303 – Statistik

1. Aufgaben

1.1 Überprüfen Sie mit Hilfe eines Würfel-Simulationsprogramms die Gültigkeit des Zentralen Grenzwertsatzes, indem Sie zeigen, dass die aus einer Gleich-Verteilung berechneten Mittelwerte eine Normalverteilung bilden und dass deren Breite mit der Wurzel der Anzahl der Messwerte sinkt!

1.2 Messen Sie Zählraten der ständig vorhandenen natürlichen Radioaktivität! Nehmen Sie dazu insgesamt 500 Werte (25 x 20) in Form unterschiedlich großer Stichproben (n = 20, 40, ..., 220) auf! Untersuchen Sie den Einfluss der Stichprobengröße auf die Form der Verteilung. Prüfen Sie nach, ob die Mittelwerte eine Normalverteilung bilden, wie groß die Standardabweichung dieser Verteilung ist und ob tatsächlich 68% aller Mittelwerte im 1σ-Vertrauensbereich liegen!

1.3 Berechnen Sie für ein vorgegebenes Messbeispiel Mittelwert, Standardabweichung und das Fehlerintervall für 95% statistische Sicherheit!

2. Grundlagen

Stichworte:

Basiswissen: arithmetisches Mittel, Standardabweichung, Varianz, Grundgesamtheit, Stichprobe, Normalverteilung, Zentraler Grenzwertsatz der Statistik, Vertrauensbereich, Histogramm

Weiterführend: Poisson-Verteilung, t-Parameter

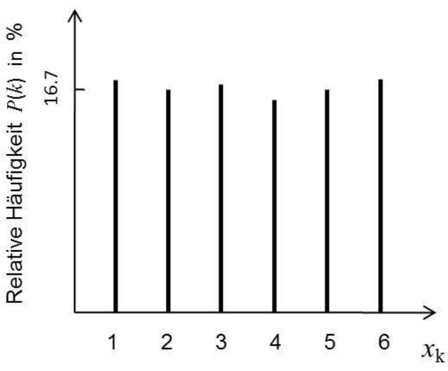
Lesen Sie dazu auch „Ausführliche Grundlagen zum Versuch 303“ (Lit. /1/)!

2.1 Einleitung

Statistik begegnet uns in vielen Bereichen des Lebens: in der Wissenschaft, in Politik und Wirtschaft, beim Wetter etc. Das Thema ist sehr umfangreich, für die verschiedenen Problemstellungen gibt es unterschiedliche Herangehensweisen.
Bei **wissenschaftlichen Messaufgaben** ist es oft so, dass eine Messung mehrmals wiederholt wird. Aufgrund der vorhandenen Messfehler sind dann die erhaltenen Werte nicht identisch. Man kann einen Mittelwert bilden und die Streuung als Maß für die Messgenauigkeit nehmen. In der **Natur** finden wir Größen, die schon vom Prinzip her Schwankungen unterliegen, wie die natürliche Radioaktivität. Ein einzelner Zahlenwert ist hier oft noch nicht sehr aussagekräftig, aber bei Betrachtung über einen längeren Zeitraum hinweg zeigt sich eine charakteristische Verteilung der Werte (z.B. Poisson-Verteilung, vgl. /1/). Auch beim **Spielen** (z.B. Würfeln) entstehen Zahlenreihen, mit denen man Statistik betreiben kann.

Für eine sinnvolle statistische Auswertung ist immer eine möglichst große Zahl von Einzelmesswerten (Stichprobe) nötig. Die Aussagekraft einer Statistik wächst mit steigendem Stich-

probenumfang, denn es geht immer darum, von einer endlichen Stichprobe auf die Verhältnisse in der Grundgesamtheit zu schließen.
Sind die Daten erfasst, müssen sie tabellarisch oder grafisch dargestellt werden: wenn die Messreihe nur wenige diskrete Werte besitzt als Stabdiagramm (vgl. Bild 1a), wenn die Messgröße stetige Werte annehmen kann oder sehr viele verschiedene Werte vorkommen als Histogramm (Bild 1b).



