503 – Spezifische Ladung e/m des Elektrons

1. Aufgaben

1.1 Bestimmen Sie mit Hilfe einer Fadenstrahlröhre die spezifische Ladung e/m des Elektrons! Leiten Sie daraus die Masse des Elektrons ab!

1.2 Untersuchen Sie mögliche systematische Fehler (die Abhängigkeit der Größe e/m von der Spannung U und dem Radius r, die Homogenität des B-Feldes, der Einfluss des Erdmagnetfeldes, relativistische Effekte)!

2. Grundlagen

<u>Stichworte:</u>
geladenes Teilchen im Magnetfeld, Lorentzkraft, Stoßanregung, Fadenstrahlen, Magnetfeld einer Spule und einer Helmholtzspule

Es gibt in der Physik eine Reihe von Fundamentalkonstanten, deren Größe als naturgegeben anzusehen ist und nur durch Experimente bestimmt werden kann. Dazu gehören (als Beispiel) die Lichtgeschwindigkeit, die Gravitationskonstante, das Plancksche Wirkungsquantum und auch die Masse und Ladung eines Elektrons. Die Methoden zur Messung dieser Konstanten bilden eines der reizvollsten Kapitel der Physik, weil darin der innere Zusammenhang der verschiedenen Teilgebiete sehr deutlich sichtbar wird. In vielen Fällen führen bereits einfache und anschauliche Versuchsanordnungen zu guten Ergebnissen. Ein Beispiel ist die Fadenstrahlröhre zur Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons.

2.1 Messprinzip

Bewegt sich ein Elektron in einem magnetischen Feld, so unterliegt es dem Einfluss der Lorenzkraft $\mathbf{F}_L$

$$\mathbf{F}_L = -e\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (1),$$

wobei e die Ladung des Elektrons (Elementarladung) und $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ das Kreuzprodukt aus Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ des Elektrons und Stärke des Magnetfeldes (magnetische Flussdichte $\mathbf{B}$) ist. Die Angaben $\mathbf{F}_L$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{B}$ sind Vektoren. Der Betrag von $\mathbf{F}_L$ berechnet sich aus

$$|\mathbf{F}_L| = e \cdot |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{B}| \cdot \sin\varphi \qquad (2),$$

wobei φ der von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{B}$ eingeschlossene Winkel ist. $\mathbf{F}_L$ steht außerdem senkrecht auf $\mathbf{v}$ und $\mathbf{B}$ (vgl. Bild 1).

Wird ein Elektron senkrecht zu den Feldlinien in einem homogenen Magnetfeld bewegt, so erfährt es eine ständige Ablenkung zur Seite hin, die schließlich in eine geschlossene Kreisbahn mündet. Die dann wirkende Zentrifugalkraft $\mathbf{F}_Z$ ist mit der Lorenzkraft $\mathbf{F}_L$ im Gleichgewicht. Da in unserem Fall **v** und **B** senkrecht aufeinander stehen (φ = 90°, sin φ = 1), kann im Folgenden mit den Beträgen gerechnet werden:

$$F_L = e \cdot \mathrm{v} \cdot B \qquad (3),$$

$$F_Z = m \cdot \frac{\mathrm{v}^2}{r} \qquad (4).$$

Aus $F_Z = F_L$ folgt eine einfache Beziehung zur Bestimmung des Quotienten aus Elementarladung und Masse m des Elektrons

$$\frac{e}{m} = \frac{\mathrm{v}}{B \cdot r} \qquad (5).$$

Bei Kenntnis der Elementarladung, z.B. als Ergebnis des „Millikan-Versuches“, erhält man daraus die Elektronenmasse.

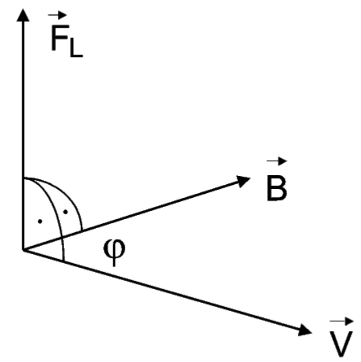

Bild 1: Darstellung der senkrecht zueinander stehenden Vektoren $\mathbf{F}_L$, **v** und **B**.

2.2 Versuchsaufbau

Der Elektronenstrahl wird in einer Fadenstrahlröhre erzeugt. Diese besteht aus einem evakuierten Glaskolben mit Anode und geheizter Katode. Die aus der Glühkatode austretenden Elektronen werden durch eine hohe Spannung U zur Anode hin beschleunigt und treten durch eine Öffnung mit der kinetischen Energie

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot \mathrm{v}^2 = e \cdot U \qquad (6)$$

aus. Da der Elektronenstrahl selbst nicht sichtbar ist, befindet sich in der Röhre eine geringe Menge eines Edelgases (Argon oder Neon). Durch Stöße der Elektronen mit den Edelgas-Atomen werden diese ionisiert und damit zum Leuchten gebracht. Da sich die vergleichsweise schweren Ionen in der kurzen Zeit ihrer Existenz kaum von der Stelle bewegen, wird durch sie die Bahn der Elektronen sehr gut markiert. Außerdem führt die Anziehungskraft der (positiven) Ionen zur Bündelung des Strahls (⇒ „Fadenstrahl").

