

351 – Übertragungsfunktionen

1 Aufgaben

1. Bauen Sie einen RC-Hochpass *oder* einen RC-Tiefpass auf.
 - a) Bestimmen Sie die Amplituden- und die Phasenübertragungsfunktion.
 - b) Messen Sie die Grenzfrequenz.
2. Bauen Sie einen Übertrager mit Eisenkern (Transformator) auf.
 - a) Bestimmen Sie die Amplitudenübertragungsfunktion.
 - b) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz durch Amplituden- und Phasenmessung.

2 Grundlagen

Stichworte: Wechselstromkreis, Übertragungsfunktion, Amplituden- und Phasenmessung, Grenzfrequenz, Oszilloskop, elektrischer Widerstand, Kapazität, Induktivität, Transformator

2.1 Wechselstromkreis

Eine Wechselspannung wird durch ihre Amplitude U_A , ihre Frequenz f sowie eine mögliche Anfangsphasenverschiebung φ_0 charakterisiert:

$$U(t) = U_A \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_0) \quad (1)$$

Vielfach findet eine äquivalente Darstellung dieser Größe in der komplexen Ebene statt:

$$U(t) = U_A \cdot \exp(i[2\pi ft + \varphi_0]) \quad (2)$$

Spannung und Strom sind über das ohmsche Gesetz verknüpft:

$$Z = \frac{U}{I} \quad (3)$$

wobei $Z = R + iX$ die komplexwertige Impedanz darstellt. Den Realteil der Impedanz nennt man Wirkwiderstand R , der Imaginärteil heißt Blindwiderstand X . Die Impedanzen für den ohmschen Widerstand R , die Kapazität C sowie die Induktivität L lauten:

$$Z_R = R \quad (4)$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -i \frac{1}{\omega C} \quad (5)$$

$$Z_L = +i\omega L \quad (6)$$

Man erkennt, dass induktive sowie kapazitive Impedanzen frequenzabhängig und rein imaginär sind, der ohmsche Widerstand ist hingegen rein reell und frequenzunabhängig. In der komplexen Zahlenebene ergibt sich somit für diese 3 Impedanzen das in Abb. 1(a) dargestellte Verhalten.

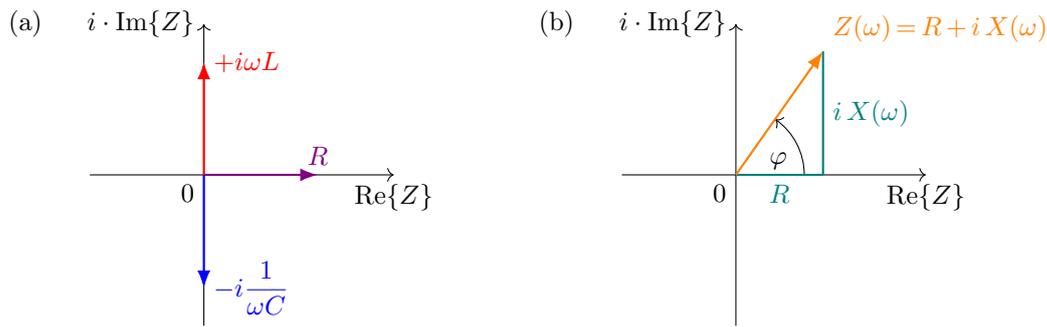


Abbildung 1: (a) Impedanzen eines ohmschen Widerstands R , einer Kapazität C und einer Induktivität L in der komplexen Ebene. (b) Impedanz $Z(\omega) = R + iX(\omega)$ eines beliebigen Bauelements oder einer Baugruppe, z.B. für die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstands und einer Induktivität bei einer gegebenen Frequenz.