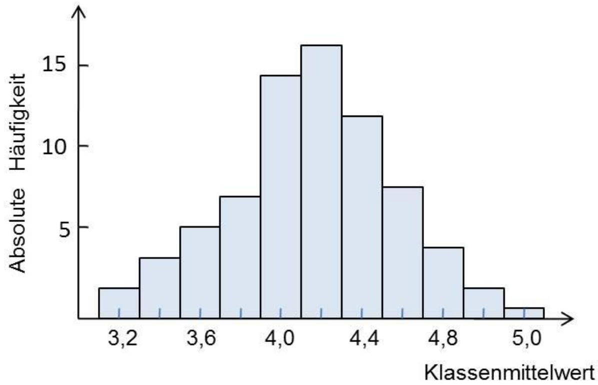


Bild 1a) diskrete Verteilung im Stabdiagramm.

1b) Verteilung in einem Histogramm: Beispielmessvorgang: Zerfallsrate Radioaktivität. (Darstellung von Klassenmittelpunkten!)

Die weitere Vorgehensweise hängt davon ab, welches Ziel verfolgt wird. Interessiert nur die Form und Breite der Verteilung oder die Lage des Maximums/der Maxima? Dann hält man mit dem Diagramm bereits ein Ergebnis in der Hand, welches interpretiert werden kann. Interessiert uns z.B. der Mittelwert und (wie meistens in der Physik) seine Genauigkeit? Dann müssen wir noch ein bisschen weiterrechnen.

2.2 Mittelwert und Standardabweichung

Bei einer wissenschaftlichen Messaufgabe existiert ein durch die Natur vorgegebener wahrer Wert, den man aber nicht kennt. Durch Mittelwertbildung über viele, aufgrund der begrenzten Messgenauigkeit leicht variierende Einzelmesswerte x_k (Anzahl n) will man ihm möglichst nahe kommen. Wenn bei der Messung keine systematischen Fehler auftreten (!), kann das arithmetische Mittel $\bar{x}$ der Messwerte als beste Schätzung für den tatsächlichen Wert angenommen werden.

Das arithmetische Mittel $\bar{x}$ einer Messreihe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wird nach Gl.1 berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \quad (1).$$

Als geeignetes Maß für die Messgenauigkeit benutzt man die mittlere quadratische Abweichung aller Einzelwerte bezüglich ihres Mittelwertes (Varianz) bzw. deren Wurzel, welche Standardabweichung s genannt wird:

$$s = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2} \quad (2).$$

Vereinfacht gesagt, beschreibt die Standardabweichung, wie weit die Einzelmesswerte im Durchschnitt vom Mittelwert entfernt liegen. Bei Vergrößerung des Stichprobenumfangs n nähert sich der empirische Mittelwert $\bar{x}$ dem wahren Wert immer weiter an. Die Standardabweichungen s der Stichproben streben einem konstanten Wert zu.

2.3 Zentraler Grenzwertsatz und Normalverteilung

Angenommen, in einem physikalischen Experiment wurden n Einzelmesswerte x_k bestimmt und daraus Mittelwert $\bar{x}$ und Standardabweichung s berechnet. Die Einzelmesswerte können beliebig verteilt sein. Jetzt wiederholen wir das gesamte Experiment mehrmals und erhalten so eine ganze Reihe unterschiedlicher Mittelwerte $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$,…. Was stellen wir fest?

1) Wenn die empirischen Mittelwerte $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ … in einem Histogramm dargestellt werden, bilden sie eine Normalverteilung (Bild 2).

2) Das Maximum der Normalverteilung entspricht dem Erwartungswert μ. Die Standardabweichung σ dieser Verteilung ist gleich $s/\sqrt{n}$.

Dieses Ergebnis entspricht dem Zentralen Grenzwertsatz der Statistik (vgl. /1/). Voraussetzung ist (wie immer) eine hinreichend große Stichprobe n.

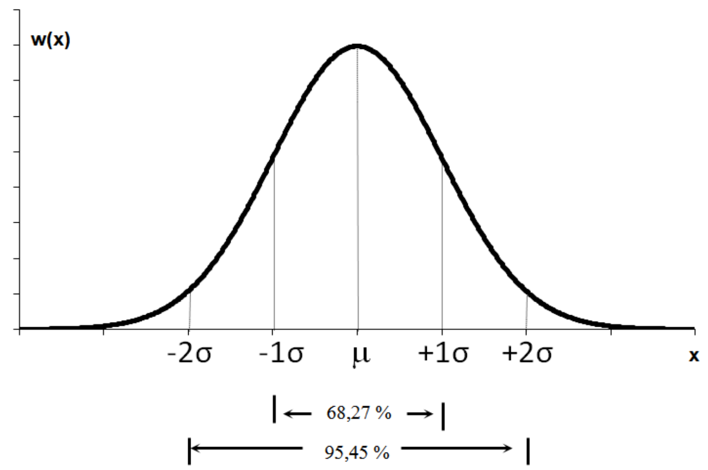


Bild 2: Wahrscheinlichkeitsverteilung w(x) der Normalverteilung, auch bekannt als Gaußsche Glockenkurve.