Das Magnetfeld wird mit Hilfe eines sogenannten Helmholtz-Spulenpaares erzeugt. Das sind zwei Spulen mit gleicher Windungszahl *N*, welche koaxial und parallel zueinander stehen mit einem Abstand, der gleich dem Spulenradius *R* ist. Durch diese Anordnung lässt sich im Innenraum ein nahezu ideal homogenes Feld erzeugen. Fließt durch die Spulen der Strom *I*, so beträgt das dadurch erzeugte Magnetfeld

$$H = N \cdot \frac{I}{L} \;\rightarrow\; B = 0{,}715 \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{R} \qquad (7)$$

(μ_0 ... magnetische Feldkonstante, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am; der Faktor 0,715 ergibt sich aus der Geometrie der Anordnung).

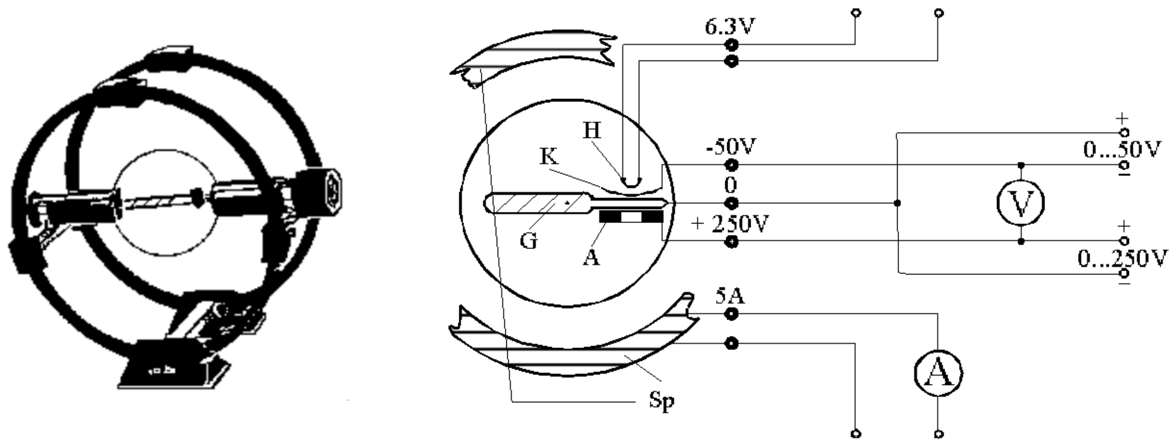

Bild 2: Versuchsaufbau und elektrische Beschaltung (K ... Kathode, H ... Kathodenheizung, A ... Anode, G ... Gitter, Sp ... Helmholtz-Spulen).

Der Elektronenstrahl beschreibt unter Einfluss des Magnetfeldes eine Kreisbahn, deren Radius mit Hilfe geeigneter Markierungen (in die Röhre eingebaute fluoreszierende Metallstege) gemessen werden kann. Aus den drei Messgrößen: Beschleunigungsspannung *U*, magnetische Flussdichte *B* und Bahnradius *r* lässt sich durch Kombination von Gl. 5 und Gl. 6 die spezifische Ladung *e*/*m* berechnen. Es gilt:

$$\frac{e}{m} = \frac{2 \cdot U}{B^2 \cdot r^2} \qquad (8).$$

3. Versuchsdurchführung

3.1 Messung

Die Inbetriebnahme des Versuchsplatzes darf **nur durch den zuständigen Betreuer** erfolgen. Lesen Sie sich vor Beginn die am Platz ausliegende Betriebsanleitung (insbesondere den Abschnitt 3.3) genau durch, und befolgen Sie während des Experimentierens die dort gegebenen Hinweise (nachfolgend in verkürzter Form dargestellt und teilweise ergänzt):

- Spannungsversorgung der Röhre und damit Heizspannung 6.3 V einschalten
- Anheizzeit (ca. 1min) abwarten

- Anodenspannung (0 ... 250 V) und Gitterspannung (0 ... 50 V) so einstellen, dass ein aus der Anodenöffnung austretender schwach leuchtender Strahl sichtbar wird (Raum abdunkeln!)

- Spulenstrom einschalten und so einstellen, dass der Fadenstrahl eine Kreisbahn beschreibt

- Röhre senkrecht zum Magnetfeld ausrichten

- Gewünschten Wert der (Gesamt)-Beschleunigungsspannung einstellen, Spulenstrom so regeln, dass der Fadenstrahl einen der vier Messstege trifft (entspricht Vollkreis mit Radius 2, 3, 4 oder 5 cm).