Alle für den Gleichstromkreis geltenden Gesetze können weiterhin angewandt werden, wenn man komplexe Spannungen, Ströme und Widerstände (genauer: Impedanzen) zulässt. Die Zusammensetzung der Impedanz Z aus Real- und Imaginärteil bzw. aus Betrag und Phase ist durch folgende Beziehungen gegeben (siehe Abb. 1(b)):

$$Z = \operatorname{Re}\{Z\} + i \cdot \operatorname{Im}\{Z\} = R + iX \tag{7}$$

$$|Z| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{Z\})^2 + (\operatorname{Im}\{Z\})^2} \tag{8}$$

$$\arg\{Z\} = \varphi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{Z\}}{\operatorname{Re}\{Z\}}\right) \tag{9}$$

Damit ergibt sich eine zu Gleichung (7) äquivalente Darstellung:

$$Z = |Z| \cdot e^{i\varphi} \tag{10}$$

Die Parameter Amplitude, Phase und Frequenz einer Wechselspannung können mithilfe eines Oszilloskops gemessen werden. Für die Phasenmessung stehen prinzipiell zwei unterschiedliche Verfahren zur Verfügung. Zum einen lässt sich die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen Eingang- und Ausgangssignal durch Lissajous-Figuren bestimmen (siehe Abb. 2(a)). Nach **Nullpunkt-ableich** kann $\Delta\varphi$ durch Ablesen der Achsenabschnitte wie folgt ermittelt werden:

$$\Delta\varphi = \arcsin\left(\frac{u_x}{U_x}\right) = \arcsin\left(\frac{u_y}{U_y}\right) \tag{11}$$

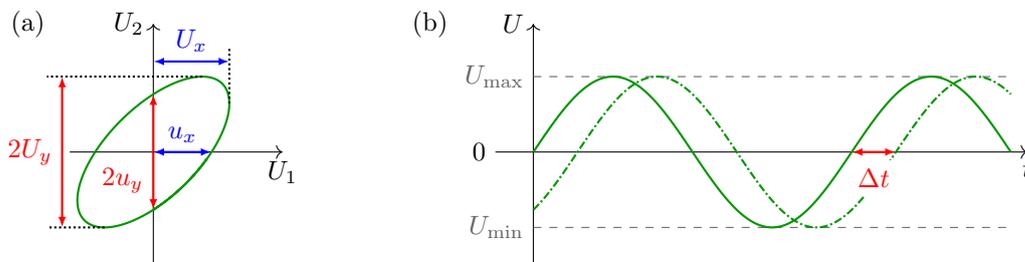


Abbildung 2: Phasenmessung mit dem Zweikanal-Oszilloskop HM1508 (a) mittels Lissajous-Figuren im Modus „XY“ sowie (b) mittels Zeitunterschieden im Modus „DUAL“.
 ☞ Warum ist es sinnvoll, die *doppelten* Ausdehnungen $2u$ bzw. $2U$ zu messen?

Eine weitere Möglichkeit besteht in der direkten zeitlichen Verschiebung zweier Signale (siehe Abb. 2(b)). Durch die Kenntnis der Periodendauer T (entspricht einem $\Delta\varphi$ von 2π bzw. 360°) kann diese Zeitverschiebung Δt in die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ umgerechnet werden:

$$\Delta\varphi = 360^\circ \cdot \frac{\Delta t}{T} \hat{=} 2\pi \cdot \frac{\Delta t}{T} = \omega \cdot \Delta t \quad (12)$$

2.2 Übertragungsfunktionen

Vielfach besitzt eine elektronische Baugruppe ein Eingangs- und ein Ausgangssignal. Das (komplexe) Verhältnis dieser beiden Größen wird Übertragungsfunktion genannt:

$$g(\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{\text{„Ausgang“}}{\text{„Eingang“}} \quad (13)$$

Durch Kenntnis von $g(\omega)$ kann jeder beliebigen Eingangsspannung eine Ausgangsspannung zugeordnet werden. $g(\omega)$ enthält somit die komplette Information der Baugruppe. Im Allgemeinen ist die Übertragungsfunktion eine komplexe Größe und kann deshalb auch wie folgt angegeben werden:

$$g(\omega) = |g(\omega)| \cdot \exp[i \cdot \arg\{g(\omega)\}] \quad (14)$$

Den Betrag $|g(\omega)|$ nennt man Amplitudenübertragungsfunktion, den Phasenanteil Phasenübertragungsfunktion $\varphi(\omega) = \arg\{g(\omega)\}$. Experimentell bestimmt man die komplexe Übertragungsfunktion durch getrennte Messung von Amplituden- und Phasenübertragungsfunktion. Hierzu legt man eine Wechselspannung bekannter Amplitude und Frequenz an und misst die Amplitude und Phasenlage der Ausgangsspannung. Durch Variation der Frequenz erhält man so die komplexe Übertragungsfunktion $g(\omega)$.