Die unter der Kurve angegebenen Wahrscheinlichkeiten p entsprechen der relativen Fläche, die die Kurve im entsprechenden Intervall einschließt.

Warum gilt der zentrale Grenzwertsatz? Das liegt vereinfacht gesagt daran, dass sich bei der Berechnung der empirischen Mittelwerte $\bar{x}_k$, wo jeweils n Zahlen summiert werden (Gl.1), die Ausreißer (nach oben und unten) gegenseitig kompensieren und somit eine Häufung zu solchen Werten erfolgt, die in der Nähe des Erwartungswerts μ liegen. Dabei ist die Streuung der Mittelwerte um den Faktor „Wurzel aus n" kleiner als die Streuung der Einzelmesswerte, was einem Zuwachs an Genauigkeit entspricht.

2.4 Genauigkeit des Mittelwertes

Angewendet auf ein physikalisches Experiment, das statistische Messreihen mit hinreichend großem Stichprobenumfang enthält, lässt sich aus dem in Abschnitt 2.3 Gesagten ein Wert für die Genauigkeit des Ergebnisses definieren. Dieser sogenannte „Standardfehler" $\Delta\bar{x}$ entspricht der Streubreite der Mittelwerte $s_{\bar{x}}$, also der Größe σ in der Normalverteilung.

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}} \, .$$

Wichtig: Streubreite der Mittelwerte $s_{\bar{x}}$ (Standardfehler $\Delta\bar{x}$) nicht mit der Streubreite der Einzelmesswerte s (Standardabweichung, Gl.2) verwechseln!

Das durch ($\bar{x} \pm \Delta\bar{x}$) gegebene Intervall schließt mit einer Wahrscheinlichkeit von $p \approx 68\%$ den wahren Wert μ ein (vgl. Bild 2). Das Symbol p wird als „statistische Sicherheit" bezeichnet und das entsprechende Intervall als „Vertrauensbereich". Eine Verdoppelung der Intervallbreite, also ($\bar{x} \pm 2\Delta\bar{x}$) entspräche einer statistischen Sicherheit von ca. 95%, eine Verdreifachung ca. 99% usw.

Falls der Stichprobenumfang nicht groß genug ist, müssen alle Aussagen angepasst werden. (vgl./1/: t-Verteilung).

3. Versuchsdurchführung

3.1 Würfelsimulation

Ein Computerprogramm simuliert einen idealen Würfel, bei dem die möglichen Ziffern 1 bis 6 im statistischen Mittel alle mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten. Im Einzel-Modus („*Einzelner Durchlauf*") sind Messreihen beginnend beim Einzelwurf bis zu einer maximalen Zahl (Anzahl der Würfe n) von etwa 125 000 möglich. Es wird die Häufigkeitsverteilung der Ziffern 1 bis 6 als Balken- bzw. Stabdiagramm dargestellt, sowie der Mittelwert und die Varianz bzw. Standardabweichung der Verteilung berechnet. Dasselbe kann anstatt mit nur einem Würfel auch für die Augensumme bei gleichzeitigem Werfen mit 2, 3, 5 oder 10 Würfeln durchgeführt werden.
Im „*Automatischen Modus*" wird das Nacheinander-Ausführen mehrerer gleichartiger Messreihen simuliert (m Durchläufe zu je n Würfen, $m \leq 1000$). Das Programm berechnet für jeden Durchlauf den Mittelwert. Die Verteilung aller Mittelwerte wird als Histogramm dargestellt. Der Mittelwert und die Varianz bzw. Standardabweichung dieser Verteilung werden berechnet. Zur Erstellung des Histogramms müssen die Mittelwerte in Klassen eingeordnet werden. Deren Anzahl sowie der Klassenmittelpunkt der untersten und der obersten Klasse müssen vorgegeben werden. Der Rest erfolgt automatisch.

Berechnen Sie in Vorbereitung des Versuchs Erwartungswert μ und Standardabweichung σ eines idealen Würfels!