- aus den Werten für U, I und r kann mit Gl.7 und Gl.8 die spezifische Ladung e/m berechnet werden.

Nehmen Sie bei ca. 7 verschiedenen Beschleunigungsspannungen (z.B.: $U = 300, 280, 260, ...$ bis 180 V) für jeweils 4 unterschiedliche Radien ($r = 2, 3, 4$ und 5 cm) Messwerte auf! Diese werden entsprechend nachfolgender Vorgehensweise statistisch ausgewertet.

3.2 Auswertung

- Es werden alle e/m-Werte berechnet und in geeigneter Form, z.B. in einer Tabelle (U-r-Matrix), dargestellt.
- Der Wertepool wird auf systematische Effekte untersucht. Fertigen Sie dazu eine grafische Darstellung e/m über der Spannung U an (ggf. zusätzlich e/m über dem Radius r)! Sind systematische Abhängigkeiten zu erkennen? Kann man diese erklären? Sollten eventuell einzelne Werte von der Auswertung ausgeschlossen werden (bitte Assistenten fragen)?
- Von den (verbleibenden) Messwerten wird der Mittelwert $\bar{x}$ gebildet, die Standardabweichung s berechnet und daraus die Genauigkeit des Mittelwertes für eine statistische Sicherheit von 95% ermittelt (Fehler $\Delta \bar{x}$). Hinweise dazu im Anhang!

3.3 Berechnung der (Ruhe-)Masse des Elektrons

Die Ladung eines Elektrons (Elementarladung) kann als bekannt vorausgesetzt werden. Sie beträgt $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As. Damit lässt sich aus dem experimentellen Ergebnis e/m die Elektronenmasse m_e berechnen. Vergleichen Sie das Resultat mit dem Tabellenwert!

3.4 Zusatzaufgaben für Interessierte

3.4.1 Wir vergleichen unser Ergebnis mit dem Tabellenwert einer Ruhemasse des Elektrons. In unserem Experiment ruht das Elektron aber nicht. Es ist bekannt, dass für sehr schnelle Elektronen (v $\approx$ c, c ... Lichtgeschwindigkeit) eine signifikante relativistische Massenzunahme erfolgt.
Schätzen Sie mit Hilfe der Gl. 5 und/oder Gl. 6 die maximale Geschwindigkeit der Elektronen und die daraus resultierende Massenzunahme

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ab. Spielt diese im Experiment eine Rolle?

3.4.2. Messung der Homogenität des Magnetfeldes in einer Helmholtzspule

Vermessen Sie das Magnetfeld mit einer Teslasonde! Überlegen Sie, wie eine dreidimensionale Feldverteilung visualisiert werden kann! Diskutieren Sie, wie homogen das Magnetfeld im Vergleich zur Ausdehnung des gebogenen Fadenstrahls ist! Hat das Erdmagnetfeld einen messbaren Einfluss?

Anhang

Hinweise zur statistischen Auswertung von physikalischen Messreihen:

Der Mittelwert einer Messreihe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist das arithmetisches Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ein Maß für die Streuung der einzelnen Messwerte bezüglich ihres Mittelwertes ist die Standardabweichung s (mittlere quadratische Abweichung):

$$s = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \quad .$$

Die Standardabweichung ist aber noch nicht die Genauigkeit des Mittelwertes. Würde man die Messreihe mehrmals wiederholen und immer den Mittelwert berechnen, so wäre die Streuung der entstehenden Mittelwerte viel kleiner als die Streuung der einzelnen Messwerte (bei genauer Betrachtung um $\sqrt{n}$ kleiner). Als Genauigkeitsangabe für den Mittelwert eignet sich demnach die Größe $s/\sqrt{n}$. Diese trägt die offizielle Bezeichnung „Standardfehler".
Der Standardfehler besitzt eine 68%-ige statistische Sicherheit, d.h. $\Delta\bar{x} = s/\sqrt{n}$ als Fehler anzugeben ist in ca. zwei Drittel aller Fälle o.k., wäre aber oft auch zu klein. Für eine höhere statistische Sicherheit muss das Intervall vergrößert werden, z.B. für die im Praktikum üblichen 95% um den Faktor 2.

Damit ist der der Fehler unseres Ergebnisses: $\Delta\bar{x} = 2 \cdot s/\sqrt{n}$.

Es sei zum Schluss noch einmal darauf hingewiesen, dass eine saubere statistische Auswertung eigentlich voraussetzt, dass es keine systematischen Fehler gibt. Dies sollte bei der Interpretation des Ergebnisses beachtet werden.

Literatur: Anleitung des Versuchs 303 (Statistik)