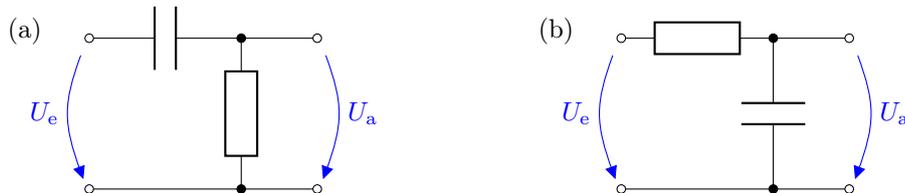


Abbildung 3: RC-Glied als (a) Hochpass bzw. (b) Tiefpass. In beiden Fällen liegt eine Reihenschaltung eines ohmschen Widerstands R mit einem Kondensator der Kapazität C vor. Es bildet sich ein Spannungsteiler für Wechselspannung. Da der Kondensator einen frequenzabhängigen Blindwiderstand besitzt, ist das Teilverhältnis jetzt auch frequenzabhängig.

Abbildung 3 zeigt den Aufbau eines RC-Glieds als Hoch- und als Tiefpass. Die entsprechende Übertragungsfunktion des Tiefpasses berechnet man mithilfe der Spannungsteilerregel (wie Gleichung (5)) im Versuch 350, jedoch hier mit Impedanzen Z):

$$U_a = U_e \cdot \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = U_e \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} = U_e \cdot \frac{1}{1 + i\omega RC} \quad (15)$$

$$g(\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \quad (16)$$

Nun stellen wir $g(\omega)$ in kartesischer Form ($z = x + iy$) dar:

$$\frac{1}{1 + i\omega RC} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \cdot \underbrace{\frac{1 - i\omega RC}{1 - i\omega RC}}_{=1}$$

$$\Rightarrow g(\omega) = \underbrace{\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}_{= \text{Re}\{g(\omega)\}} + i \cdot \underbrace{\frac{-\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}_{= \text{Im}\{g(\omega)\}} \quad (17)$$

Die exponentielle Form ($g = |g| \cdot e^{i\varphi}$) leitet sich wie folgt ab:

$$|g(\omega)| = \sqrt{\frac{1^2}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2} + \frac{(-\omega RC)^2}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (18)$$

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{\text{Im}\{g(\omega)\}}{\text{Re}\{g(\omega)\}} = -\omega RC \quad (19)$$

$$\Rightarrow g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot e^{-i \arctan(\omega RC)} \quad (20)$$

In Abb. 4 sind der Amplitudengang und der Phasengang graphisch dargestellt.

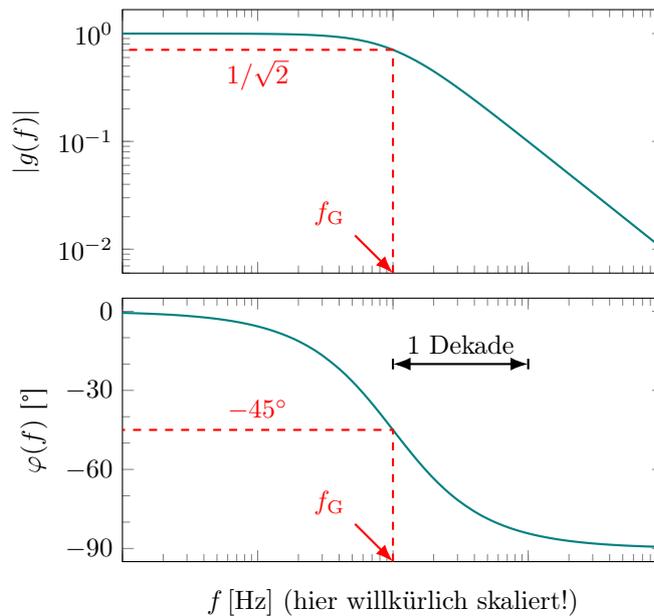


Abbildung 4: Amplitudengang und Phasengang eines RC-Tiefpasses aufgetragen über einer logarithmisch skalierten Frequenzachse. Der darzustellende Bereich hängt von der individuellen Grenzfrequenz f_G des verwendeten Filters ab. Im oberen Diagramm ist auch die $|g(f)|$ -Achse logarithmisch skaliert.

