie und deren gemeinsame Anwendungen.* Friedrich Schiller Universität Jena, 2002.
- [43] DAVID, N.: *Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in relativistischen Plasmen.* Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 2002.
- [44] KRUER, W. L.: *The physics of laser plasma interactions.* Addison Wesley, Redwood City, 1987.
- [45] SAUERBREY, R. und A. TÜNNERMANN: *Vorlesung über Grundlagen der Laserphysik.* Friedrich Schiller Universität Jena.
- [46] FEJER, M. M. und M. CHARBONNEAU-LEFORT: *Online lecture notes: EE232 Laser Dynamics.* <http://www.stanford.edu/class/ee232/LectureNotes/>. 279 Ginzton Laboratory 650 725 2160.
- [47] AKHMANOV, S. A. und S. YU. NIKITIN: *Physical Optics.* Clarendon Press, Oxford, 1997.
- [48] SALEH, E. A. und M. C. TEICH: *Fundamentals of photonics.* Wiley, New York, 1991.
- [49] SAUERBREY, R.: *Autokorrelation bei relativistischen Intensitäten.* August 2004.
- [50] ESAREY, E, P SPRANGLE, J KRALL und A TING: *Self-focusing and guiding of short laser pulses in ionizing gases and plasmas.* IEEE Journal Of Quantum Electronics, 33(11):1879–1914, 1997.
- [51] GOOR, F. A. VAN: *Laser wakefield acceleration of electrons (cgs units).* University of Twente, P. O. Box 217 7500 AE Enschede, The Netherlands. f.a.vanGoor@tn.utwente.nl, 2003.
- [52] SPRANGLE, P., E. ESAREY und A. TING: *Nonlinear theory of intense laser-plasma interactions.* Physical Review Letters, 64(17):2011–2014, 1990.
- [53] DE ANGELIS, U.: *Excitation of a large-amplitude plasma-wave by a short laser-pulse.* Physica Scripta, T30:210–214, 1990.

Danksagung

Abschließend möchte ich mich herzlich bei allen bedanken, die mich während der Durchführung meiner Diplomarbeit am Institut für Optik und Quantenelektronik in Jena unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt: Prof. Roland Sauerbrey für die Vergabe des Themas, Dr. Heinrich Schwoerer, Ben Liesfeld, Kay-Uwe Amthor und Dr. Friederike Ewald für die Betreuung, Falk Ronneberger, Wolfgang Ziegler und Burgard Beleites für die technische Unterstützung und Kathrin Koch, Sabine Volkmer, Dr. Alexander Nazarkin, Dr. Ralf Netz, Frithjof Brauer, Gabor Matthäus, Oliver Jäckel, Sebastian Pfothenhauer, Dr. Gregor Strobrawa, Dr. Martin Hacker und Guy Buss für die physikalischen Gespräche.

Erklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Jena, den 19. Jan 2005