Testen Sie dann das Programm, d.h. „würfeln" Sie einzeln mit *einem* Würfel! Erhöhen Sie die Zahl der Würfe langsam bis zum Maximum und beobachten Sie die Veränderungen in der Form der Verteilung sowie bei den ausgegebenen Werten (speziell Mittelwert und Standardabweichnung)! Notieren Sie $\bar{x}$ und s für die nahezu ideale Gleichverteilung ($n \approx 125\,000$)!

Stellen Sie im Einzelmodus die Zahl n der Würfe auf 100, führen Sie mehrere Messreihen hintereinander durch und beobachten Sie die dabei entstehenden Mittelwerte! In welchem Bereich streuen sie, wo häufen sie sich? Stellen Sie danach im *Automatischen Modus* die Zahl n der Würfe ebenfalls auf 100 und die Anzahl m der Durchläufe auf 1000. Betrachten Sie die nun entstehende (Normal-?) Verteilung (vorher Klasseneinteilung optimieren). Notieren Sie die

Werte für $\overline{x}$ und s und überprüfen Sie die Richtigkeit des Zusammenhangs „$s_{\bar{x}} = s/\sqrt{n}$“ !

Wiederholen Sie das Ganze für $n = 10$ und $n = 1000$!

Drucken Sie je ein Beispiel für Gleichverteilung und Mittelwertverteilung aus 10, 100 und 1000 Werten aus! Fertigen Sie eine qualitative Skizze an, welche die vier Verteilungen im selben Maßstab (x-Achse) zeigt. Diskutieren Sie das Ergebnis!

3.2 Messung natürlicher Radioaktivität

Als zufällig verteilte Messgröße wird der Nulleffekt bei der Messung der Radioaktivität in der Luft registriert. Die Bestimmung der Zählrate x erfolgt mit einem kommerziellen Strahlungsmessgerät. Hinweise zu den Einstellungen am Strahlungsmessgerät liegen am Versuchsplatz aus. Die mittlere Zählrate (Impulszahl pro Messung) sollte bei 3 ... 6 liegen, das Maximum <15 sein (bis 15 reicht die Tabelle!).

Erfassen Sie die Messwerte als Strichliste in einer Tabelle (Bild 3). Jede Zeile der Tabelle ist für 20 Einzelmessungen vorgesehen. Die Berechnung der Mittelwerte und Standardabweichungen erfolgt am Computer. Die Tabelle wird am Versuchstag vom Assistenten ausgegeben.

N	**Impulse**															
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
20																
40																
80																
140																

Bild 3: Muster der Auswertetabelle.

Versuchen Sie, beim Ausfüllen der Strichliste ein Gefühl für den Ablauf statistischer Vorgänge zu entwickeln, legen Sie z.B. ab und zu eine Pause ein, betrachten Sie die bis dahin gesammelten Daten, versuchen Sie, den Mittelwert und die Streuung ohne Rechnerhilfe abzuschätzen, achten Sie bewusst auf „Ausreißer“ etc.

Auswertung der Messreihen 20, 40, ..., 220 (Poisson-Verteilung)

Zeichnen Sie für jede der fünf Messreihen das zugehörige Stabdiagramm, und führen Sie die Auswertung lt. Vorgabe am PC durch! **Beantworten Sie** danach folgende Fragenkomplexe:

1. Liefern die Messungen des radioaktiven Zerfalls als Ergebnis tatsächlich eine Poisson-Verteilung? Woran ist diese zu erkennen, d.h. existiert eine Asymmetrie in der Verteilungskurve und gibt es zwischen $\bar{x}$ und s einen Zusammenhang?

Kann man die Poisson-Verteilung durch eine Normalverteilung annähern? Wenn nicht, unter welchen Voraussetzungen wäre es möglich?

2. Wie wirkt sich die Größe einer Stichprobe auf die Ergebnisse statistischer Untersuchungen aus? Wie gut wird die Form der Verteilung in den Stabdiagrammen sichtbar? Ändern sich $\bar{x}$ und s mit steigendem Stichprobenumfang? Ändert sich der Vertrauensbereich des Mittelwerts? Welche Schlussfolgerungen ergeben sich für die messtechnische Praxis?