Um den charakteristischen Abfall der Übertragungsfunktion zu beschreiben, führt man die sogenannte Grenzfrequenz ein.

Die Grenzfrequenz stellt die Frequenz dar, bei der die Amplitudenübertragungsfunktion auf den $(1/\sqrt{2})$ -ten Teil ihres Maximalwertes abgefallen ist.

Für den RC-Tiefpass erhält man somit aus Gleichung (18) eine Grenz(kreis)frequenz von:

$$\omega_G = \frac{1}{RC} \quad \Leftrightarrow \quad f_G = \frac{1}{2\pi RC} \quad (21)$$

Analog ergibt sich für einen RC-Hochpass die folgende Übertragungsfunktion:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/[\omega^2 R^2 C^2]}} \cdot e^{+i \arctan(1/[\omega RC])} \quad (22)$$

🔗 Vollziehen Sie bitte die Rechnung für den RC-Hochpass nach. Fügen Sie die Herleitung von Gleichung (22) ausgehend von der komplexen Spannungsteilerregel in Ihr Protokoll ein.

2.3 Übertrager

Zwei magnetisch miteinander gekoppelte Spulen bezeichnet man als Übertrager (siehe Abb. 5). Sie werden vielfach eingesetzt, z.B. zur Leistungsanpassung, zum Entkoppeln gegenüber einem Massepotential oder zur Strom- bzw. Spannungstransformation.

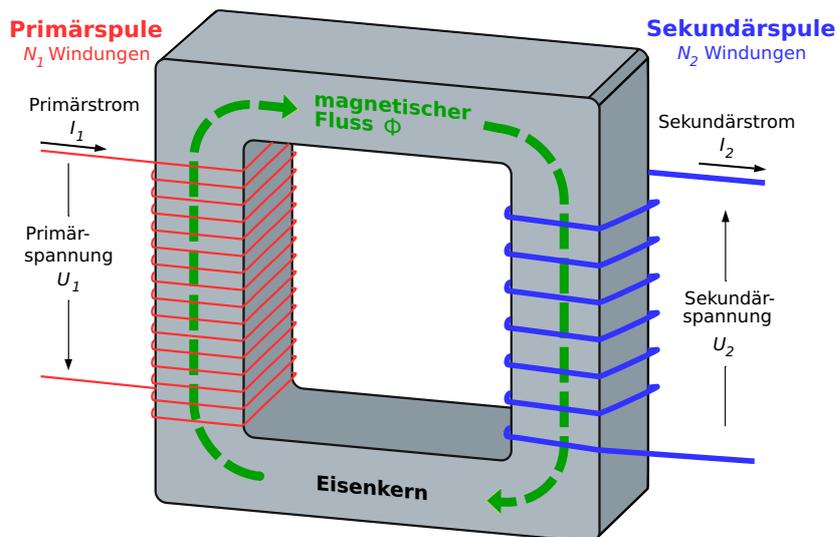


Abbildung 5: Schematische Darstellung eines Übertragers bestehend aus zwei Spulen und einem Eisenkern. Primärseite (Index 1) und Sekundärseite (Index 2) sind jeweils charakterisiert durch die Windungszahl N_n , die Stromstärke I_n und die Spannung U_n . Im Eisenkern mit der Querschnittsfläche F fließe der magnetische Fluss $\Phi = B \cdot F$. Quelle: BillC, Omegatron, Herbertweidner, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4813105> (Stand: 11.10.2024).

Setzt man einen idealen Übertrager voraus (Wirkungsgrad $\eta = 1$, Vernachlässigung von Streufeldern und inneren Verlusten, sekundärseitiger Lastwiderstand $R_L \rightarrow \infty$), so gilt:

$$U_1 = N_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{und} \quad U_2 = N_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad (23)$$

Beachtet man, dass der magnetische Fluss in beiden Spulen gleich groß ist, so erhält man unmittelbar einen Zusammenhang zwischen den Windungszahlen N_1 und N_2 und dem Übertragungsfaktor k :

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (24)$$

Bei der Benutzung eines magnetischen Materials als Kern für den Übertrager ist das hystere-tische Verhalten des Materials zu beachten (siehe Abb. 6). Der Primärstrom I_1 erzeugt in der Primärspule der Länge l_1 eine magnetische Flussdichte B gemäß

$$B = \mu_{\text{eff}} \mu_0 H = \mu_{\text{eff}} \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l_1} \quad (25)$$

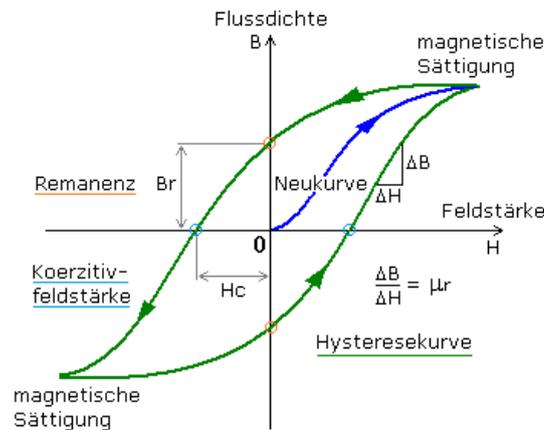


Abbildung 6: Hysteresekurve (schematisch) eines magnetischen Kernmaterials mit stark nicht-linearem $B(H)$ -Verhalten. Quelle: D. Mietke, https://elektroniktutor.de/elektrophysik/ephy_pict/hyster.png (Stand: 11.10.2024).

Gleichung (25) suggeriert einen linearen Zusammenhang zwischen B und H . Dem ist aber *nicht* so, wie Abb. 6 zeigt. Da $\mu_0 = 1,256637 \cdot 10^{-6} \text{VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$ die magnetische Feldkonstante ist, wird klar, dass μ_{eff} keine Konstante, sondern eine stark nichtlineare Funktion der magnetischen Feldstärke H darstellt (in μ_{eff} sind sowohl die relative Permeabilität des Kernmaterials μ_r als auch der Einfluss eines eventuell vorhandenen Luftspaltes zusammengefasst). Beim Erreichen des Sättigungswertes B_{max} wird $\mu_{\text{eff}} \rightarrow 1$. Somit unterscheidet sich das gesättigte Kernmaterial kaum noch von Luft, d.h. seine bündelnde Wirkung geht zunehmend verloren, und damit ist der Sekundärkreis kaum noch mit dem Primärkreis gekoppelt. **Die Sättigung des magnetischen Kernmaterials ist daher zu vermeiden.** 🧡 Was muss man also in der Praxis beachten?

Bezüglich der Frequenzabhängigkeit der Übertragungsfunktion betrachtet man das Induktionsgesetz. Setzt man für die Induktion $\Phi = \Phi_{\text{max}} \cdot \sin(\omega t)$ voraus, so ergibt sich:

$$U_1 = N_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt} = N_1 \cdot \Phi_{\text{max}} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) = U_{1,\text{max}} \cdot \cos(\omega t) \tag{26}$$

und damit

$$U_{1,\text{max}} = N_1 \cdot \Phi_{\text{max}} \cdot \omega = N_1 \cdot B_{\text{max}} \cdot F \cdot 2\pi f \tag{27}$$

Man erkennt, dass beim Übergang zu sehr kleinen Frequenzen die maximal erlaubte Spannungsamplitude linear mit der Frequenz absinkt. B_{max} ist durch den Sättigungswert der magnetischen Flussdichte in der Hysteresekurve begrenzt. Die typische Amplitudenübertragungsfunktion eines Übertragers ist in Abb. 7 dargestellt.