Verteilung der 25 Mittelwerte (Normal-Verteilung)

Im zweiten Versuchsteil nutzen wir nicht mehr die ursprünglichen (poissonverteilten) Daten zur Auswertung, sondern betrachten die 25 Mittelwerte als eine neue Stichprobe. Wenn die Theorie stimmt, sollte für 68% von ihnen (d.h. etwa 17 Werte von 25) der Vertrauensbereich ($s/\sqrt{20}$) den angenommenen „wahren" Wert einschließen. Stellen Sie also die Mittelwerte mit ihren Vertrauensbereichen für 68% statistischer Sicherheit in einem Diagramm (siehe Bild 4) grafisch dar! Wie viele der 25 Vertrauensbereiche überdecken den „wahren" Wert (als Schätzwert wird der Mittelwert aus allen 500 Einzelmessungen verwendet)? Stimmt dieses Ergebnis mit den Erwartungen überein? Gibt es Vertrauensbereiche für 95%, die den wahren Wert nicht überdecken? Wenn ja, wie viele? Was sagt die Theorie?

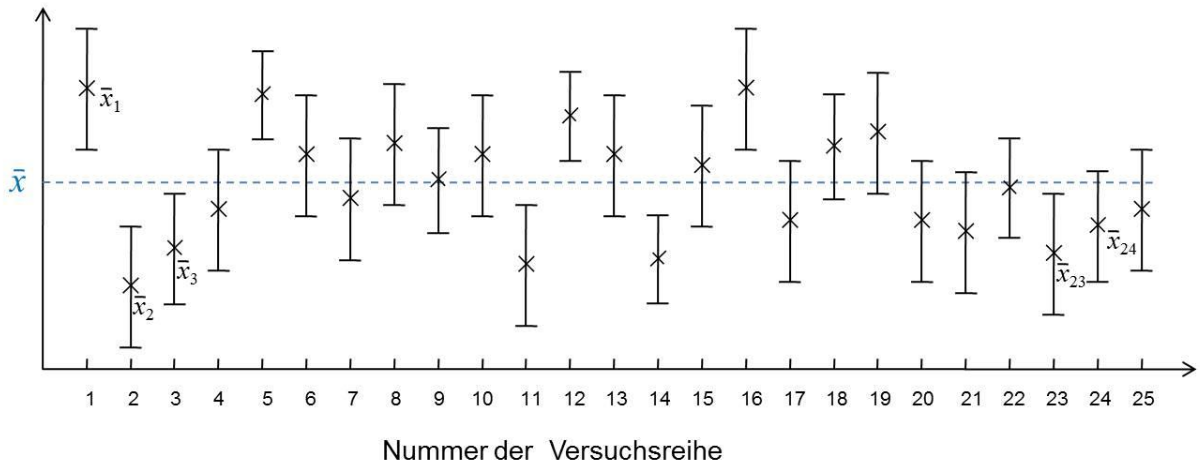


Bild 4: Darstellung der Vertrauensbereiche.

Nach dem Zentralen Grenzwertsatz müssten die Mittelwerte normalverteilt und die Breite dieser Normalverteilung um den Faktor $\sqrt{20}$ kleiner sein als die Breite der ursprünglichen Poisson-Verteilung. Auch diese theoretische Voraussage soll untersucht werden.
Ordnen Sie also die 25 Mittelwerte in fünf Klassen und zeichnen Sie das dazugehörige Histogramm!

a) Ist eine Verteilung zu erkennen? Welche?
b) Bestimmen Sie Mittelwert und Standardabweichung dieser Verteilung!
c) Vergleichen Sie die Standardabweichung der Mittelwerte mit denen der Einzelmessungen!

3.3 Messbeispiel

Zum Schluss eine kleine Rechenaufgabe. Sie soll dazu dienen, die in Aufgabe 1 (Würfeln) und 2 (Radioaktivität) gewonnenen Erkenntnisse für eine typische Messung, wie sie im Praktikum häufig vorkommt, anzuwenden.

Eine Zeit-Messung mit der Stoppuhr ergab folgende Werte (in Sek.):

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
T in s	26.4	26.1	27.2	26.1	25.9	26.8	27.0	26.5	23.3	26.7	26.6	27.0	26.1	26.3

Berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung der Messwert-Verteilung sowie den Fehler des Mittelwertes für 95% statistische Sicherheit (t-Parameter aus passender Tabelle entnehmen). Schreiben Sie das Ergebnis sinnvoll gerundet auf.

Hinweis: Wenn sich in einer Messreihe ein auffälliger Ausreißer (möglicherweise ein grober Fehler) findet, ist es überlegenswert, ihn von der statistischen Auswertung auszuschließen.

Literatur:

1) Ausführliche Grundlagen zum Versuch 303 (zum besseren Verständnis der Anleitung)
2) Fehlerrechnung – leicht gemacht
3) Vorlesungen zur Fehlerechnung I,II und III