Im Gebiet I sind die Frequenzen so niedrig, dass der Übertragerkern in die Sättigung gebracht wird. Das Gebiet II entspricht dem Arbeitsbereich eines Übertragers. Hier sind Eingangs- und Ausgangsspannung über das Windungsverhältnis nach Gleichung (24) gekoppelt. Im Gebiet III gibt es eine Resonanz aufgrund von parasitären Kapazitäten C zwischen den Windungen der Spulen. Zusammen mit der Induktivität L der Spulen ergibt sich eine Resonanzstelle bei

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{28}$$

Aus der Breite des Resonanzpeaks $\Delta f = f_{R,o} - f_{R,u}$ (definiert als der Abstand der Frequenzen, bei denen die Amplitudenübertragungsfunktion auf $1/\sqrt{2}$ des Peakmaximums abgefallen ist) und der Resonanzfrequenz f_R ergibt sich die Güte Q als Maß für die Schärfe einer Resonanz:

$$Q = \frac{f_R}{\Delta f} = \frac{f_R}{f_{R,o} - f_{R,u}} \tag{29}$$

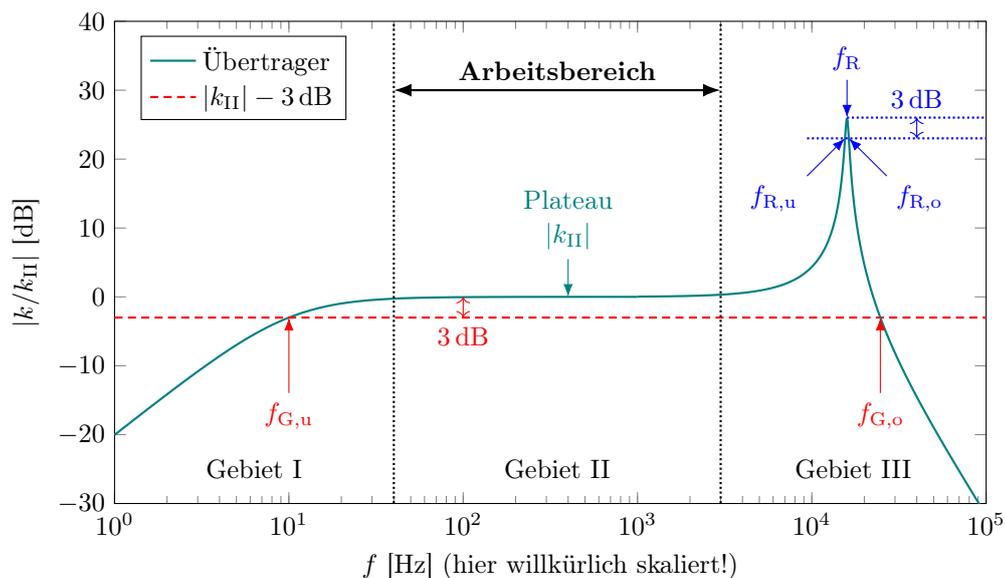


Abbildung 7: Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung k eines Übertragers (schematisch). Die Werte wurden auf das Plateau (II) normiert. Man beachte die logarithmische Skalierung der Ordinatenachse aufgrund von $20 \cdot \log |k/k_{II}|$ dB.

Eine weitere Erhöhung der Frequenz hat eine Verringerung der Amplitudenübertragungsfunktion zur Folge. Die Ursache hierfür liegt in der Verkleinerung des kapazitiven Widerstandes $|Z_C| = 1/(\omega C)$ der Windungen bzw. Wicklungslagen gegeneinander sowie durch Wirbelstromverluste, Hystereseverluste beim Ummagnetisierungsvorgang usw.

Die **Bandbreite** der Übertragungsfunktion $B = f_{G,o} - f_{G,u}$ ist definiert als der Abstand der Frequenzen, bei denen die Amplitudenübertragungsfunktion auf $1/\sqrt{2}$ des Plateauwerts $|k_{II}|$ abgefallen ist und **darf nicht mit der Breite des Resonanzpeaks verwechselt werden**.

3 Versuchsdurchführung

1. Bauen Sie einen RC-Hochpass *oder* RC-Tiefpass mit den vorhandenen Bauelementen auf (siehe Abb. 3).
 - a) Nehmen Sie die komplexe Übertragungsfunktion durch Anlegen einer Wechselspannung mit variabler Frequenz ($f \geq 10$ Hz) auf. Messen Sie das Amplitudenverhältnis sowie die Phasendifferenz von Eingangs- und Ausgangssignal in einem weiten Frequenzbereich.

🔗 Überlegen Sie sich vorab, wie Sie die Frequenzen wählen müssen, damit Sie auf einer *logarithmischen* Frequenzachse immer 4 äquidistante Messpunkte pro Dekade erhalten.
 - b) Bestimmen Sie die Grenzfrequenz durch direkte Messung mit dem AC-Millivoltmeter. Stellen Sie dabei bei hinreichend niedriger bzw. hoher Frequenz (auf dem Plateau des Filters) die Eingangsspannung so ein, dass auf dem Messgerät 0 dB angezeigt wird. Verändern Sie nun die Signalfrequenz bis die Anzeige -3 dB erreicht. Die eingestellte Frequenz entspricht jetzt der Grenzfrequenz. Begründen Sie dies mithilfe des Pegelmaßes und der [Definition der Einheit Dezibel](#). Überprüfen Sie die Phasenlage zwischen Eingangs- und Ausgangssignal. Führen Sie eine Fehlerrechnung für die Grenzfrequenz durch und vergleichen Sie mit dem theoretischen Wert. 🔗 **Bauelemente vermessen!**
2. Schließen Sie an den bereitgestellten Transformator primärseitig den Frequenzgenerator Agilent 33210A an und messen Sie sowohl auf der Primärseite als auch auf der Sekundärseite die Amplituden. Nutzen Sie dafür das AC-Millivoltmeter sowie parallel dazu das Oszilloskop (siehe Abb. 8). Variieren Sie die Frequenz in einem weiten Bereich.

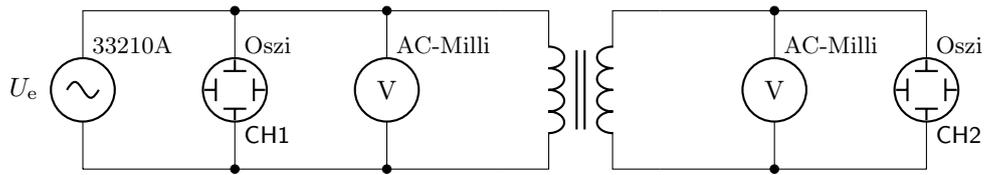


Abbildung 8: Zur Aufnahme der Amplitudenübertragungsfunktion eines Transformators.

- ⚠ Benutzen Sie immer das Oszilloskop, um die Kurvenform der Eingangs- und Ausgangsspannung zu überprüfen: Immer **sinusförmig** messen! Falls Verzerrungen auftreten: **Eingangsspannung reduzieren**. 🗨️ **Warum ist dies notwendig? Bitte fügen Sie eine kurze Diskussion mit in Ihr Protokoll ein!**
- Bestimmen Sie die Amplitudenübertragungsfunktion des Transformators über einen weiten Frequenzbereich. Beginnen Sie bei 10 Hz und messen Sie bis oberhalb der Resonanzfrequenz des Systems. Achten Sie darauf, dass Sie speziell in Bereichen großer Änderung hinreichend viele Messwerte aufnehmen. Geben Sie die Grenzfrequenzen $f_{G,o}$ und $f_{G,u}$ des Transformators an. In welchem Frequenzbereich ist der Transformator im Arbeitsbereich (konkrete Werte)? Vergleichen Sie das gemessene Amplitudenübertragungsverhältnis im Plateaubereich mit dem Windungsverhältnis des Transformators.
 - Wiederholen Sie Aufgabe a) für $f = 1$ Hz. Legen Sie hier den Schwerpunkt auf die Beschreibung der Kurvenverläufe CH1 und CH2 am Hameg HM1508 Oszilloskop im Digitalmodus. Welche besonderen Schwierigkeiten ergeben sich für die Messung der Übertragungsfunktion eines Transformators bei solch niedrigen Frequenzen und warum?
 - Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz f_R des Transformators durch Amplituden- und Phasenmessung. Bestimmen Sie die Breite des Resonanzpeaks $\Delta f = f_{R,o} - f_{R,u}$ und berechnen Sie aus diesen Werten die Güte Q der Resonanz. Welches Übertragungsverhältnis wird im Resonanzfall erreicht? Wovon ist dieses abhängig?